

- Μέχρι στιγμής έχουμε χρησιμοποιήσει επιμήτρες συναρτήσεις για να εκτιμήσουμε μία άγνωστη τιμή για την παράμετρο που μελετάμε.
- Ωστόσο, είναι πιο χρήσιμη (και αξιόπιστη) η εύρεση ενός διαστήματος εμπρός για τη συγκεκριμένη παράμετρο. Το διάστημα αυτό καλείται διάστημα εμπιστοσύνης.
- Ορισμός: Έστω $X_1, \dots, X_n$ δείγμα μεγέθους n από μία κατανομή $F(x; \theta)$ με άγνωστη παράμετρο θ και έστω α μία (συνήθως) μικρή σταθερά, $0 < \alpha < 1$.
Έστω $L = T_1(X_1, \dots, X_n)$ και $U = T_2(X_1, \dots, X_n)$ επιμήτρες συναρτήσεις τέτοιες ώστε:

- $P(L \leq U) = 1$
- $P(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P\{L > \theta \text{ ή } U < \theta\} = \alpha$

Τότε το διάστημα $[L, U]$ είναι το $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη παράμετρο θ .

- Εξήγηση: Το $100(1-\alpha)\%$ των εμπρός για την άγνωστη παράμετρο θ βρίσκεται εντός του διαστήματος $[L, U]$
- Βασικές κατανομές για εύρεση διαστημάτων εμπιστοσύνης

Κατανομές	Χρήσιμες ιδιότητες
χ^2 : Αν $\chi = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$, τότε $\chi \sim \chi_n^2$	—
Student (t): $T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$	$-t_{\alpha, n} = t_{1-\alpha, n}$
Γάμμα (Γ): $f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ 0 \end{cases}$	—
Fischer (F): $F_{n,m} = \frac{\chi_n^2/n}{\chi_m^2/m}$	$\frac{1}{F_{\alpha, n, m}} = F_{1-\alpha, m, n}$

Περίληψη

Έστω $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$. Τότε $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ και $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$

	Υπόθεση	Άγνωστο Παράμετρο	Χρήσιμη Κατανομή	Διάστημα ΔΕ	Μονόπλευρο Κάτω ΔΕ	Μονόπλευρο Άνω ΔΕ
Ένας μέσος	Γνωστή σ^2	μ	Κανονική	$\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$(-\infty, \bar{X} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$(\bar{X} - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty)$
	Άγνωστη σ^2	μ	Student t	$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$(-\infty, \bar{X} + t_{\alpha, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}})$	$(\bar{X} - t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, +\infty)$
	Άγνωστος μ	σ^2	χ^2	$(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2})$	$(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha, n-1}^2})$	$(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha, n-1}^2}, +\infty)$
Δύο μέσοι	Γνωστές σ_x^2, σ_y^2	$\mu_x - \mu_y$	Κανονική	$\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$	$(-\infty, \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}})$	$(\bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}, +\infty)$
	Άγνωστες σ_x^2, σ_y^2 αλλά $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$	$\mu_x - \mu_y$	Student	$\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n+m-2}^* \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$	$(-\infty, \bar{X} - \bar{Y} + t_{\alpha, n+m-2}^* \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}})$	$(\bar{X} - \bar{Y} - t_{\alpha, n+m-2}^* \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}, +\infty)$

$$* s_p = \sqrt{\frac{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}{n+m-2}}$$

Άσκηση 1

Tuesday, January 7, 2025 4:27 PM

Για τη μελέτη του χρόνου ζωής μιας συσκευής που παράγεται σε ένα εργοστάσιο, λήφθηκε το παρακάτω δείγμα (σε ώρες):

167, 184, 165, 174, 167, 180, 168, 173, 162

Αν ο χρόνος ζωής της συσκευής ακολουθεί κανονική κατανομή με διασπορά 219.04, να βρεθεί το 95% διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής του χρόνου ζωής των συσκευών που παράγει το εργοστάσιο.

Δίνονται $Z_{0.025}=1.96$, $Z_{0.05}=1.64$, $Z_{0.1}=1.28$.

$$\sigma^2 = 219.04$$

$$(1-\alpha) \cdot 100\% = 95\% \Rightarrow \alpha = 0.05$$

Γνωσεν διασπορα και ψάχνουμε ΔΕ για τη μέση τιμή του χρόνου ζωής.

$$\text{Άρα } \Delta E = \bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{167+184+165+174+167+180+168+173+162}{9} \Rightarrow \bar{X} \approx 171.11$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.05}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{\sqrt{219.04}}{\sqrt{9}} = 1.96 \cdot \frac{14.8}{3} \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 9.64$$

$$\Delta E = [171.11 - 9.64, 171.11 + 9.64] \Rightarrow \Delta E \approx [161.44, 180.78]$$

Άσκηση 2

Tuesday, January 7, 2025 4:27 PM

Σε μελέτη που έγινε για την περιεκτικότητα του γάλακτος αγελάδος σε μια ουσία, λήφθηκε δείγμα γάλακτος από 20 διαφορετικές αγελάδες. Η ποσότητα (σε ppm) που βρέθηκε για κάθε μια από τις αγελάδες είναι:

16, 0, 0, 2, 3, 6, 8, 2, 5, 0, 12, 10, 5, 7, 2, 3, 8, 17, 9, 1

Να βρεθεί 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση περιεκτικότητα στην ουσία αυτή.

$$(1-\alpha) \cdot 100\% = 95\% \Rightarrow \boxed{\alpha = 0.05}$$

$$n = 20$$

Αγνωστη διασπορά και ψάχνουμε ΔΕ για τη μέση περιεκτικότητα

$$\Delta E = \bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} = \frac{16 + 0 + 0 + 2 + 3 + 6 + 8 + 2 + 5 + 0 + 12 + 10 + 5 + 7 + 2 + 3 + 8 + 17 + 9 + 1}{20} \approx 5.8$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - n \bar{x}^2 \right)$$

16	0	0	2	3	6	8	2	5	0	12	10	5	7	2	3	8	17	9	1
256	0	0	4	9	36	64	4	25	0	144	100	25	49	4	9	64	289	81	1

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 1164$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} (1164 - 20 \cdot 5.8^2) \Rightarrow s^2 = 25.9 \Rightarrow \boxed{s \approx 5.085}$$

$$\Delta E = \left[5.8 - t_{\frac{0.05}{2}, 20} \cdot \frac{5.085}{\sqrt{20}}, 5.8 + t_{\frac{0.05}{2}, 20} \cdot \frac{5.085}{\sqrt{20}} \right] =$$

$$= \left[5.8 - t_{0.025, 20} \cdot \frac{5.085}{\sqrt{20}}, 5.8 + t_{0.025, 20} \cdot \frac{5.085}{\sqrt{20}} \right] =$$

$$= \left[5.8 - 2.093 \cdot \frac{5.085}{\sqrt{20}}, 5.8 + 2.093 \cdot \frac{5.085}{\sqrt{20}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E \approx [3.42, 8.18]}$$

Άσκηση 3

Tuesday, January 7, 2025 4:27 PM

Από μελέτες έχει παρατηρηθεί ότι το βάρος του σολομού που μεγαλώνει σε ένα ιχθυοτροφείο ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή που ποικίλλει από χρονιά σε χρονιά με σταθερή όμως τυπική απόκλιση στα 0.3 κιλά. Αν θέλουμε να είμαστε 90% σίγουροι ότι η προσέγγισή του μέσου βάρους του σολομού είναι σωστή με σφάλμα το πολύ ± 0.1 κιλά, πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το δείγμα που θα πάρουμε για να κάνουμε την προσέγγιση αυτή μέσω διαστήματος εμπιστοσύνης;

$$\sigma = 0.3$$

$$(1-\alpha)100\% = 90\% \Rightarrow \boxed{a = 0.1}$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \bar{X} - z_{\frac{a}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ U &= \bar{X} + z_{\frac{a}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow U - L = \cancel{\bar{X}} + z_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \cancel{\bar{X}} + z_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \boxed{U - L = 2 \cdot z_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$U - L = 0.1 - (-0.1) = 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot z_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \Rightarrow \boxed{z_{\frac{a}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.1} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow 1.64 \cdot \frac{0.3}{\sqrt{n}} \leq 0.1 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 1.64 \cdot \frac{0.3}{0.1} = 4.92 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq 24.2} \quad \left\{ \begin{aligned} n \in \mathbb{N} \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Άρα το μικρότερο μέγεθος δείγματος για να είμαστε 90% σίγουροι για τη μέση νεμεκτικότητα είναι 25.

Άσκηση 4

Tuesday, January 7, 2025 4:27 PM

Τα παρακάτω δεδομένα παριστάνουν τις βαθμολογίες 9 μαθητών Λυκείου σε ένα test μαθηματικών:

3, 8, 4, 11, 8, 6, 9, 10, 5

Επίσης, στο ίδιο test τα αποτελέσματα 6 μαθητριών ήταν

16, 13, 20, 16, 15, 13

Να βρεθεί διάστημα εμπιστοσύνης 95% για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$ του μέσου βαθμού στους πληθυσμούς μαθητών και μαθητριών, θεωρώντας ότι η διασπορά είναι κοινή και ότι οι βαθμοί και στις δύο περιπτώσεις προέρχονται από κανονική κατανομή (αν και στην πραγματικότητα παίρνουν διακριτές τιμές)

$$(1-\alpha) \cdot 100\% = 95\% \Rightarrow \boxed{\alpha = 0.05}$$

Άγνωστες διασπορές αλλά ίσες

$$\text{Άρα } \Delta E = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n+m-2} \cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

$$\bar{x} = \frac{3+8+4+11+8+6+9+10+5}{9} \Rightarrow \boxed{\bar{x} \approx 7.11}$$

$$\bar{y} = \frac{16+13+20+16+15+13}{6} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = 15.5}$$

$$s_x^2 = 7.61$$

$$s_y^2 = 6.7$$

$$s_p^2 = \frac{(n-1) \cdot s_x^2 + (m-1) \cdot s_y^2}{n+m-2} = \frac{(9-1) \cdot 7.61^2 + (6-1) \cdot 6.7^2}{9+6-2} \approx 7.26 \Rightarrow$$

$$s_p = \sqrt{7.26} \Rightarrow \boxed{s_p \approx 2.7}$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}, n+m-2} \cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = t_{0.025, 13} \cdot 2.7 \cdot \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{6}} \approx 3.04$$

$$\Delta E = [7.11 - 15.5 - 3.04, 7.11 - 15.5 + 3.04] \Rightarrow \boxed{\Delta E = [-11.43, -5.32]}$$

Άσκηση 5

Thursday, January 8, 2026

4:17 PM

Λαμβάνονται ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από την παραγωγή δύο μηχανών σε μια γραμμή παραγωγής. Το βάρος κάθε στοιχείου είναι υπό εξέταση. Από το πρώτο μηχάνημα λαμβάνεται δείγμα μεγέθους 36, με μέσο βάρος δείγματος 120 γραμμάρια και απόκλιση δείγματος 4. Από το δεύτερο μηχάνημα λαμβάνεται δείγμα μεγέθους 64, με μέσο βάρος δείγματος 130 γραμμάρια και διακύμανση δείγματος 5. Θεωρείται ότι τα βάρη των ειδών από την πρώτη μηχανή κατανέμονται κανονικά με μέση τιμή μ_1 και ότι τα βάρη από τη δεύτερη μηχανή κατανέμονται κανονικά με μέση τιμή μ_2 . Να βρείτε ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά μέσω των πληθυσμών, $\mu_1 - \mu_2$:

α) αν οι διακυμάνσεις πληθυσμού είναι άγνωστες αλλά ίσες.

β) αν οι διακυμάνσεις πληθυσμού είναι 4 και 5 αντίστοιχα.

$$99\% = (1-\alpha)100\% \Rightarrow \boxed{\alpha = 0.01}$$

$$n = 36$$

$$\bar{x} = 120$$

$$s_x^2 = 4$$

$$m = 64$$

$$\bar{y} = 130$$

$$s_y^2 = 5$$

α) Άγνωστες, αλλά ίσες, διασπορές σ^2 μ_1 και μ_2 και ψάχνουμε ΔΕ για τη διαφορά των μέσων

$$\Delta E = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n+m-2} \cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

$$s_p^2 = \frac{(n-1) \cdot s_x^2 + (m-1) \cdot s_y^2}{n+m-2} = \frac{(36-1) \cdot 4 + (64-1) \cdot 5}{36+64-2} \approx 8.93 \Rightarrow \boxed{s_p \approx 2.99}$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}, n+m-2} \cdot s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = t_{0.005, 98} \cdot 2.99 \cdot \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{64}} = 2.63 \cdot 2.99 \cdot 0.21 \approx 1.64$$

$$\Delta E = [120 - 130 - 1.64, 120 - 130 + 1.64] \approx [-11.64, -8.36]$$

$$\text{β) } \sigma_x^2 = 4$$

$$\sigma_y^2 = 5$$

Γνωστές διασπορές σ^2 μ_1 και μ_2 και ψάχνουμε ΔΕ για τη

Τιμές διασπορές ορθογωνίου και γράνουμε ΔΕ για τη
αφορά των μέσων, άρα:

$$\Delta E = \bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} = z_{0.005} \cdot \sqrt{\frac{16}{36} + \frac{25}{64}} = 2.56 \cdot 0.435 \approx 1.11$$

$$\Delta E = [120 - 130 - 1.11, 120 - 130 + 1.11] \Rightarrow \Delta E = [-11.11, -8.89]$$