



# Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

Ενότητα 11η

Άσκηση - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

Διδάσκων

Χρήστος Ζαρολιάγκης

Καθηγητής

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Πανεπιστήμιο Πατρών

Email: [zaro@ceid.upatras.gr](mailto:zaro@ceid.upatras.gr)



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

## Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «**Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση**» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



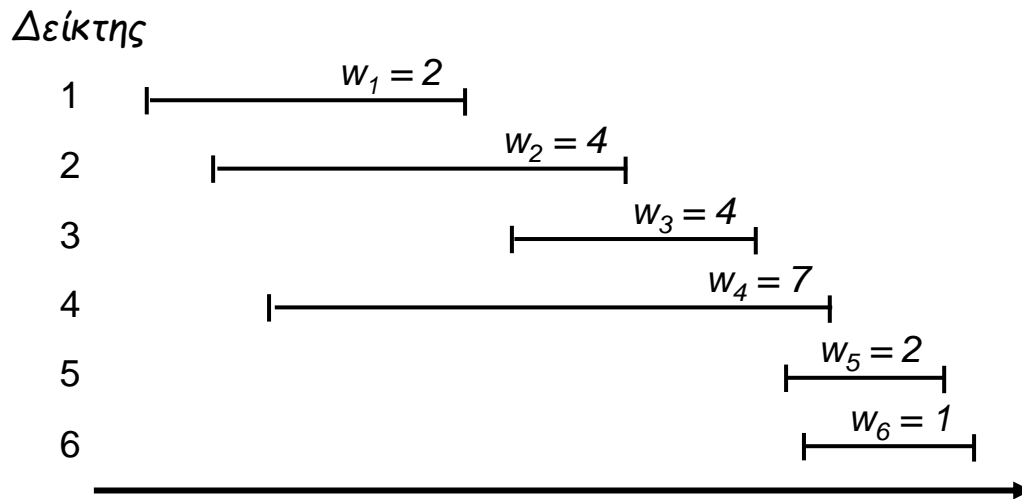
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



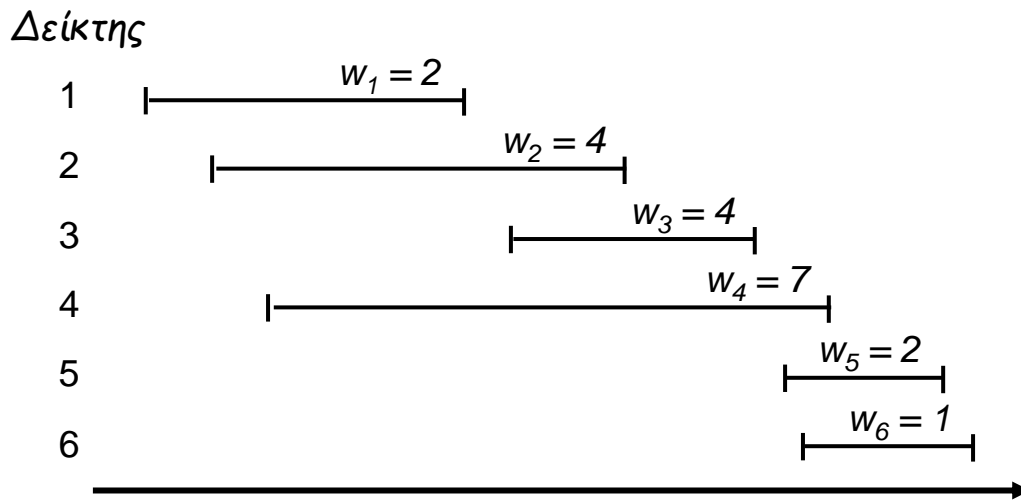
# Δυναμικός Προγραμματισμός

**Άσκηση:** Βρείτε ένα σύνολο μη επικαλυπτόμενων αιτημάτων από το παρακάτω διάγραμμα, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό βάρος.



# Δυναμικός Προγραμματισμός

**Άσκηση:** Βρείτε ένα σύνολο μη επικαλυπτόμενων αιτημάτων από το παρακάτω διάγραμμα, έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό βάρος.



Σύνολο αιτημάτων ή εργασιών  $\{1, \dots, 6\}$ .

Το αίτημα  $j$  ξεκινά την στιγμή  $s_j$ , τελειώνει την στιγμή  $f_j$ , και έχει **βαρύτητα**  $w_j$ .

Δύο αιτήματα είναι **συμβατά** αν δεν επικαλύπτονται.

Στόχος: εύρεση υποσυνόλου  $S \subseteq \{1, \dots, 6\}$  συμβατών αιτημάτων **μέγιστης βαρύτητας**  $\sum_{i \in S} w_i$ .

# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

Είσοδος:  $n, s_1, \dots, s_n, f_1, \dots, f_n, v_1, \dots, v_n$

Ταξινόμηση αιτημάτων ως προς χρόνους λήξης  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$

Υπολόγισε  $p(1), p(2), \dots, p(n)$

Iterative-Compute-Opt {

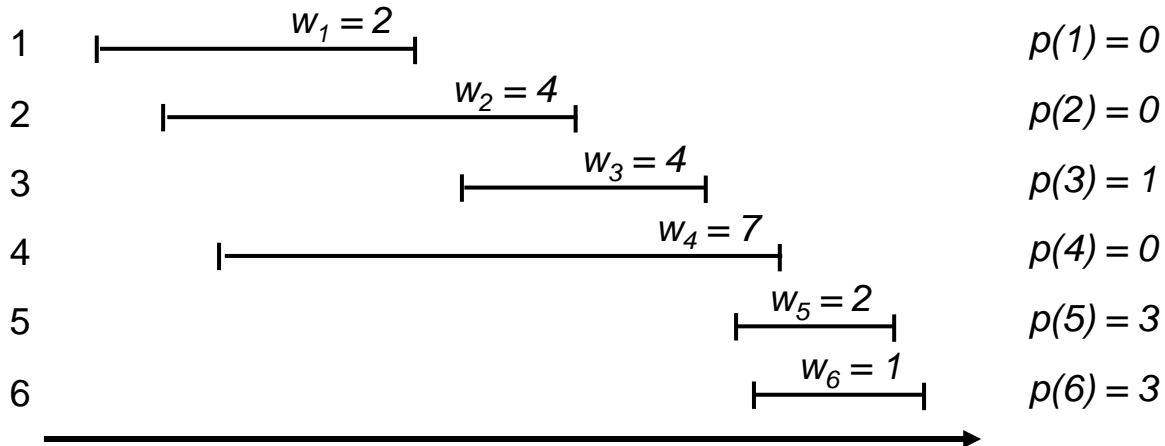
$M[0] = 0$

    for  $j = 1$  to  $n$

$M[j] = \max\{w_j + M[p(j)], M[j-1]\}$

    }

Δείκτης



# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

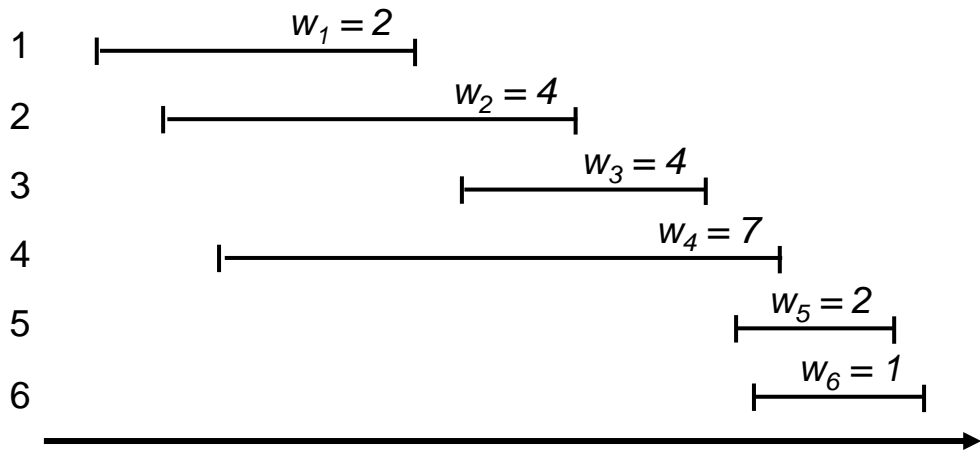
## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

$$M[j] = \max(w_j + M[p(j)], M[j-1])$$

$$M[0] = 0$$

$$M[1] = \max(w_1 + M[0], M[0]) = \max(2 + 0, 0) = 2$$

Δείκτης



- $p(1) = 0$
- $p(2) = 0$
- $p(3) = 1$
- $p(4) = 0$
- $p(5) = 3$
- $p(6) = 3$

M =

	0	1	2	3	4	5	6
	0	2					

# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

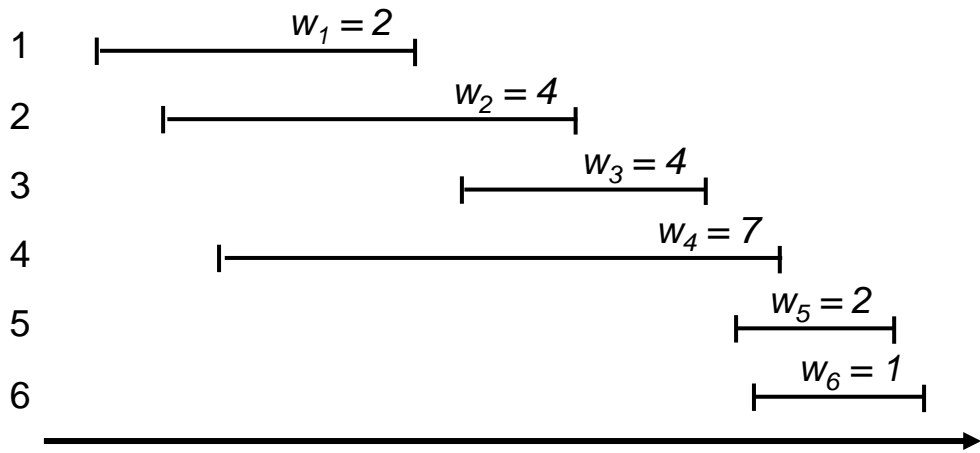
$$M[j] = \max(w_j + M[p(j)], M[j-1])$$

$$M[0] = 0$$

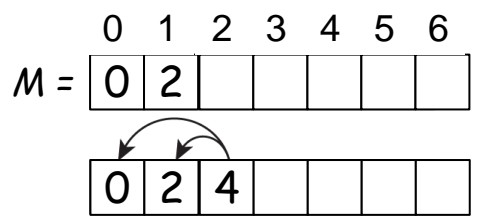
$$M[1] = \max(w_1 + M[0], M[0]) = \max(2 + 0, 0) = 2$$

$$M[2] = \max(w_2 + M[0], M[1]) = \max(4 + 0, 2) = 4$$

Δείκτης



- $p(1) = 0$
- $p(2) = 0$
- $p(3) = 1$
- $p(4) = 0$
- $p(5) = 3$
- $p(6) = 3$





# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

$$M[j] = \max(w_j + M[p(j)], M[j-1])$$

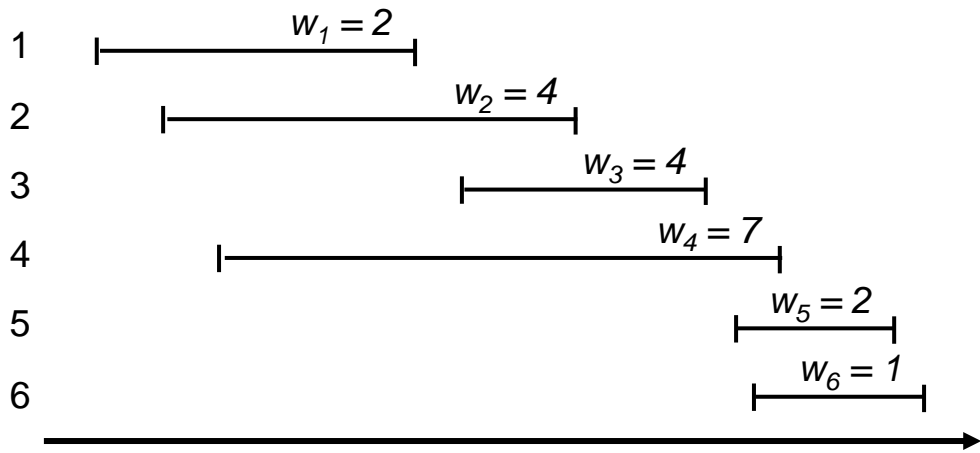
$$M[0] = 0$$

$$M[1] = \max(w_1 + M[0], M[0]) = \max(2 + 0, 0) = 2$$

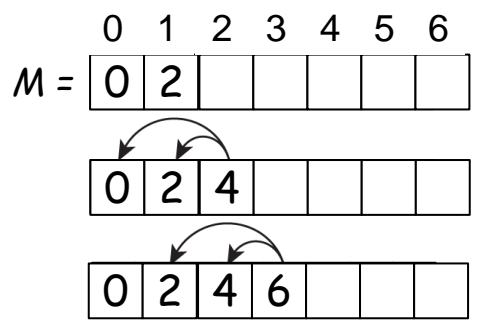
$$M[2] = \max(w_2 + M[0], M[1]) = \max(4 + 0, 2) = 4$$

$$M[3] = \max(w_3 + M[1], M[2]) = \max(4 + 2, 4) = 6$$

Δείκτης



- $p(1) = 0$
- $p(2) = 0$
- $p(3) = 1$
- $p(4) = 0$
- $p(5) = 3$
- $p(6) = 3$

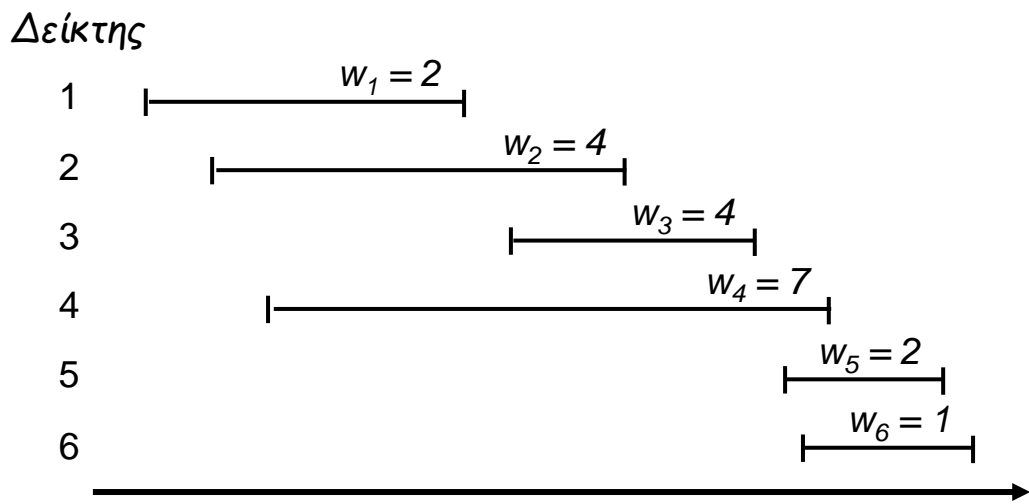


# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

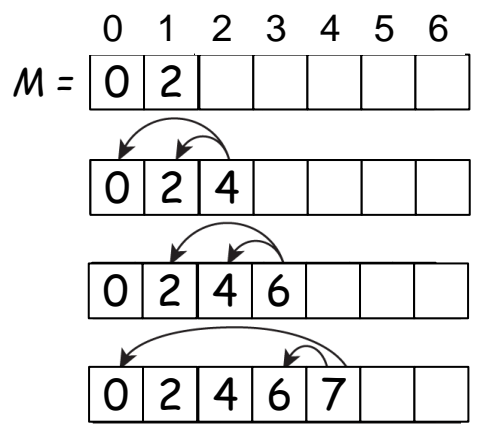
## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

$$M[j] = \max(w_j + M[p(j)], M[j-1])$$

- $M[0] = 0$
- $M[1] = \max(w_1 + M[0], M[0]) = \max(2 + 0, 0) = 2$
- $M[2] = \max(w_2 + M[0], M[1]) = \max(4 + 0, 2) = 4$
- $M[3] = \max(w_3 + M[1], M[2]) = \max(4 + 2, 4) = 6$
- $M[4] = \max(w_4 + M[0], M[3]) = \max(7 + 0, 6) = 7$



- $p(1) = 0$
- $p(2) = 0$
- $p(3) = 1$
- $p(4) = 0$
- $p(5) = 3$
- $p(6) = 3$



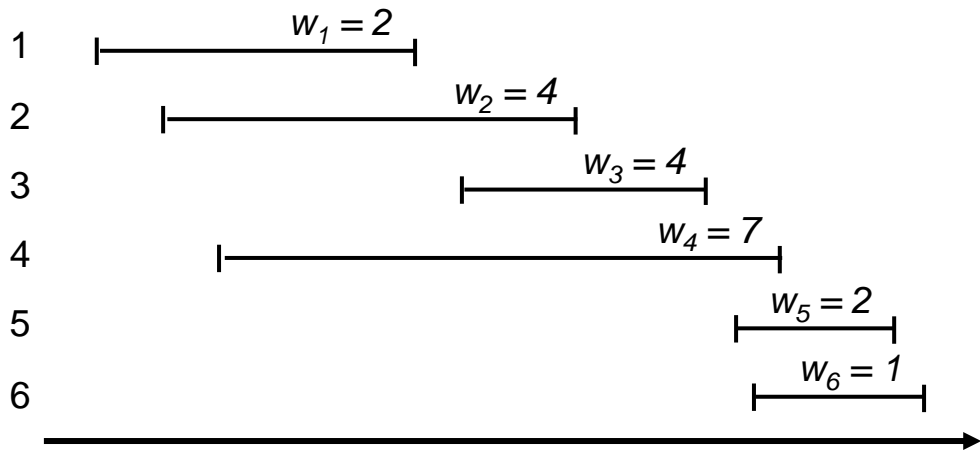
# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

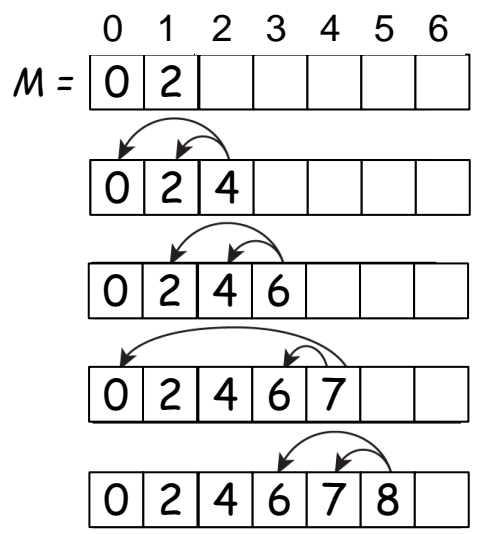
$$M[j] = \max(w_j + M[p(j)], M[j-1])$$

- $M[0] = 0$
- $M[1] = \max(w_1 + M[0], M[0]) = \max(2 + 0, 0) = 2$
- $M[2] = \max(w_2 + M[0], M[1]) = \max(4 + 0, 2) = 4$
- $M[3] = \max(w_3 + M[1], M[2]) = \max(4 + 2, 4) = 6$
- $M[4] = \max(w_4 + M[0], M[3]) = \max(7 + 0, 6) = 7$
- $M[5] = \max(w_5 + M[3], M[4]) = \max(2 + 6, 7) = 8$

Δείκτης



- $p(1) = 0$
- $p(2) = 0$
- $p(3) = 1$
- $p(4) = 0$
- $p(5) = 3$
- $p(6) = 3$



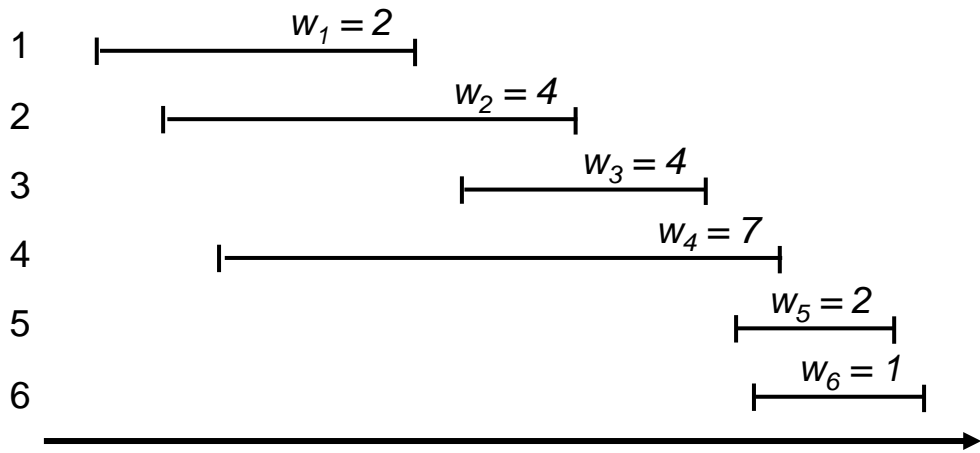
# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

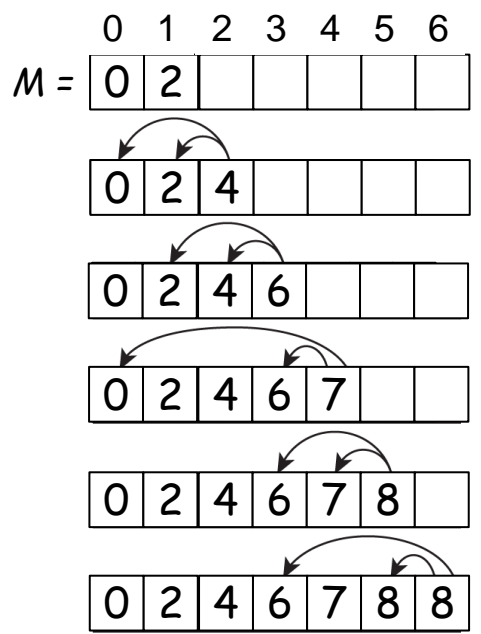
$$M[j] = \max(w_j + M[p(j)], M[j-1])$$

- $M[0] = 0$
- $M[1] = \max(w_1 + M[0], M[0]) = \max(2 + 0, 0) = 2$
- $M[2] = \max(w_2 + M[0], M[1]) = \max(4 + 0, 2) = 4$
- $M[3] = \max(w_3 + M[1], M[2]) = \max(4 + 2, 4) = 6$
- $M[4] = \max(w_4 + M[0], M[3]) = \max(7 + 0, 6) = 7$
- $M[5] = \max(w_5 + M[3], M[4]) = \max(2 + 6, 7) = 8$
- $M[6] = \max(w_6 + M[3], M[5]) = \max(1 + 6, 8) = 8$

Δείκτης



- $p(1) = 0$
- $p(2) = 0$
- $p(3) = 1$
- $p(4) = 0$
- $p(5) = 3$
- $p(6) = 3$



## Αλγόριθμος - Εύρεση της Λύσης

**Ερ.** Ο αλγόριθμος βρίσκει τη βέλτιστη τιμή. Τι γίνεται αν θέλουμε την ίδια την λύση :

**Απ.** Εκτελούμε ένα επιπλέον βήμα μετεπεξεργασίας του  $M$ , «ινχηλατώντας» τη λύση

```
Run M-Compute-Opt(n)
Run Find-Solution(n)

Find-Solution(j) {
  if (j = 0)
    μην εκτυπώσεις τίποτα
  else if ( $v_j + M[p(j)] > M[j-1]$ )
    εκτύπωσε το j
    Find-Solution(p(j))
  else
    Find-Solution(j-1)
}
```

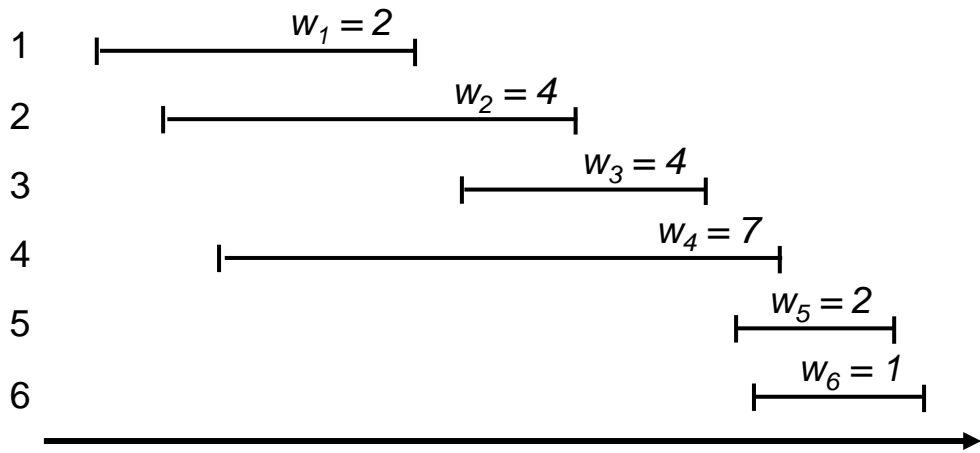
# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

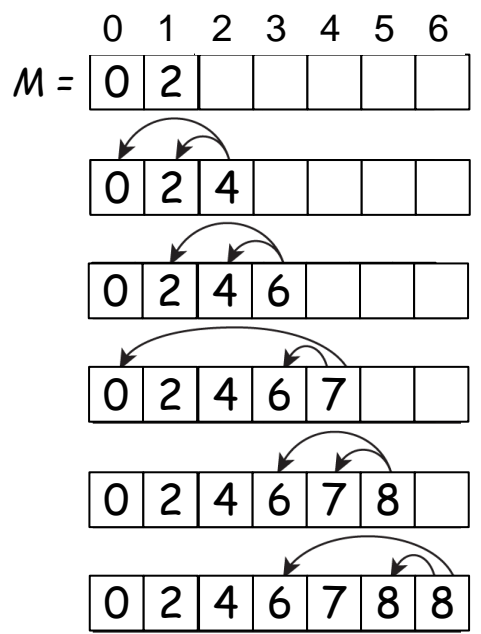
$$M[j] = \max(w_j + M[p(j)], M[j-1])$$

- $M[0] = 0$
- $M[1] = \max(w_1 + M[0], M[0]) = \max(2 + 0, 0) = 2$
- $M[2] = \max(w_2 + M[0], M[1]) = \max(4 + 0, 2) = 4$
- $M[3] = \max(w_3 + M[1], M[2]) = \max(4 + 2, 4) = 6$
- $M[4] = \max(w_4 + M[0], M[3]) = \max(7 + 0, 6) = 7$
- $M[5] = \max(w_5 + M[3], M[4]) = \max(2 + 6, 7) = 8$
- $M[6] = \max(w_6 + M[3], M[5]) = \max(1 + 6, 8) = 8$

Δείκτης



- $p(1) = 0$
- $p(2) = 0$
- $p(3) = 1$
- $p(4) = 0$
- $p(5) = 3$
- $p(6) = 3$



# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

$$M[j] = \max(w_j + M[p(j)], M[j-1])$$

$$M[0] = 0$$

$$M[1] = \max(w_1 + M[0], M[0]) = \max(2 + 0, 0) = 2$$

$$M[2] = \max(w_2 + M[0], M[1]) = \max(4 + 0, 2) = 4$$

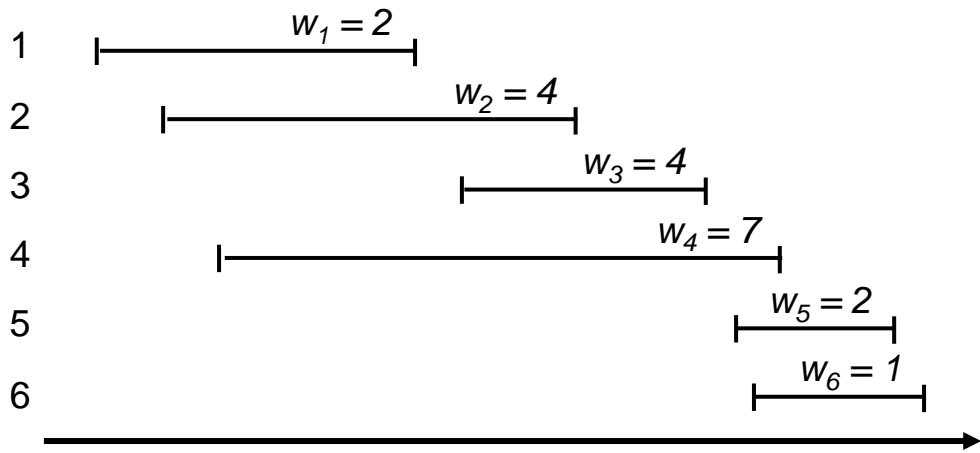
$$M[3] = \max(w_3 + M[1], M[2]) = \max(4 + 2, 4) = 6$$

$$M[4] = \max(w_4 + M[0], M[3]) = \max(7 + 0, 6) = 7$$

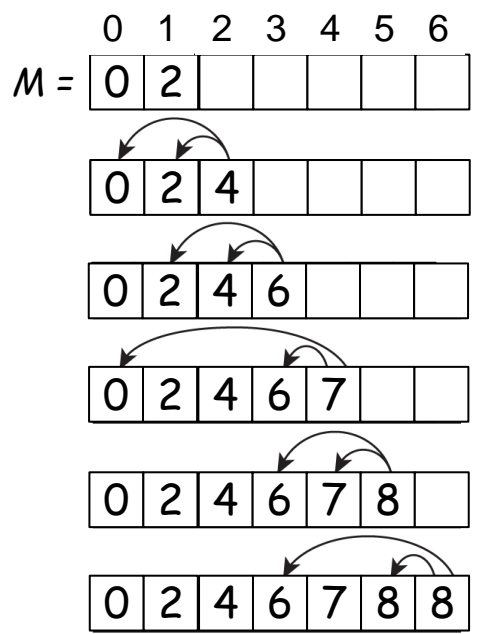
$$M[5] = \max(w_5 + M[3], M[4]) = \max(2 + 6, 7) = 8 \Rightarrow \text{εργασία } 5$$

$$M[6] = \max(w_6 + M[3], M[5]) = \max(1 + 6, 8) = 8$$

Δείκτης



- $p(1) = 0$
- $p(2) = 0$
- $p(3) = 1$
- $p(4) = 0$
- $p(5) = 3$
- $p(6) = 3$



# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

$$M[j] = \max(w_j + M[p(j)], M[j-1])$$

$$M[0] = 0$$

$$M[1] = \max(w_1 + M[0], M[0]) = \max(2 + 0, 0) = 2$$

$$M[2] = \max(w_2 + M[0], M[1]) = \max(4 + 0, 2) = 4$$

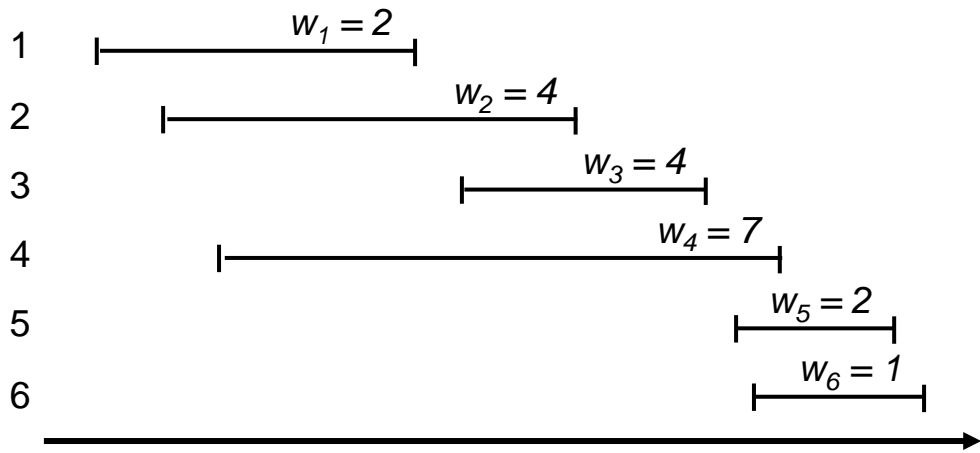
$$M[3] = \max(w_3 + M[1], M[2]) = \max(4 + 2, 4) = 6$$

$$M[4] = \max(w_4 + M[0], M[3]) = \max(7 + 0, 6) = 7$$

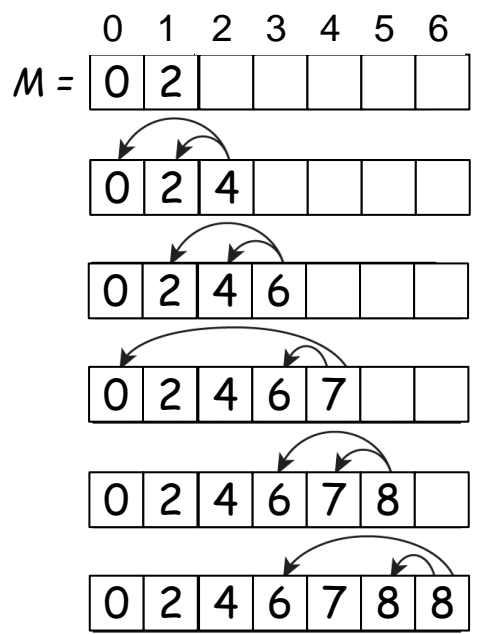
$$M[5] = \max(w_5 + M[3], M[4]) = \max(2 + 6, 7) = 8 \Rightarrow \text{εργασία } 5$$

$$M[6] = \max(w_6 + M[3], M[5]) = \max(1 + 6, 8) = 8$$

Δείκτης



- $p(1) = 0$
- $p(2) = 0$
- $p(3) = 1$
- $p(4) = 0$
- $p(5) = 3$
- $p(6) = 3$





# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

$$M[j] = \max(w_j + M[p(j)], M[j-1])$$

$$M[0] = 0$$

$$M[1] = \max(w_1 + M[0], M[0]) = \max(2 + 0, 0) = 2$$

$$M[2] = \max(w_2 + M[0], M[1]) = \max(4 + 0, 2) = 4$$

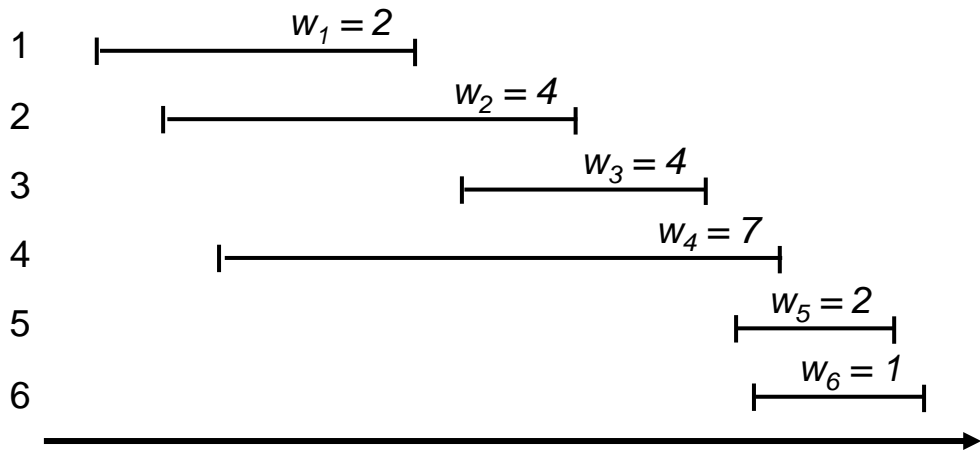
$$M[3] = \max(w_3 + M[1], M[2]) = \max(4 + 2, 4) = 6 \quad \Rightarrow \text{εργασία } 3$$

$$M[4] = \max(w_4 + M[0], M[3]) = \max(7 + 0, 6) = 7$$

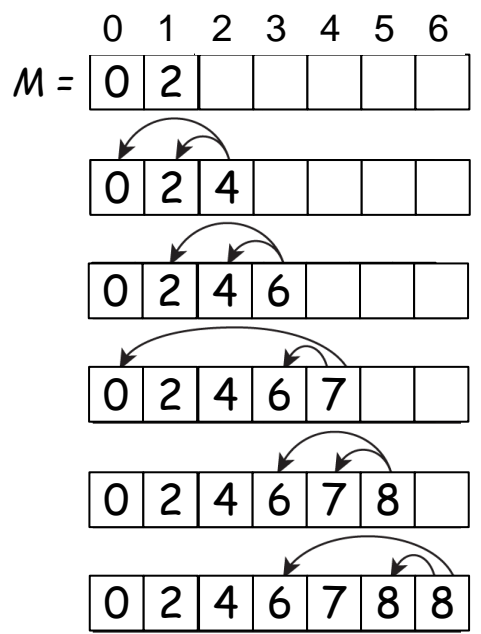
$$M[5] = \max(w_5 + M[3], M[4]) = \max(2 + 6, 7) = 8 \quad \Rightarrow \text{εργασία } 5$$

$$M[6] = \max(w_6 + M[3], M[5]) = \max(1 + 6, 8) = 8$$

Δείκτης



- $p(1) = 0$
- $p(2) = 0$
- $p(3) = 1$
- $p(4) = 0$
- $p(5) = 3$
- $p(6) = 3$



# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

$$M[j] = \max(w_j + M[p(j)], M[j-1])$$

$$M[0] = 0$$

$$M[1] = \max(w_1 + M[0], M[0]) = \max(2 + 0, 0) = 2$$

$$M[2] = \max(w_2 + M[0], M[1]) = \max(4 + 0, 2) = 4$$

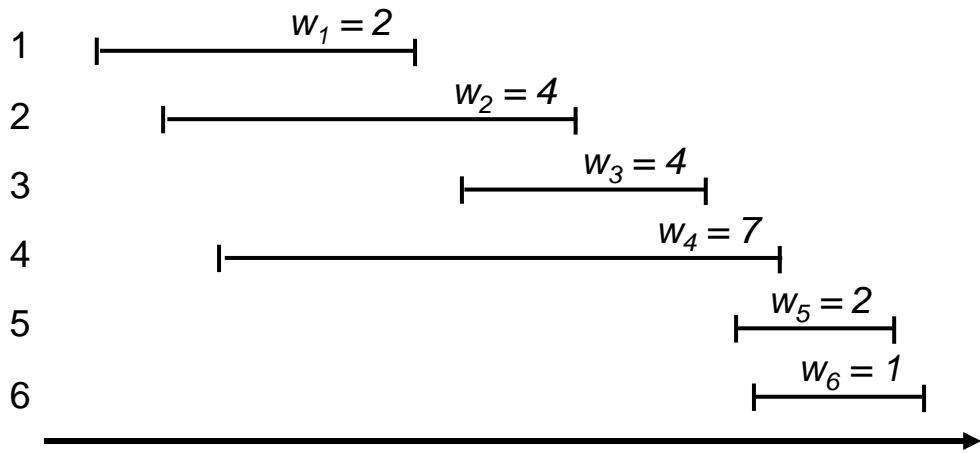
$$M[3] = \max(w_3 + M[1], M[2]) = \max(4 + 2, 4) = 6 \Rightarrow \text{εργασία } 3$$

$$M[4] = \max(w_4 + M[0], M[3]) = \max(7 + 0, 6) = 7$$

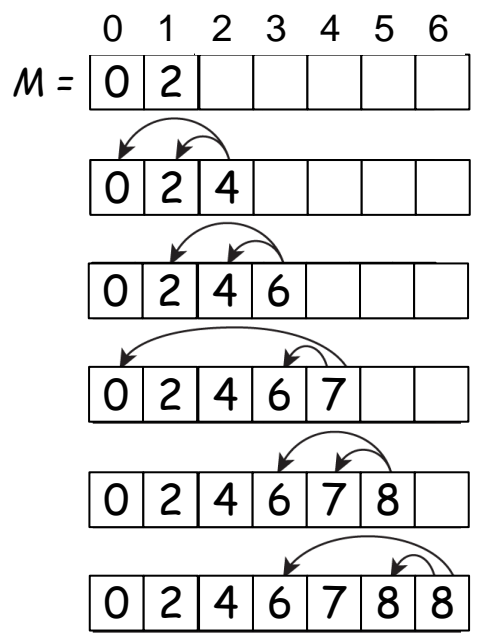
$$M[5] = \max(w_5 + M[3], M[4]) = \max(2 + 6, 7) = 8 \Rightarrow \text{εργασία } 5$$

$$M[6] = \max(w_6 + M[3], M[5]) = \max(1 + 6, 8) = 8$$

Δείκτης



- $p(1) = 0$
- $p(2) = 0$
- $p(3) = 1$
- $p(4) = 0$
- $p(5) = 3$
- $p(6) = 3$



# Αλγόριθμος - Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

## Απομνημόνευση ή επανάληψη στα υποπροβλήματα

$$M[j] = \max(w_j + M[p(j)], M[j-1])$$

$$M[0] = 0$$

$$M[1] = \max(w_1 + M[0], M[0]) = \max(2 + 0, 0) = 2 \Rightarrow \text{εργασία } 1$$

$$M[2] = \max(w_2 + M[0], M[1]) = \max(4 + 0, 2) = 4$$

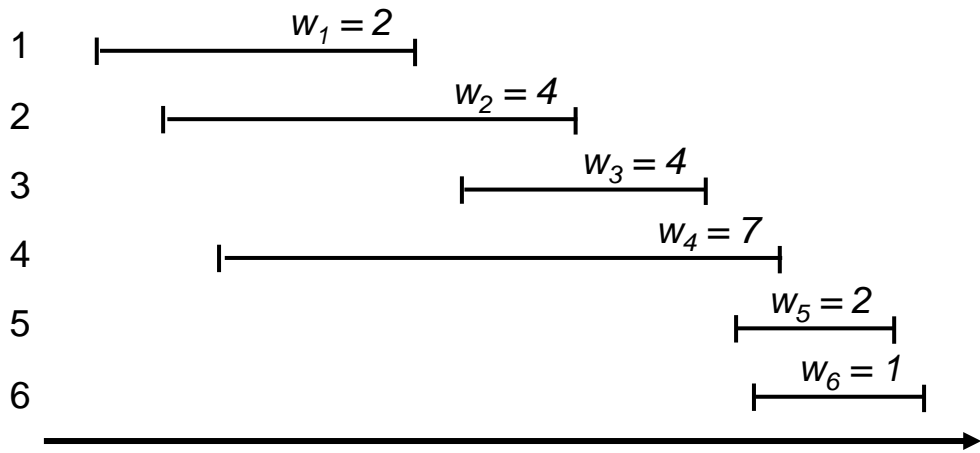
$$M[3] = \max(w_3 + M[1], M[2]) = \max(4 + 2, 4) = 6 \Rightarrow \text{εργασία } 3$$

$$M[4] = \max(w_4 + M[0], M[3]) = \max(7 + 0, 6) = 7$$

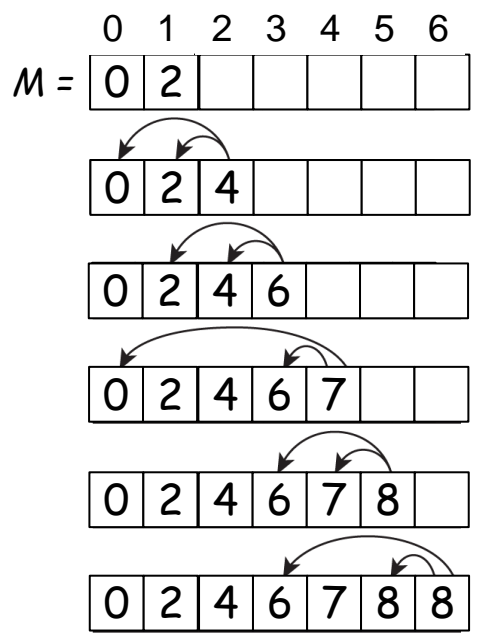
$$M[5] = \max(w_5 + M[3], M[4]) = \max(2 + 6, 7) = 8 \Rightarrow \text{εργασία } 5$$

$$M[6] = \max(w_6 + M[3], M[5]) = \max(1 + 6, 8) = 8$$

Δείκτης



- $p(1) = 0$
- $p(2) = 0$
- $p(3) = 1$
- $p(4) = 0$
- $p(5) = 3$
- $p(6) = 3$



# Τέλος Άσκησης



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.

## Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Χρήστος Ζαρολιάγκης, 2014.  
«Εισαγωγή στους Αλγορίθμους». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2014.  
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1083>

## Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης *Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση, Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1]* ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό.



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

## Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει) μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.