

For every n there exists a 2-coloring of the edges of the complete graph K_n so that the number of monochromatic K_4 subgraphs is at least $\binom{n}{4} \cdot 2^{-5}$

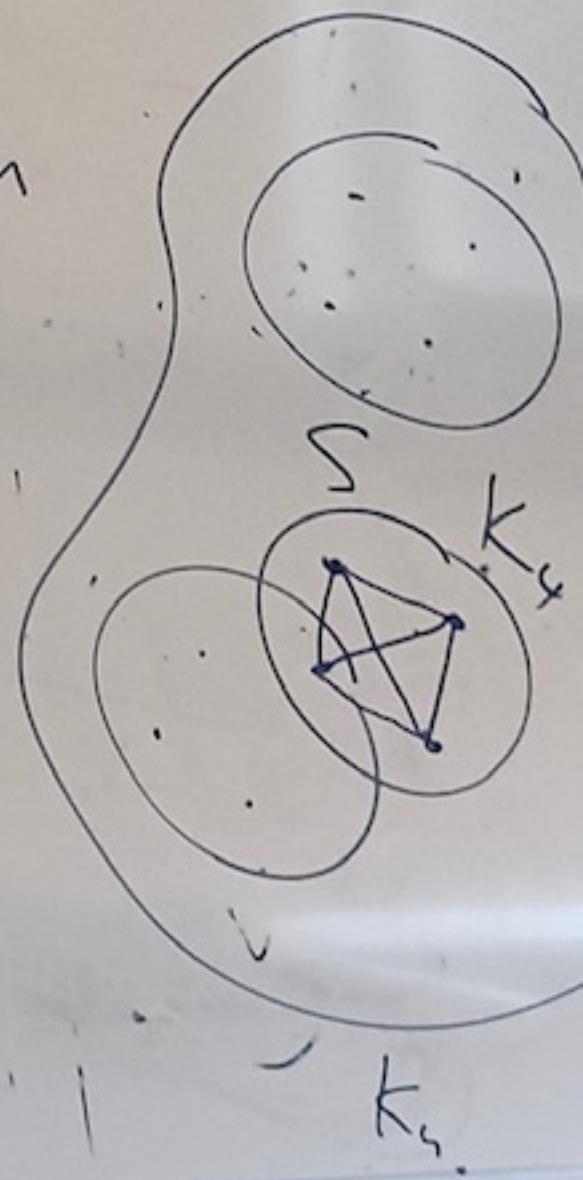
Ans.

Χρωματίζουμε τις ακμές του K_n τυχαία, ισοπρόσβλητα για τα 2 χρώματα και ανεξάρτητα για τις διάφορες ακμές.

$\Rightarrow$ χώρος: σημεία $\leftrightarrow$ διχρωματισμοί των ακμών του K_n

Εστω S a fixed K_4 και $X_S = \begin{cases} 1, & S \text{ mono} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

και
$$X = \sum_{S: |S|=4} X_S = \# \text{ mono } K_4$$



$$E(X_S) = 1 \cdot \Pr\{S \text{ mono}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 2 \cdot 2^{-6} = 2^{-5}$$

$$E(X) = E\left(\sum_{S: |S|=4} X_S\right) = \sum_{S: |S|=4} E(X_S) = \binom{n}{4} \cdot 2^{-5}$$

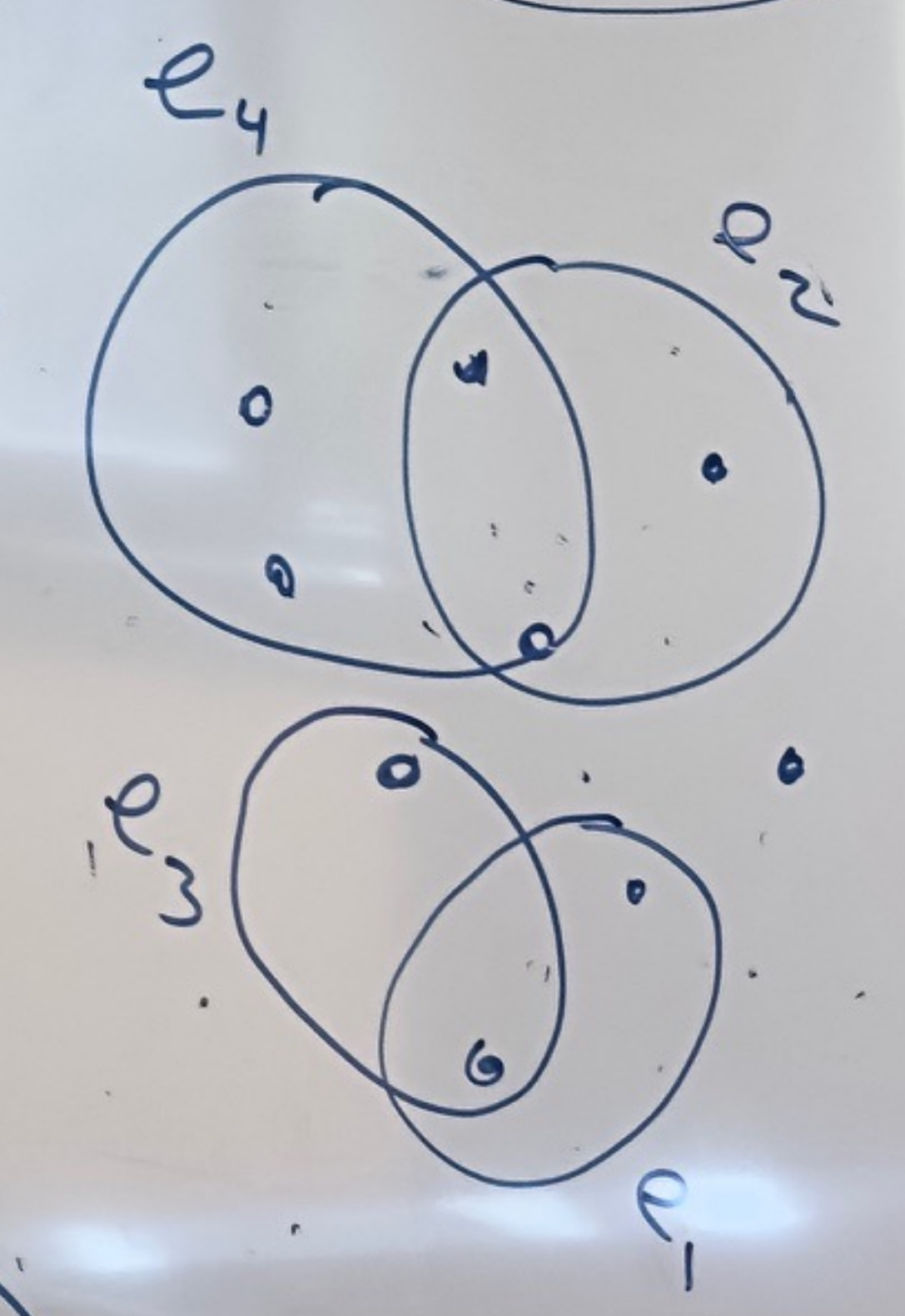
$\exists$ σημείο στον χώρο: $X \geq E(X)$

$\Rightarrow \exists$ διχρωματισμός των σημείων του K_n : $\# \text{ mono } K_4 \geq \binom{n}{4} \cdot 2^{-5}$

□

Let H an n -uniform hypergraph with less than $\frac{4^{n-1}}{3^n}$ edges.
 Prove that there is a 4-coloring of the vertices of H
 so that in every edge all 4 colors are represented.

Ans. (hypergraphs: edges are subsets of vertices)
 every graph is a (hypergraph).
 2-uniform
 n -uniform: all edges have n vertices



Χρωματίζουμε τυχαία, ανεξάρτητα και ~~ισοι~~ ~~δυνα~~ για 4 χρώματα

τις κορυφές του hypergraph

$\Rightarrow$ χώρο: σημεία: 4-colorings of the hypergraph's vertices

Εστω S μια συγκεκριμένη ακμή

Εστω A_S : "λείπει κάποιο χρώμα"

$$\Pr\{A_S\} = \Pr\{\text{λείπει το } C_1 \cup \text{λείπει το } C_2 \cup \text{λείπει το } C_3 \cup \text{λείπει το } C_4\}$$

$$\leq 4 \cdot \Pr\{\text{λείπει το } C_1\} = 4 \cdot \frac{3^n}{4^n} = \frac{3^n}{4^{n-1}}$$

$$\Pr\{\exists \text{ ακμή στην οποία λείπει ένα χρώμα}\} = \Pr\left\{\bigcup_{\text{edges } S} A_S\right\} \leq \sum_S \Pr\{A_S\}$$

$\Rightarrow \Pr\{\forall \text{ ακμή: όλα τα χρώματα}\} > 0 \Rightarrow \exists \text{ σημείο: όλες οι ακμές έχουν όλα τα χρώματα}$
 $\Rightarrow \exists \text{ επιθυμητό coloring}$

□

MIN CUT ALGORITHM

- $n-2$ contractions of time $O(n)$ each $\Rightarrow O(n^2)$ time

- correct $\Leftrightarrow$ no min-cut edge contracted

- $\Pr\{\text{edge } e \text{ in min cut}\} \leq \frac{2}{n}$ when # vertices is n

- $\Pr\{\text{edge } e \text{ not in min cut}\} \geq 1 - \frac{2}{n}$

- $\Pr\{\text{alg correct}\} \geq \frac{2}{n(n-1)}$

- $\Pr\{\text{error}\} \leq 1 - \frac{2}{n(n-1)}$

$\Rightarrow$ amplification: - we run the alg many times

- we take the minimum of the various outcomes.

$$1 - x \leq e^{-x}$$

total time:

$$n(n-1)\log n \cdot O(n^2) = O(n^4 \log n)$$

- we repeat the alg $n(n-1)\log n$ times
 $\Rightarrow \Pr\{\text{total error}\} = \Pr\{\text{all repetitions erroneous}\}$

$$\leq \left[1 - \frac{2}{n(n-1)}\right]^{n(n-1)\log n}$$

$$\leq e^{-2\log n} = n^{-2} \rightarrow 0$$

FAST CUT ALGORITHM

- H_1 : συνεχής contractions μέχρι το graph να μείνουν με n έτσι $\frac{n}{\sqrt{2}}$ κορυφές $0.7n$

- $X_1 \leftarrow \text{FASTCUT}(H_1)$: αναδρομική επιλογή

μέχρι να λυθεί το πρόβλημα # κορυφών: $\frac{\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} \approx 0.49n$

(many iterations as the graph size decreases)

since then the error probability of hitting the min cut increases)

- Let $T(n)$ the time of FASTCUT

$$T(n) = O(n^2) + 2 \cdot T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow T(n) = O(n^2 \log n)$$

$$P(n) = \Pr\{\text{correct}\} \Rightarrow \Pr\{\text{correct}\} \geq \frac{c}{\log n}$$

$$T(n) = O(n^2 \log n) \text{ time}$$

1 repetition

$$\Pr\{\text{correct}\} \geq \frac{c}{\log n}$$

amplification: $c \log^2 n$ runs

$$\Pr\{\text{error}\} \leq \left(1 - \frac{c}{\log n}\right)^{c \log^2 n} = e^{-c^2 \log n} = e^{-c^2} \rightarrow 0$$

MIN CUT
 n^2

FAST CUT
 $n^2 \log n$
 $\geq \frac{c}{\log n}$

TOTAL TIME

MIN CUT $\swarrow$ FAST CUT $\searrow$

TIM $\in$ (1 run)

$$\Pr\{\text{correct in 1 run}\} \geq \frac{2}{n^2}$$

repetitions: $n^2 \log n$

$c \log^2 n$

$$O(n^4 \log n)$$

$$O(n^2 \log^3 n)$$