

Έστω ότι δύο ομάδες A και B παίζουν μια σειρά από αγώνες η οποία τελειώνει όταν μια από τις δύο ομάδες έχει κερδίσει 2 αγώνες. Η πιθανότητα να νικήσει η ομάδα A έναν αγώνα ισούται με  $p$ , δεν υπάρχουν ισοπαλίες, ενώ το αποτέλεσμα κάθε αγώνα είναι ανεξάρτητο από τα αποτελέσματα των υπόλοιπων αγώνων. Να βρεθεί η μέση τιμή του πλήρους των αγώνων που παίζονται.

Έστω A συμβολίζουμε το ενδεχόμενο να κερδίσει η A  $\rightarrow$  π.θ. νίκης  $p$   
Ομοίως, B  $\rightarrow$  π.θ. νίκης  $q = 1 - p$

Ενδεχόμενα: AA, ABA, BAA, BB, BAB, ABB  
 $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 $p^2$   $p^2q$   $p^2q$   $q^2$   $pq^2$   $pq^2$

Έστω X c.p. που μετράει τον # αγώνων.

$$X = x, x = 2, 3 \Rightarrow \begin{aligned} P(X=2) &= p^2 + q^2 \\ P(X=3) &= 2p^2q + 2pq^2 \end{aligned}$$

$$EX = 2 \cdot (p^2 + q^2) + 3(2p^2q + 2pq^2) = 2p^2 + 2q^2 + 6pq(p + q) = -$$

$$\rightarrow EX = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot P(X=x)$$

(2.0) Η τυχαία μεταβλητή  $X$  έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf):

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να βρεθούν α) η σταθερά  $c$  β) η  $E(X^2)$  γ) η  $E[(X-1)^2]$  δ) η διασπορά της  $X$ .

$$α) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 cx^2 dx = 1 \Rightarrow c \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \left( \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = 1 \Rightarrow \frac{c}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{c=3}$$

$$β) E X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx = 3 \int_0^1 x^4 dx = 3 \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 3 \left( \frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E X^2 = \frac{3}{5}}$$

$$γ) E[(X-1)^2] = E[X^2 - 2X + 1] \Rightarrow \text{Γραμμικότητα}$$

$$\Rightarrow E[(X-1)^2] = E X^2 - 2 E X + 1 \quad (1)$$

$$E X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = 3 \int_0^1 x^3 dx = 3 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 =$$

$$= 3 \left( \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = \boxed{E X = \frac{3}{4}}$$

$$(1) \Rightarrow E[(X-1)^2] = \frac{3}{5} - 2 \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{5} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{6 - 15 + 10}{10} \Rightarrow$$

$$E[(X-1)^2] = \frac{1}{16}$$

$$\delta) \text{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$$

Το κουτί Α περιέχει 3 κόκκινες και 2 μπλε σφαίρες, ενώ το κουτί Β περιέχει 2 κόκκινες και 8 μπλε σφαίρες. Ρίχνουμε ένα τίμιο νόμισμα και αν έρθει αποτέλεσμα «Κεφαλή» βγάζουμε μια τυχαία σφαίρα από το πρώτο κουτί, αλλιώς βγάζουμε μια τυχαία σφαίρα από το δεύτερο κουτί.

α) Πόση είναι η πιθανότητα η μπάλα που βγάλαμε να είναι μπλε;

β) Αν η μπάλα που βγάλαμε είναι κόκκινη, πόση είναι η πιθανότητα να την βγάλαμε από το κουτί Α;

α) Έστω  $A$  το ενδεχόμενο να διαλέξω το κουτί Α. Άρα,  
 $\bar{A}$  " " " " Β.

$$P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$$

Έστω  $M$  το ενδεχόμενο να τραβήξω μπλε. Άρα,  
 $\bar{M}$  " " " " κόκκινη.

$$P(M) = ?$$

$$P(M|A) = \frac{2}{5} \quad P(M|\bar{A}) = \frac{8}{10}$$

Θ. Ολικός Π.θ ανόσωσης

$$A, \bar{A} \text{ διαμέριση} \Rightarrow P(M) = P(M|A) \cdot P(A) + P(M|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\beta) P(A|\bar{M}) = ?$$

$$\text{Θ. Bayes: } P(A|\bar{M}) = \frac{P(\bar{M}|A) \cdot P(A)}{P(\bar{M})} = \frac{(1 - P(M|A)) \cdot P(A)}{1 - P(M)}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{5}} \Rightarrow \boxed{P(A|\bar{M}) = \frac{3}{4}}$$

Η πιθανότητα να κερδίσει ένας παίκτης μία παρτίδα είναι 0.6. Αν παίξει 100 ανεξάρτητες παρτίδες, να βρεθεί α) ακριβώς και β) προσεγγιστικά, η πιθανότητα να κερδίσει το πολύ 70 και τουλάχιστον 55 παρτίδες.

Έστω  $X$  η συνολική αριθμός νικησιών που παίρνεται

$$X \sim \text{Διωνυμική} (n=100, p=0.6)$$

$$P(X=x) = \binom{100}{x} 0.6^x \cdot 0.4^{100-x}$$

$$\alpha) P(55 \leq X \leq 70) = \sum_{x=55}^{70} \binom{100}{x} 0.6^x \cdot 0.4^{100-x}$$

β) Προσέγγιση με κανονική

$$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0.6 = 60$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 24 \Rightarrow \sigma = \sqrt{24}$$

$$P(55 \leq X \leq 70) \stackrel{\text{Διόρθωση συνέχειας}}{\approx} P(55 - 0.5 \leq X \leq 70 + 0.5) = P(54.5 \leq X \leq 70.5) =$$

$$= P\left(\frac{54.5 - 60}{\sqrt{24}} \leq \frac{X - 60}{\sqrt{24}} \leq \frac{70.5 - 60}{\sqrt{24}}\right) =$$

$$= P(-1.123 < Z < 2.14) = P(Z < 2.14) - P(Z < -1.123) =$$

$$= \Phi(2.14) - \Phi(-1.123) =$$

$$= \Phi(2.14) - (1 - \Phi(1.123)) =$$

$$= \Phi(2.14) + \Phi(1.123) - 1$$

Η πιθανότητα μιας παρενέργειας σε ένα φάρμακο είναι 0,001. Να υπολογίσετε την πιθανότητα, μεταξύ 2.000 ασθενών που λαμβάνουν το φάρμακο, να εμφανίσουν την παρενέργεια περισσότεροι από 2 ασθενείς α) ακριβώς β) προσεγγιστικά.

$$p = 0.001$$

$$n = 2000$$

α) Έστω Χ.μ. μετράει τα άτομα που εμφανίζουν την παρενέργεια στα 2000

$$X \sim \text{Διωνυμική}(n=2000, p=0.001)$$

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^2 P(X=x) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) = \\ &= 1 - \left[ \binom{2000}{0} 0.001^0 \cdot 0.999^{2000} + \binom{2000}{1} 0.001^1 \cdot 0.999^{1999} + \binom{2000}{2} 0.001^2 \cdot 0.999^{1998} \right] \end{aligned}$$

β) Προσέγγιση με Poisson

$$\lambda = n \cdot p = 2000 \cdot 0.001 = 2$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^2 P(X=x) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) =$$

$$= 1 - \left( e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} + e^{-2} \cdot \frac{2^1}{1!} + e^{-2} \cdot \frac{2^2}{2!} \right) = 1 - e^{-2} (1 + 2 + 2) =$$

$$= 1 - e^{-2} \cdot 5$$

(1.5) Για την τυχαία μεταβλητή  $X$  η μέση τιμή είναι 3 και η δεύτερη ροπή περί την αρχή 13.  
Να βρεθεί φράγμα για την πιθανότητα  $\Pr\{-2 < X < 8\}$ .

$$EX = 3$$

$$\text{Chebyshev: } \Pr\{|X - EX| \geq t\} \leq \frac{\text{Var} X}{t^2}$$

$$M''(0) = 13 \Rightarrow EX^2 = 13$$

$$\text{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = 13 - 3^2 = 13 - 9 = 4$$

$$\Pr\{-2 < X < 8\} = \Pr\{-5 < X - 3 < 5\} = \Pr\{|X - 3| < 5\} = 1 - \Pr\{|X - 3| \geq 5\} \quad (1)$$

$$\Pr\{|X - EX| \geq t\} \leq \frac{\text{Var} X}{t^2} \Rightarrow \Pr\{|X - 3| \geq 5\} \leq \frac{4}{25} \Rightarrow$$

$$1 - \Pr\{|X - 3| \geq 5\} \geq 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \Rightarrow \boxed{\Pr\{-2 < X < 8\} \geq \frac{21}{25}}$$

## Άσκηση 7 - Εκθετική

Thursday, 7 December 2023 01:20

Ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται για να επισκευαστεί μία μηχανή είναι μια εκθετικά κατανομημένη τ.μ. με παράμετρο  $\lambda=0.5$ . Βρείτε:

(α) την πιθανότητα ο χρόνος επισκευής μιας μηχανής να ξεπεράσει τις 2 ώρες.

(β) την πιθανότητα ο χρόνος επισκευής μιας μηχανής να είναι το πολύ 10 ώρες, αν ξέρουμε ότι έχει ήδη ξεπεράσει 9 ώρες.

Έστω  $X$  τ.μ. που μετράει το χρόνο μέχρι την επισκευή της μηχανής

$$X \sim \text{Εκθετική}(\lambda=0.5)$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 0.5 e^{-0.5x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\alpha) P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-0.5 \cdot 2}) = e^{-1}$$

$$\beta) P(X < 10 | X > 9) = ?$$

Ελάχιστη μνήμη της εκθετικής: Αν  $a, b > 0$ :  $P(X > a + b | X > a) = P(X > b)$

$$\begin{matrix} b=9 \\ a=1 \end{matrix}$$

$$P(X < 10 | X > 9) = 1 - P(X \geq 10 | X > 9) =$$

$$= 1 - P(X \geq 9 + 1 | X > 9) = 1 - P(X \geq 1) = P(X < 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X < 10 | X > 9) = F(1) = 1 - e^{-0.5}}$$

Ρίχνουμε ένα ζάρι μέχρι το άθροισμα των αποτελεσμάτων που έχουν έρθει να ξεπεράσει το 300. Βρείτε την πιθανότητα να χρειαστούν τουλάχιστον 80 ρίψεις.

Έστω  $X_i$  το αποτέλεσμα της  $i$ -οστής ρίψης

$$\mu_i = \sum_{x=1}^6 x \cdot P(X_i = x) = \frac{1}{6} (1+2+3+4+5+6) \Rightarrow \boxed{\mu_i = 3.5}$$

$$E X_i^2 = \sum_{x=1}^6 x^2 P(X_i = x) = \frac{1}{6} (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6} \approx 15.1667$$

$$\text{Var } X_i = E X_i^2 - (E X_i)^2 \approx 1.7^2 \Rightarrow \boxed{\sigma_i = 1.7}$$

Έστω  $X$  ζ.μ. που είναι το άθροισμα των ρίψεων

$$X = \sum_{i=1}^Y X_i$$

Για να ξεπεράσουμε του 300:  $\boxed{50 < Y < 300} \quad (1)$

$$P(X > 300)$$

Επειδή οι  $X_1, \dots, X_Y$  έχουν ίδια μέση τιμή και κοινή απόκλιση, και για αρκούντως μεγάλο αριθμό ρίψεων  $Y$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

$$P(X > 300) = P\left(\frac{X - Y \cdot \mu_i}{\sigma_i \cdot \sqrt{Y}} > \frac{300 - Y \cdot \mu_i}{\sigma_i \cdot \sqrt{Y}}\right) =$$

$$= P\left(Z > \frac{300 - 3.5Y}{1.7\sqrt{Y}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{300 - 3.5Y}{1.7\sqrt{Y}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{300 - 3.5Y}{1.7\sqrt{Y}}\right)$$

Έστω  $Y$  ζ.μ. που μετράει τον # ρίψεων μέχρι να ξεπεράσουμε  
το 300

$$P(Y \geq 80) = 1 - P(Y < 80) = 1 - \sum_{y=51}^{79} P(Y = y) =$$

$$P(Y \geq 58) = 1 - \sum_{y=51}^{79} \left( 1 - \Phi \left( \frac{300 - 3.5y}{1.7\sqrt{y}} \right) \right)$$