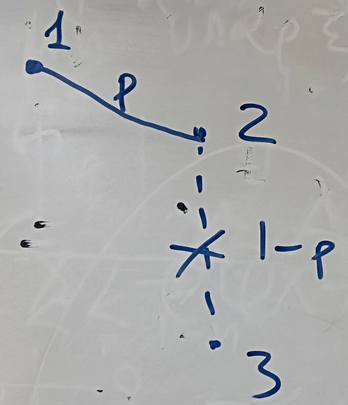
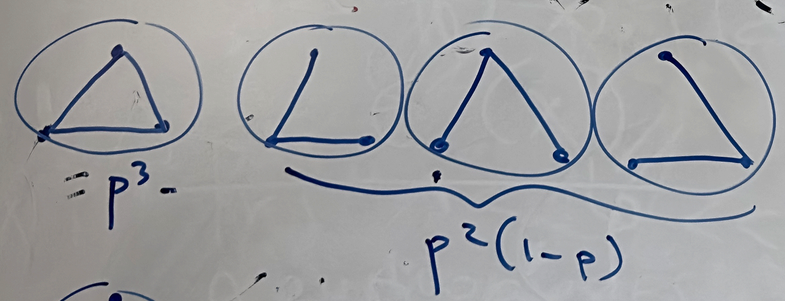
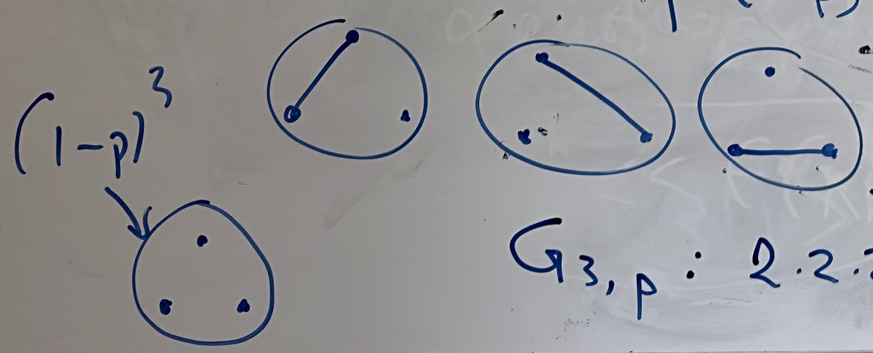
$G_{n,p}$ random graphs

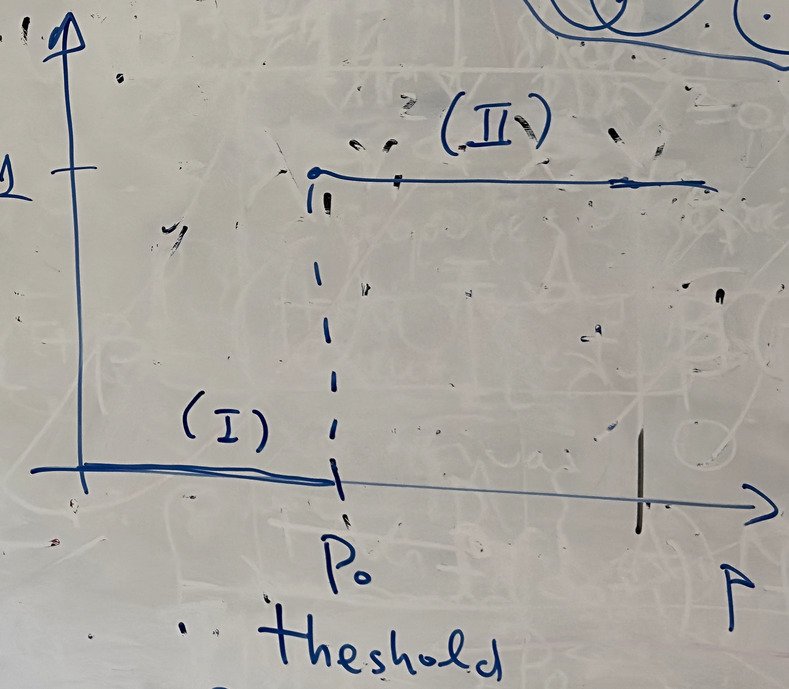


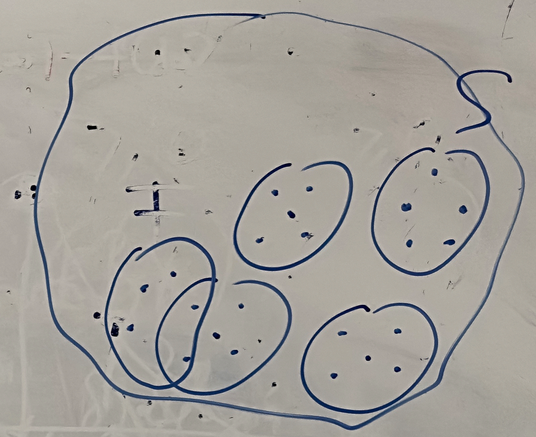




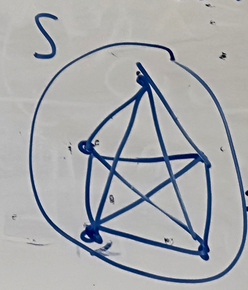
$G_{3,p}$: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ πιθανά graphs

$\mathbb{P}\{\text{ιδιότητας}\}$





K_5 :



$\binom{5}{2} = 10$ ακμές

complete graph με $n=5$

Να βρεθεί η συνάρτηση κατωφλίου για την ύπαρξη K_5 σε $G_{n,p}$ random graphs

(I) μη ύπαρξη : μετράμε τη μέση τιμή του αριθμού των K_5

Έστω S a set of 5 fixed vertices

$$\binom{n}{5} = \frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \sim n^5$$

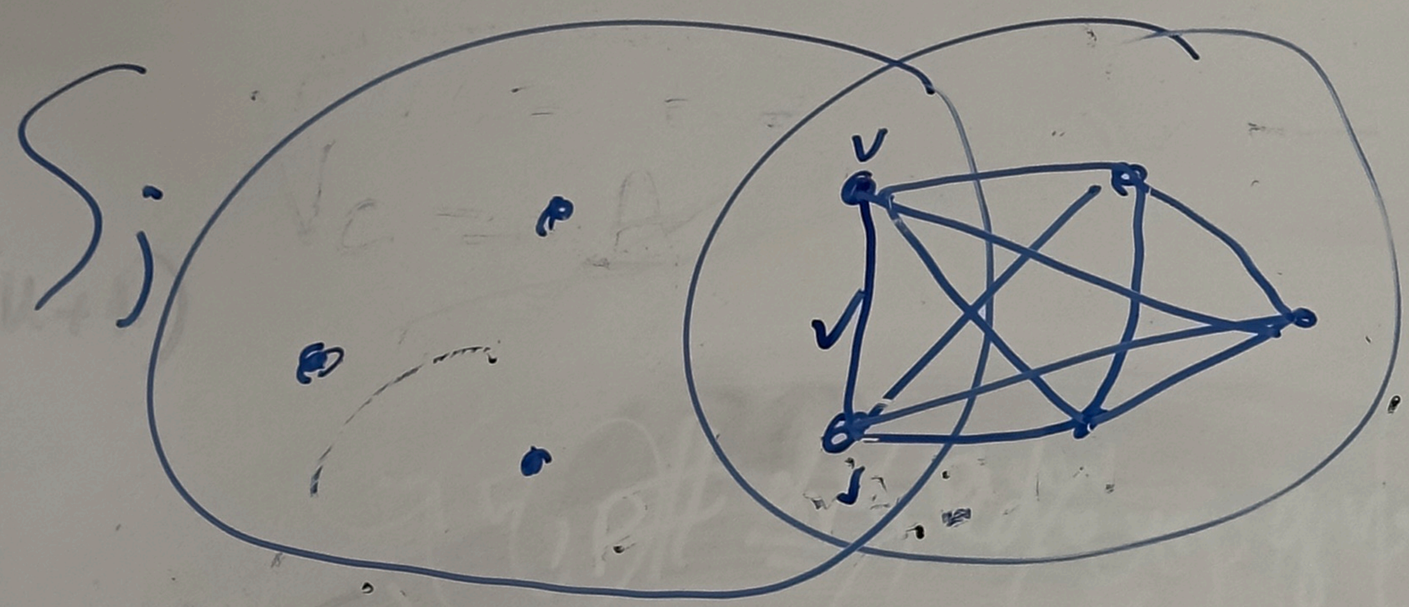
$$X_S = \begin{cases} 1, & S \text{ is } K_5 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \Rightarrow E(X_S) = 1 \cdot \Pr\{S \text{ is } K_5\} = p^{10}$$

μη ύπαρξη: αν $E(X) \to 0 \Rightarrow \Pr\{X=0\} \to 1$

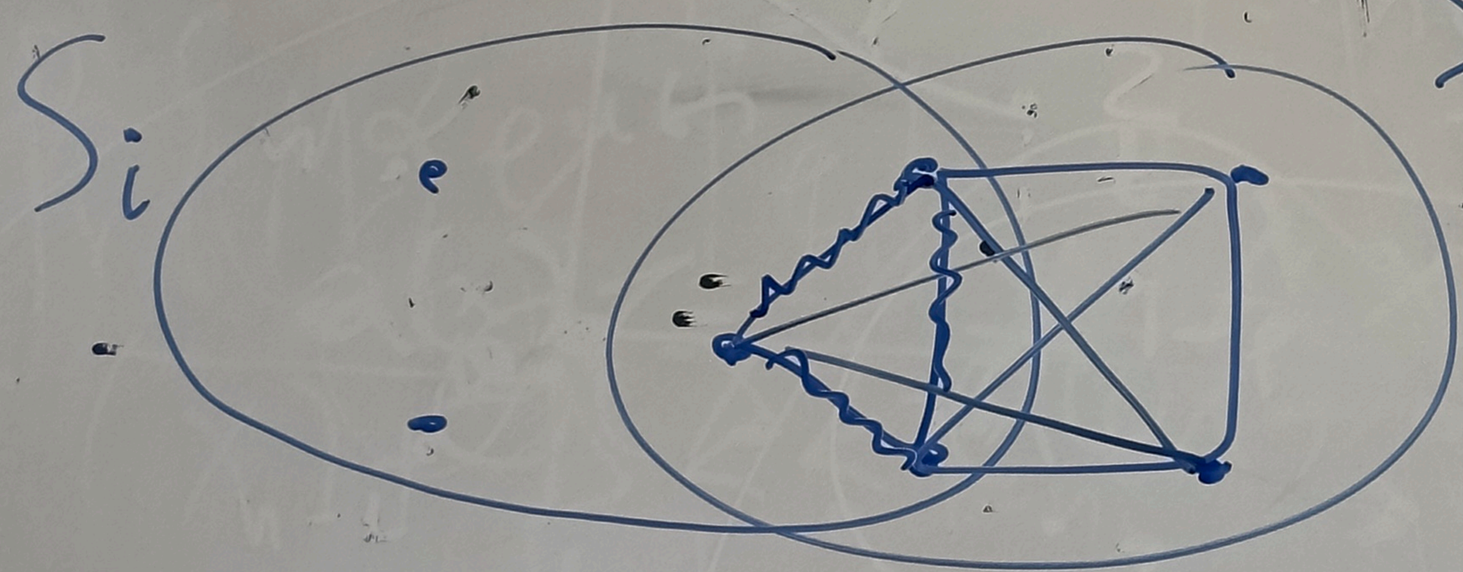
K_5 είναι 0 (μη ύπαρξη) — βέβαια w.h.p.

$$X = \sum_{S:|S|=5} X_S \quad : \# \text{ όλων των } K_5 \Rightarrow E(X) = E\Big(\sum_S X_S\Big) = \sum_S E(X_S) = \binom{n}{5} p^{10} \sim n^5 p^{10}$$

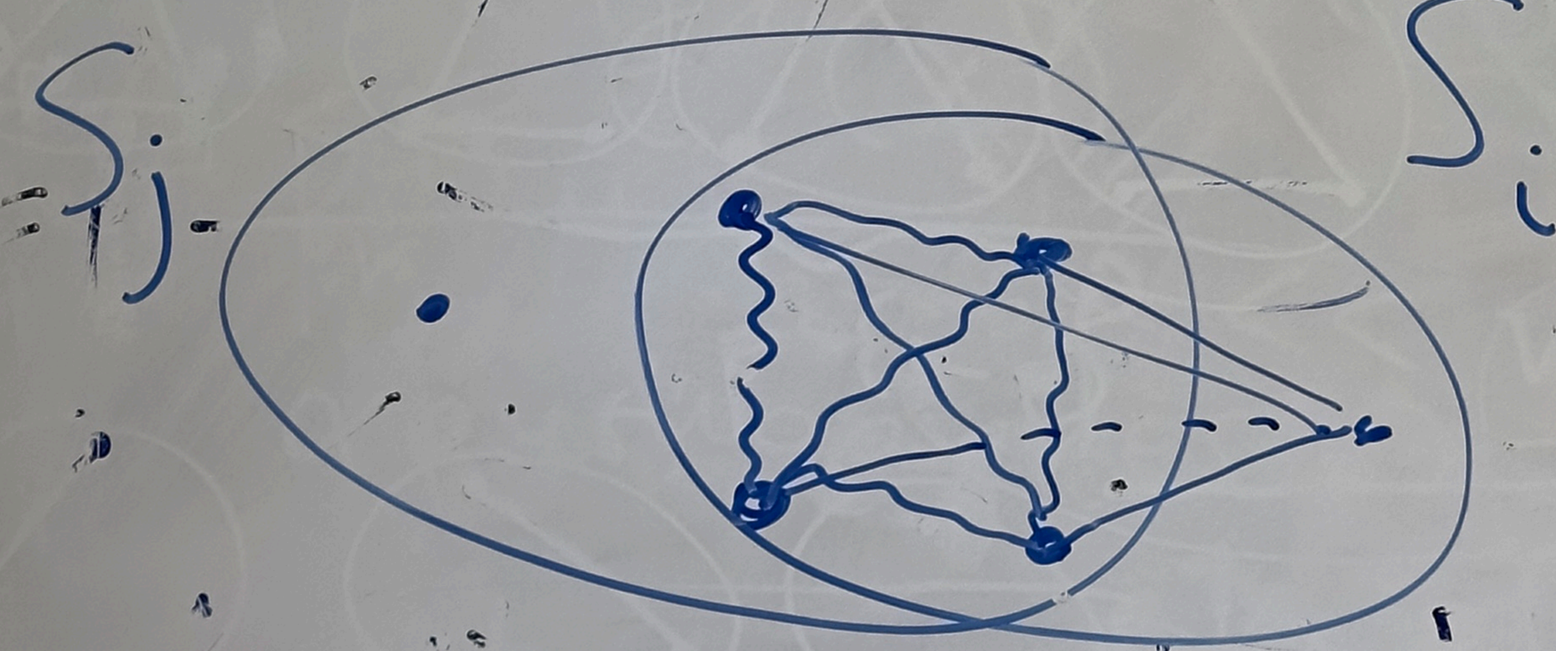
$$E(X) \to 0 \iff n^5 p^{10} \ll 1 \iff p^{10} \ll n^{-5} \iff p \ll n^{-5/10} \iff p \ll n^{-1/2}$$



(a)



(b)



(γ)

Να βρεθεί η συνάρτηση κατωφλίου για την ύπαρξη K_5 σε $G_{n,p}$ random graphs

(II) ύπαρξη : αρκεί $\Delta^* << E(X)$

$2 \le |S_i \cap S_j| \le 4$

2: για να υπάρχει κοινή ακμή

4: όχι ίδια

$$\Delta^* = \sum_{j \sim i} \Pr\{A_j \mid A_i\}$$

$A_j \leftrightarrow S_j$, $A_i \leftrightarrow S_i$

$\sim$: μη τετριμμένη εξάρτηση : εξαρτημένα αλλά διαφορετικά γεγονότα

$$= \underbrace{\sum_{|S_i \cap S_j| = 2}}_{a} \Pr\{A_j \mid A_i\} + \underbrace{\sum_{|S_i \cap S_j| = 3}}_{b} \Pr\{A_j \mid A_i\} + \underbrace{\sum_{|S_i \cap S_j| = 4}}_{\gamma} \Pr\{A_j \mid A_i\}$$

$$= \binom{5}{2}\binom{n-5}{3}p^9 + \binom{5}{3}\binom{n-5}{2}p^7 + \binom{5}{4}\binom{n-5}{1}p^4 \sim n^3 p^9 + n^2 p^7 + n p^4$$

Να βρεθεί η συνάρτηση κατωφλίου για την ύπαρξη K_5 σε $G_{n,p}$ random graphs

(II) ύπαρξη : αρκεί $\Delta^* << E(X)$

Ομως δείξαμε ότι $\Delta^* \sim n^3p^9 + n^2p^7 + np^4$ και $E(X) \sim n^5 \cdot p^{10}$

Αρκεί επομένως $\frac{\Delta^*}{E(X)} \to 0$ για $p >> n^{-1/2}$

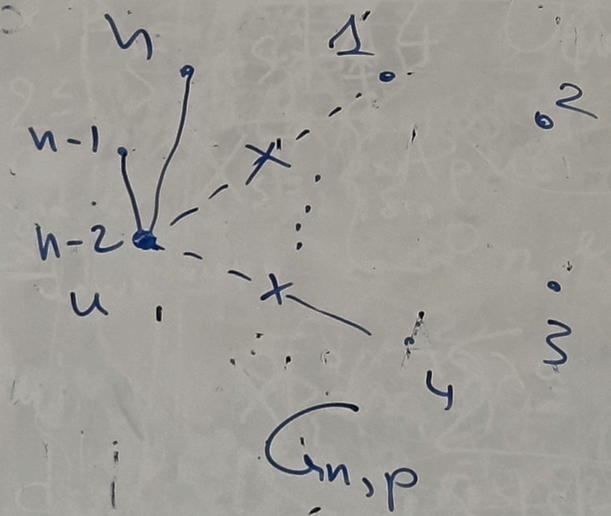
Για μεγαλύτερα p από $n^{-1/2}$ ισχύει κατά μήκος λόγο

Αλλα $\frac{\Delta^*}{E(X)} = \frac{n^3p^9 + n^2p^7 + np^4}{n^5p^{10}} = \frac{1}{n^2p} + \frac{1}{n^3p^3} + \frac{1}{n^4p^6}$

Οταν $p = n^{-1/2}$: $\frac{\Delta^*}{E(X)} \sim \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{n} \to 0$

Σε $G_{n,p}$ random graphs να βρεθεί α) το μέσο degree (των κορυφών και

β) ο μέσος αριθμός ακμών



Λύση: α) ο βαθμός είναι μια τυχαία μεταβλητή X

που ακολουθεί διωνυμική κατανομή $B(n-1, p)$

$$E(X) = (n-1)p$$

β) Έστω Y μια τ.μ. που μετράει τις ακμές

$$Y \sim B\left(\binom{n}{2}, p\right) \Rightarrow E(Y) = \binom{n}{2} p$$