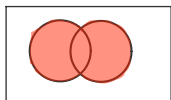


Βασικοί Ορισμοί

- Πείραμα τύχης: Οι γνωστές ή των προσέγγων αποτελέσματα
- Δειγματοχώρος: Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων. Το συμβολίζουμε με Ω
- Απλό γεγονός (sample point): Ένα στοιχείο του δειγματοχώρου
- Γεγονός:
 - Σύνολο απλών γεγονόσεων
 - Υποσύνολο του δειγματοχώρου
- Πραγματοποίηση γεγονότος: Το πείραμα οδηγεί σε αποτέλεσμα (απλό γεγονός) που περιέχεται στο γεγονός

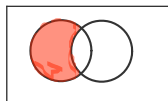
Γεγονότα $\leftrightarrow$ Σύνολα, άρα έχουμε πράξεις με σύνολα

- $A \cup B$: $\rightarrow$ Ένωση

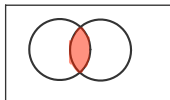


$\rightarrow$ Διαφορά

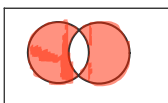
- $A - B = A \cap \bar{B} = A \bar{B}$: Να συμβεί το A και να μην συμβεί το B



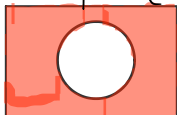
- $A \cap B$: $\rightarrow$ Τομή



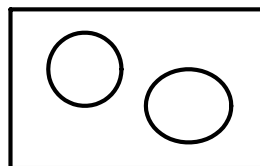
- $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = A \bar{B} \cup \bar{A} B$: Να συμβεί μόνο το A ή μόνο το B



- $\bar{A}$: $\rightarrow$ Συμπληρωμα

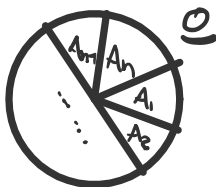


- A και B ασυμβίβαστα ή ξένα $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$



- $A_1, A_2, \dots, A_n$ Διαμέριση του $\Omega \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \neq j & A_i \cap A_j = \emptyset \\ \bigcup_i A_i = \Omega \end{cases}$$



- Νόμος του De Morgan

- Για δύο συνόλα A_1 και A_2 :

$$\overline{A_1 A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$$

Για η σύνολα:

$$\overline{A_1 A_2 \dots A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

$$\overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}} = \overline{\overline{A_1}} \cap \overline{\overline{A_2}} \cap \dots \cap \overline{\overline{A_n}} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

• Ορισμοί πιθανοτήτων:

• Κλασσική πιθανότητα (De Moivre, Laplace)

Αν A ένα γεγονός, τότε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{\#πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το } A}{\text{\#πλήθος όλων των αποτελεσμάτων}}$$

$N(A) = |A|$ ο πληθυσμιακός αριθμός του A
 $\rightarrow$ ο αριθμός των στοιχείων που περιέχει το A

Προϋποθέσεις:

- Πειραγμένο πλήθος σημείων δειγματοχώρου
- Ισοαίθια δυνατόα αποτελέσματα

• Οριο σχετικής πιθανότητας:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(A)}{N}$$

- Σύγκλιση σε μια τιμή ύστερα από πολλές επαναλήψεις
- Εμπειρικός (στατιστικός) τρόπος υπολογισμού πιθανοτήτων

• Αξιοματική Θεωρία (Kolmogorov)

Πιθανότητα είναι μία συνολοσυνάρτηση από υποσύνολα του Ω σε πραγματικούς αριθμούς

• Αξιώματα πιθανοτήτων

• Αξίωμα 1: $P(A) \geq 0$

• Αξίωμα 2: $P(\Omega) = 1$

• Αξίωμα 3: Αν $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

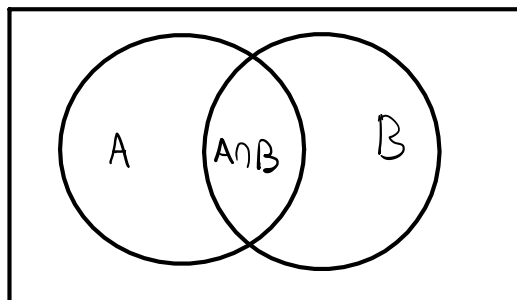
Ιδιότητες

• Ιδιότητα 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

• Θώμενα 2: $P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$

• Θώμενα 3:

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$$



• Θώμενα 4 (Αξιοέμενα του Boole): $P\{\cup_i A_i\} \leq \sum P(A_i)$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$\downarrow$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \rightarrow \text{Ισχύει αν } A \cap B = \emptyset$$

Θεωρία - Παράδειγμα

Monday, October 7, 2024 1:44 PM

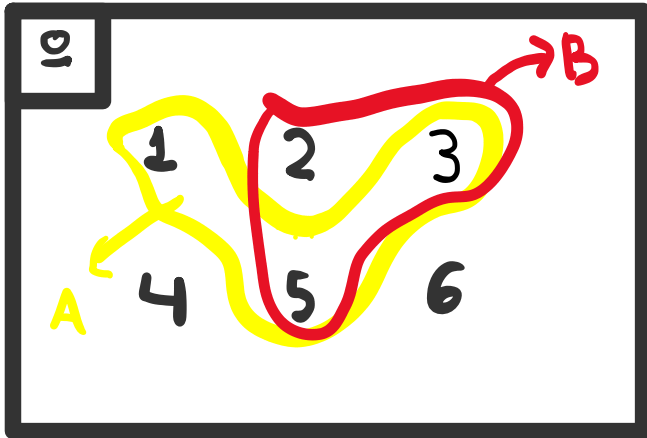
Ρίχνω ένα δίκαιο ζάρι.

Ο δειγματοχώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{\text{"το αποτέλεσμα είναι περιττός αριθμός"}\}$

$B = \{\text{"το αποτέλεσμα είναι πρώτος αριθμός"}\}$

- 1) Ποια στοιχεία περιέχει το σύνολο A
- 2) Ποια στοιχεία περιέχει το σύνολο B
- 3) Ποια στοιχεία περιέχει το σύνολο "να συμβούν και τα δύο"
- 4) Ποια στοιχεία περιέχει το σύνολο "να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα δύο"
- 5) Ποια η πιθανότητα του (3)
- 6) Ποια η πιθανότητα του (4)



$$1) A = \{1, 3, 5\}$$

$$2) B = \{2, 3, 5\}$$

$$3) \{3, 5\} = A \cap B$$

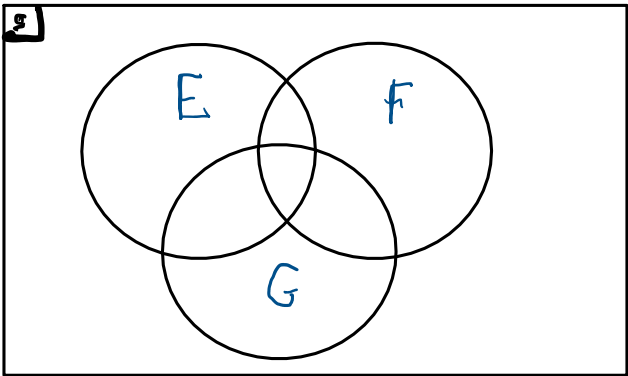
$$4) A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$5) P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$6) P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Έχω τα σύνολα E, F, G. Ποια η έκφραση για κάθε ένα από τα παραπάνω γεγονότα;

α	Να συμβεί μόνο το E:	$E\bar{F}\bar{G}$
β	Να συμβεί και το E και το F, χωρίς όμως το G:	$E\bar{G}$
γ	Να συμβούν τουλάχιστον 2:	$E\bar{F}\bar{G} \cup E\bar{F}G \cup E\bar{F}\bar{G} \cup E\bar{F}G \cup E\bar{F}G \cup E\bar{F}G \cup E\bar{F}G \cup E\bar{F}G$
δ	Να συμβούν και τα 3:	EFG
ε	Να μη συμβεί κανένα:	$\bar{E}\bar{F}\bar{G}$
στ	Να συμβεί τουλάχιστον ένα:	$E \cup F \cup G$
ζ	Να συμβεί το πολύ 1:	$\bar{E}\bar{F}\bar{G} \cup E\bar{F}\bar{G} \cup E\bar{F}G \cup E\bar{F}\bar{G}$
η	Να συμβούν το πολύ 2:	$\bar{E}\bar{F}\bar{G} \cup E\bar{F}\bar{G} \cup E\bar{F}G \cup E\bar{F}\bar{G}$
θ	Να συμβούν ακριβώς 2:	$E\bar{F}\bar{G} \cup E\bar{F}G \cup E\bar{F}\bar{G}$
ι	Να συμβούν το πολύ 3:	$\bar{E}\bar{F}\bar{G}$



Έστω ότι ρίχνω 2 όμοια ζάρια και έστω τα γεγονότα:

- E: το άθροισμα να είναι περιττός αριθμός
- F: τουλάχιστον ένα ζάρι να φέρει '1'
- G: το άθροισμα να είναι 5

Δώστε τα δυνατά (ευνοϊκά) αποτελέσματα των παρακάτω γεγονότων:

$$α) E \cap F = \{ (1,2), (2,1), (4,1), (1,6) \}$$

$$β) F \cup F = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (3,1), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,5), (1,3), (1,5), (1,6), (2,6), (3,5) \}$$

$$γ) F \cap G = \{ (1,4) \}$$

$$δ) E \cap F \cap G = \{ (1,4) \}$$

$$στ) F \cap \bar{G} = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (1,5), (1,6) \}$$

Έστω οι λέξεις RESERVE και VERTICAL. Επιλέγω τυχαία ένα γράμμα από κάθε λέξη. Ποια η πιθανότητα να επιλέξω το ίδιο γράμμα;

$$|Q| = 7 \cdot 8 = 56$$

Ευνοϊκές περιπτώσεις:

- Διαλέγω E και από τις δύο λέξεις. $|E| = 3 \cdot 1 = 3$
- „ R „ „ „ „ $|R| = 2 \cdot 1 = 2$
- „ V „ „ „ „ $|V| = 1 \cdot 1 = 1$

$$|EURUV| = 3 + 2 + 1 = 6$$

$$P(EURUV) = \frac{|EURUV|}{|Q|} = \frac{6}{56}$$

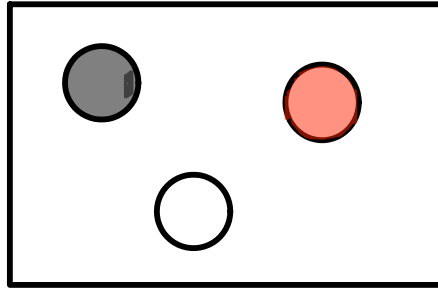
$$P(E \cup V \cup R) = P(E) + P(V) + P(R)$$

$$\text{γιατί } E \cap V = \emptyset \text{ και } E \cap R = \emptyset \\ \text{και } V \cap R = \emptyset$$

Έστω ένα κουτί με 3 μπάλες, μία κόκκινη, μία άσπρη και μία μαύρη. Τραβάω μία μπάλα, τη βλέπω, επανατοποθετώ και ξανατραβάω.

a. Ποια η πιθανότητα να τραβήξω το ίδιο χρώμα και τις δύο φορές;

b. Ποια η πιθανότητα να τραβήξω μαύρη σε οποιαδήποτε από τις 2 φορές



M: μαύρη

K: κόκκινη

A: άσπρη

$$\Omega = \{(MM), (MK), (MA), (KM), (KA), (AM), (AK), (AA)\} \Rightarrow |\Omega| = 9$$

a) A: τραβάω το ίδιο χρώμα

$$A = \{(MM), (KK), (AA)\} \Rightarrow |A| = 3$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

b) B: τραβάω μαύρη οποιαδήποτε από τις δύο φορές

$$B = \{(MM), (MA), (MK), (AM), (KM)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B| = 5 \Rightarrow P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5}{9}$$

Άσκηση 5

Monday, October 7, 2024 3:00 PM

Έστω 2 γεγονότα E και F με:

- $P(E) = 0.9$
- $P(F) = 0.8$

Να δείξετε ότι: $P(EF) \geq 0.7$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

$$0 \leq P(E \cup F) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P(E) + P(F) - P(EF) \leq 1 \Rightarrow$$

$$P(E) + P(F) - P(EF) \leq 1 \Rightarrow 0.9 + 0.8 - P(EF) \leq 1 \Rightarrow$$

$$1.7 - P(EF) \leq 1 \Rightarrow 1.7 - 1 \leq P(EF) \Rightarrow \boxed{P(EF) \geq 0.7}$$

Έστω:

- A: "Η θερμοκρασία στην Πάτρα 25C"
- B: "Η θερμοκρασία στην Θεσσαλονίκη είναι 25C"
- C: "Η μεγαλύτερη θερμοκρασία μεταξύ των δύο πόλεων είναι 25C"

Αν $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ και $P(C) = 0.2$, να βρεθεί η πιθανότητα η μικρότερη θερμοκρασία μεταξύ των πόλεων να είναι 25C.

Έστω t_1, t_2 οι θερμοκρασίες της Πάτρας & Θεσσαλονίκης αντίστοιχα

$$A: t_1 = 25 \text{ και } t_2 \in \mathbb{R}$$

$$B: t_2 = 25 \text{ και } t_1 \in \mathbb{R}$$

$$C: \max(t_1, t_2) = 25 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 25 \text{ και } t_2 \leq 25 \\ t_2 = 25 \text{ και } t_1 \leq 25 \end{cases}$$

Έστω D: η μικρότερη θερμοκρασία μεταξύ των πόλεων είναι 25C

$$D: \min(t_1, t_2) = 25 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 25 \text{ και } t_2 \geq 25 \\ t_2 = 25 \text{ και } t_1 \geq 25 \end{cases}$$

$$AB: t_1 = 25 \text{ και } t_2 = 25 \quad \Rightarrow \boxed{AB = CD} \quad (1)$$

$$CD: t_1 = 25 \text{ και } t_2 = 25$$

$$A \cup B: t_1 = 25 \text{ ή/και } t_2 = 25 \quad \Rightarrow \boxed{A \cup B = C \cup D} \quad (2)$$

$$C \cup D: t_1 = 25 \text{ ή/και } t_2 = 25$$

$$(2) \Rightarrow P(A \cup B) = P(C \cup D) \Rightarrow P(A) + P(B) - \cancel{P(AB)} = P(C) + P(D) - \cancel{P(CD)} \quad (2)$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) = P(C) + P(D) \Rightarrow P(D) = P(A) + P(B) - P(C) = 0.3 + 0.4 - 0.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(D) = 0.5}$$