"Πιθανότητες και Αρχές Στατιστικής" (7η Διάλεξη)

Σωτήρης Νικολετσέας, καθηγητής

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής,
Πανεπιστήμιο Πατρών

Περιεχόμενα 7ης Διάλεξης

1. Ομοιόμορφη Κατανομή (συνεχής)
2. Εκθετική Κατανομή (συνεχής)
3. Η ανέλιξη Poisson (διακριτή)
4. Κανονική Κατανομή (συνεχής)
5. Προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική
6. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα
7. Παραδείγματα

1 Ομοιόμορφη Κατανομή (συνεχής)

2 Εκθετική Κατανομή (συνεχής)

3 Η ανέλιξη Poisson (διακριτή)

4 Κανονική Κατανομή (συνεχής)

5 Προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική

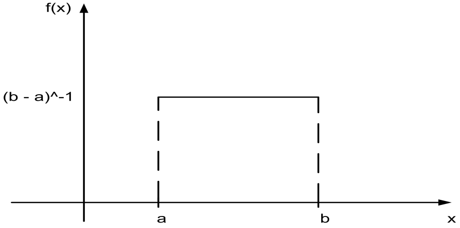
6 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

7 Παραδείγματα

1. Ομοιόμορφη Κατανομή

Γένεση: τυχαία επιλογή σε ένα διάστημα (χρονικό, χωρικό)

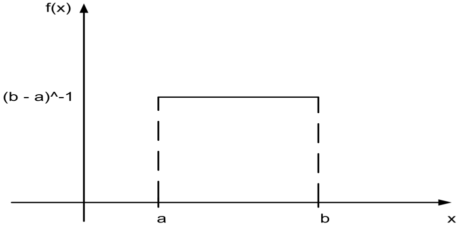
pdf: $X \sim U(a, b)$



1. Ομοιόμορφη Κατανομή

Γένεση: τυχαία επιλογή σε ένα διάστημα (χρονικό, χωρικό)

pdf: $X \sim U(a, b)$

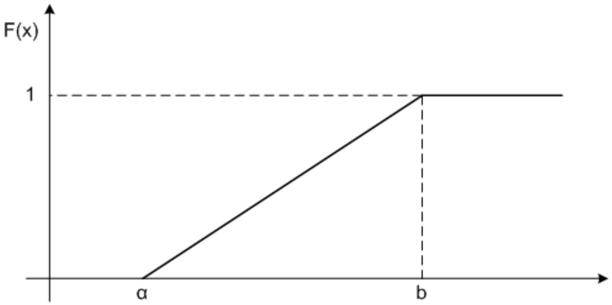


δηλαδή $$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Για $a \leq x \leq b$ είναι:

$$F(x) = \int_a^x f(u)du = \int_a^x \frac{1}{b-a}du = \frac{u}{b-a}\Bigg|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

ενώ προφανώς $x \leq a \Rightarrow F(x) = 0$ και $x \geq b \Rightarrow F(x) = 1$:



1. Ομοιόμορφη Κατανομή

μέση τιμή: $\mu = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} \cdot dx = \left[\frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{\alpha + \beta}{2}$

διασπορά: $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

1 Ομοιόμορφη Κατανομή (συνεχής)

2 Εκθετική Κατανομή (συνεχής)

3 Η ανέλιξη Poisson (διακριτή)

4 Κανονική Κατανομή (συνεχής)

5 Προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική

6 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

7 Παραδείγματα

2. Εκθετική Κατανομή

pdf:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{όπου } \lambda > 0 \text{ παράμετρος}$$

2. Εκθετική Κατανομή

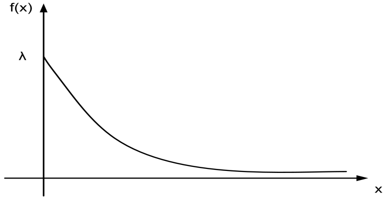
pdf:

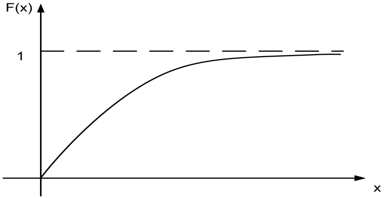
$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{όπου } \lambda > 0 \text{ παράμετρος}$$

συνάρτηση κατανομής:

$$F(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt = \lambda \cdot \int_0^x e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt = \left[\lambda \cdot \frac{1}{-\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot t}\right]_0^x =$$

$$\left[-e^{-\lambda \cdot t}\right]_0^x = \left(-e^{-\lambda \cdot x} - (-1)\right) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}, x \geq 0 \text{ (αλλιώς F(x) = 0)}$$





2. Εκθετική Κατανομή

Στην πράξη, εκθετική κατανομή ακολουθεί ο χρόνος αναμονής (από το παρόν) μέχρι να πραγματοποιηθεί ένα σχετικά σπάνιο γεγονός π.χ.

– ο χρόνος μέχρι να συμβεί ένας σεισμός
– ο χρόνος μέχρι τον επόμενο πόλεμο
– ο χρόνος μέχρι το επόμενο τηλεφώνημα σε λάθος αποδέκτη
– ο χρόνος μέχρι να χαλάσει μια ηλεκτρική συσκευή.

<u>μέση τιμή:</u> $\dfrac{1}{\lambda}$

<u>διασπορά:</u> $\dfrac{1}{\lambda^2}$

2. Εκθετική Κατανομή - Έλλειψη μνήμης εκθετικής κατανομής

Θεώρημα: $Pr\{X > \alpha + \beta \mid X > \beta\} = Pr\{X > \alpha\}, \quad \alpha, \beta > 0$

Απόδειξη: $Pr\{X > \alpha + \beta \mid X > \beta\} = \dfrac{Pr\{X > \alpha + \beta\}}{Pr\{X > \beta\}}$

$$= \frac{1 - Pr\{X \leq \alpha + \beta\}}{1 - Pr\{X \leq \beta\}} = \frac{1 - F(\alpha+\beta)}{1 - F(\beta)} =$$

$$\frac{1 - \left(1 - e^{-\lambda(\alpha+\beta)}\right)}{1 - (1 - e^{-\lambda\cdot\beta})} = \frac{e^{-\lambda(\alpha+\beta)}}{e^{-\lambda\cdot\beta}} = e^{-\lambda\cdot\alpha} =$$

$$1 - \left(1 - e^{-\lambda\cdot\alpha}\right) = 1 - F(\alpha) = Pr\{X > \alpha\} \qquad \square$$

π.χ. αν X η διάρκεια ζωής μιας συσκευής, η πιθανότητα να είναι επιπλέον α ενώ είναι ήδη β, είναι όσο θα ήταν η πιθανότητα για διάρκεια α στην "αρχή" (δηλαδή η συσκευή "ξεχνάει" την αρχική ζωή της διάρκειας β)!

1 Ομοιόμορφη Κατανομή (συνεχής)

2 Εκθετική Κατανομή (συνεχής)

3 Η ανέλιξη Poisson (διακριτή)

4 Κανονική Κατανομή (συνεχής)

5 Προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική

6 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

7 Παραδείγματα

3. Η ανέλιξη Poisson

Έστω ότι η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένα γεγονός στο χρόνο ικανοποιεί 3 προϋποθέσεις:

3. Η ανέλιξη Poisson

Έστω ότι η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένα γεγονός στο χρόνο ικανοποιεί 3 προϋποθέσεις:

- η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς 1 γεγονός στο διάστημα $(t, t+\delta)$ είναι ανάλογη του δ, δηλαδή $Pr\left\{1 \text{ γεγονός στο } (t, t+\delta)\right\} = \nu \cdot \delta + o(\delta)$ δηλαδή ν είναι ο “ρυθμός” των γεγονότων

3. Η ανέλιξη Poisson

Έστω ότι η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένα γεγονός στο χρόνο ικανοποιεί 3 προϋποθέσεις:

- η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς 1 γεγονός στο διάστημα $(t, t+\delta)$ είναι ανάλογη του δ, δηλαδή $Pr\{1 \text{ γεγονός στο } (t, t+\delta)\} = \nu \cdot \delta + o(\delta)$ δηλαδή ν είναι ο "ρυθμός" των γεγονότων
- η πιθανότητα ≥ 2 γεγονότα σε ένα μικρό διάστημα δ είναι αμελητέα δηλαδή $Pr\{\geq 2 \text{ γεγονότα στο } (t, t+\delta)\} = o(\delta)$

3. Η ανέλιξη Poisson

Έστω ότι η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένα γεγονός στο χρόνο ικανοποιεί 3 προϋποθέσεις:

- η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς 1 γεγονός στο διάστημα $(t, t+\delta)$ είναι ανάλογη του δ, δηλαδή $Pr\{1 \text{ γεγονός στο } (t, t+\delta)\} = \nu \cdot \delta + o(\delta)$ δηλαδή ν είναι ο "ρυθμός" των γεγονότων
- η πιθανότητα ≥ 2 γεγονότα σε ένα μικρό διάστημα δ είναι αμελητέα δηλαδή $Pr\{\geq 2 \text{ γεγονότα στο } (t, t+\delta)\} = o(\delta)$
- οι αριθμοί των γεγονότων σε ξένα μεταξύ τους διαστήματα είναι στοχαστικά ανεξάρτητοι.

($o(\delta)$ σημαίνει πολύ μικρότερο του δ)

3. Θεώρημα για ανέλιξη Poisson

Θεώρημα

Έστω $X(t)$: # γεγονότων στο (0, t)

$$\Rightarrow Pr\left\{X(t) = x\right\} = e^{-\nu \cdot t} \cdot \frac{(\nu \cdot t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots$$

Απόδειξη: Χωρίζουμε το (0, t) σε μεγάλο αριθμό n ίσων διαστημάτων (κάθε διάστημα έχει μέγεθος $\delta = \frac{t}{n}$). Λόγω των 3 πρϋποθέσεων:

3. Θεώρημα για ανέλιξη Poisson

Θεώρημα

Έστω $X(t)$: # γεγονότων στο (0, t)

$$\Rightarrow Pr\left\{X(t)=x\right\} = e^{-\nu \cdot t} \cdot \frac{(\nu \cdot t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots$$

<u>Απόδειξη</u>: Χωρίζουμε το (0, t) σε μεγάλο αριθμό n ίσων διαστημάτων (κάθε διάστημα έχει μέγεθος $\delta = \frac{t}{n}$). Λόγω των 3 πρϋποθέσεων:

3. Θεώρημα για ανέλιξη Poisson

Θεώρημα

Έστω $X(t)$: # γεγονότων στο (0, t)

$$\Rightarrow Pr\left\{X(t) = x\right\} = e^{-\nu \cdot t} \cdot \frac{(\nu \cdot t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots$$

<u>Απόδειξη</u>: Χωρίζουμε το (0, t) σε μεγάλο αριθμό n ίσων διαστημάτων (κάθε διάστημα έχει μέγεθος $\delta = \frac{t}{n}$). Λόγω των 3 πρϋοποθέσεων:

$$Pr\left\{1 \text{ γεγονός σε ένα διάστημα}\right\} \sim \nu \cdot \frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \simeq \nu \cdot \frac{t}{n}$$

3. Θεώρημα για ανέλιξη Poisson

Θεώρημα

Έστω $X(t)$: # γεγονότων στο (0, t)

$$\Rightarrow Pr\{X(t) = x\} = e^{-\nu \cdot t} \cdot \frac{(\nu \cdot t)^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \cdots$$

<u>Απόδειξη</u>: Χωρίζουμε το (0, t) σε μεγάλο αριθμό n ίσων διαστημάτων (κάθε διάστημα έχει μέγεθος $\delta = \frac{t}{n}$). Λόγω των 3 πρϋποθέσεων:

$$Pr\{1 \text{ γεγονός σε ένα διάστημα}\} \sim \nu \cdot \frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \simeq \nu \cdot \frac{t}{n}$$

$$Pr\{\geq 2 \text{ γεγονότα}\} \sim o\left(\frac{t}{n}\right) \to 0$$

3. Θεώρημα για ανέλιξη Poisson

Θεώρημα

Έστω $X(t)$: # γεγονότων στο (0, t)

$$\Rightarrow Pr\{X(t) = x\} = e^{-\nu \cdot t} \cdot \frac{(\nu \cdot t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots$$

<u>Απόδειξη</u>: Χωρίζουμε το (0, t) σε μεγάλο αριθμό n ίσων διαστημάτων (κάθε διάστημα έχει μέγεθος $\delta = \frac{t}{n}$). Λόγω των 3 πρϋποθέσεων:

$$Pr\{1 \text{ γεγονός σε ένα διάστημα}\} \sim \nu \cdot \frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \simeq \nu \cdot \frac{t}{n}$$

$$Pr\{\geq 2 \text{ γεγονότα}\} \sim o\left(\frac{t}{n}\right) \to 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{X(t)} \sim \text{διωνυμική } B\left(n, \frac{\nu \cdot t}{n}\right)$$

3. Θεώρημα - Απόδειξη (Συνέχεια)

$$\Rightarrow X(t) \to_{\infty} Poisson(\lambda) \text{ όπου } \lambda = n \cdot \frac{\nu \cdot t}{n} = \nu \cdot t$$

3. Θεώρημα - Απόδειξη (Συνέχεια)

$$\Rightarrow X(t) \rightarrow_{\infty} Poisson(\lambda) \text{ όπου } \lambda = n \cdot \frac{\nu \cdot t}{n} = \nu \cdot t$$

$$\Rightarrow Pr\left\{X(t) = x\right\} = e^{-\nu \cdot t} \cdot \frac{(\nu \cdot t)^x}{x!} \qquad \square$$

Δηλαδή η X(t) για κάθε t είναι Poisson(ν·t)

3. Θεώρημα - Απόδειξη (προαιρετικό υλικό)

Έστω X(t) ανέλιξη Poisson (λ) που μετράει τον αριθμό γεγονότων στο (0, t).
T: χρονική στιγμή 1ου γεγονότος.
⇒ T είναι εκθετική (λ).

<u>Απόδειξη</u>: Είναι $Pr\{T > t\} = Pr\{X(t) = 0\}$

Έστω X(t) ανέλιξη Poisson (λ) που μετράει τον αριθμό γεγονότων στο (0, t).
T: χρονική στιγμή 1ου γεγονότος.
⇒ T είναι εκθετική (λ).

<u>Απόδειξη</u>: Είναι $Pr\left\{T > t\right\} = Pr\left\{X(t) = 0\right\}$

Αλλά $Pr\left\{X(t) = 0\right\} = e^{-\lambda \cdot t} \cdot \dfrac{(\lambda \cdot t)^0}{0!} = e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow$

$Pr\left\{T > t\right\} = e^{-\lambda \cdot t} \Rightarrow Pr\left\{T \leq t\right\} = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$
που είναι η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής (λ). $\square$

<u>Παρατήρηση</u>: Αυτό ισχύει για όλα τα interarrival times.

1 Ομοιόμορφη Κατανομή (συνεχής)

2 Εκθετική Κατανομή (συνεχής)

3 Η ανέλιξη Poisson (διακριτή)

4 Κανονική Κατανομή (συνεχής)

5 Προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική

6 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

7 Παραδείγματα

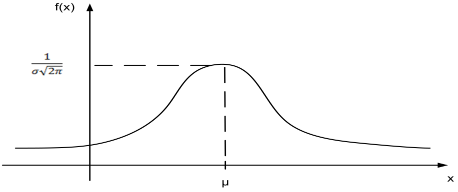
4. Κανονική Κατανομή (Normal ή Gauss)

$$\underline{\text{pdf}}\text{: } X \sim N(\mu, \sigma^2) : f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}, \ \ -\infty < x < +\infty$$

Η pdf

Γραφική παράσταση της pdf:

- είναι συμμετρική περί την τιμή μ, δηλαδή $f(\mu + x) = f(\mu - x)$
- έχει μέγιστο όταν x = μ : $f(\mu) = \dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}$



4. Κανονική Κατανομή - Η σημασία της

Η σημασία της κανονικής:

– Είναι η "σημαντικότερη" κατανομή, με πολυάριθμες εφαρμογές.
– προσέγγιση για την διωνυμική (για μεγάλο n)
– προσέγγιση για ποικιλία κατανομών (αθροίσματα κατανομών) - κεντρικό οριακό θεώρημα

⇒ πολλά τυχαία φαινόμενα ακολουθούν την κανονική κατανομή

π.χ.

– το ύψος των ανθρώπων
– το λάθος σε πειραματικές μετρήσεις φυσικών ποσοτήτων
– οι βαθμοί σε ένα μάθημα

4. Κανονική Κατανομή - η Τυπική Κανονική

<u>Ιδιότητες</u>

- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$

4. Κανονική Κατανομή - η Τυπική Κανονική

Ιδιότητες

- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$

Η τυπική (ή ανηγμένη) κανονική

$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ δηλαδή μετράει αποκλίσεις από τη μέση τιμή σε τυπικές αποκλίσεις σ.

πχ. $Z = 3 \Leftrightarrow X = \mu + 3\sigma$

Ιδιότητες

- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$

Η τυπική (ή ανηγμένη) κανονική

$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ δηλαδή μετράει αποκλίσεις από τη μέση τιμή σε τυπικές αποκλίσεις σ.

πχ. $Z = 3 \Leftrightarrow X = \mu + 3\sigma$

Ιδιότητα : $Z \sim N(0,1) \Rightarrow pdf : \phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$

4. Κανονική Κατανομή - η Τυπική Κανονική

Ιδιότητες

- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$

Η τυπική (ή ανηγμένη) κανονική

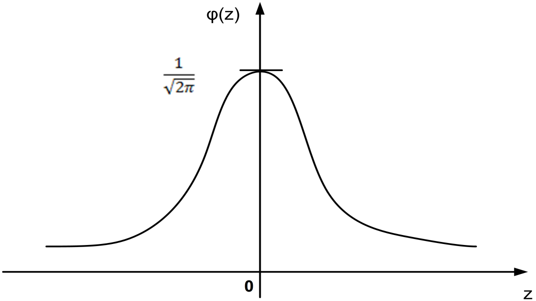
$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ δηλαδή μετράει αποκλίσεις από τη μέση τιμή σε τυπικές αποκλίσεις σ.

πχ. $Z = 3 \Leftrightarrow X = \mu + 3\sigma$

Ιδιότητα : $Z \sim N(0,1) \Rightarrow pdf : \phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$

συνάρτηση κατανομής: $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt$

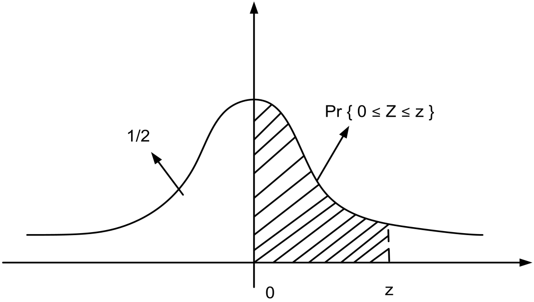
4. Τυπική Κανονική Κατανομή (pdf)



$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

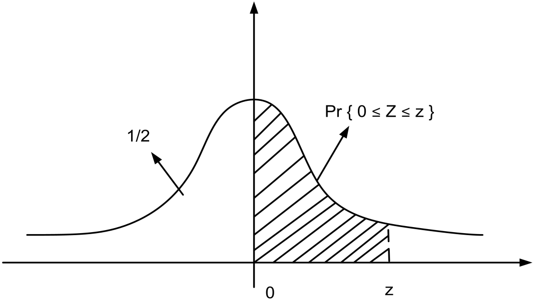
4. Κανονική Κατανομή - Ιδιότητες των τιμών $\Phi(z)$

$\Phi(z) = Pr\{Z \le z\} = Pr\{Z \ge -z\} = 1 - Pr\{Z \le -z\} =$
$1 - \Phi(-z) \Rightarrow$
$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ (υπολογισμός αρνητικών από τις θετικές)



4. Κανονική Κατανομή - Ιδιότητες των τιμών $\Phi(z)$

$\Phi(z) = Pr\{Z \leq z\} = Pr\{Z \geq -z\} = 1 - Pr\{Z \leq -z\} =$
$1 - \Phi(-z) \Rightarrow$
$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ (υπολογισμός αρνητικών από τις θετικές)



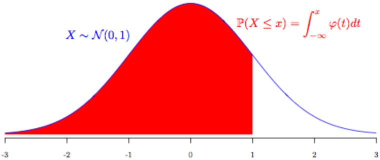
$$P(0 \leq Z \leq z) = \Phi(z) - \frac{1}{2}$$

4. Κανονική Κατανομή - Υπολογισμός τιμών μέσω των $\Phi(z)$

- οι τιμές αυτές έχουν υπολογιστεί και υπάρχουν σε σχετικούς πίνακες, οπότε θεωρούνται γνωστές
- οι τιμές μιας κανονικής υπολογίζονται με προσφυγή στην τυπική κανονική και χρήση των πινάκων με τις $\Phi(z)$ δηλαδή

$$Pr\{\alpha \le X \le \beta\} = Pr\left\{\frac{\alpha-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right\} =$$
$$Pr\left\{\frac{\alpha-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$$

4. Κανονική Κατανομή - Πίνακας τιμών $\Phi(z)$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

πχ. βλέπουμε ότι $\Phi(1.01) = 0.8438$ και $\Phi(0.16) = 0.5636$

1 Ομοιόμορφη Κατανομή (συνεχής)

2 Εκθετική Κατανομή (συνεχής)

3 Η ανέλιξη Poisson (διακριτή)

4 Κανονική Κατανομή (συνεχής)

5 Προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική

6 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

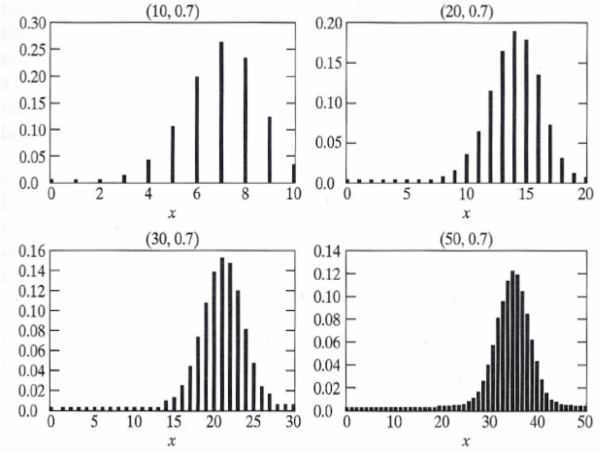
7 Παραδείγματα

5. Κανονική Κατανομή - Ιδιότητες ασυμπτωτικής προσέγγισης

Η διωνυμική τείνει στην κανονική για μεγάλο n οπότε αν $X \sim B(n,p)$

$$Pr\{\alpha < X < \beta\} =$$
$$Pr\left\{\frac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} \to$$
$$\to \Phi\left(\frac{\beta - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right), \text{ καθώς } n \to \infty$$

5. Προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική



Πρατήρηση: Καθώς το n μεγαλώνει, η διωνυμική μοιάζει όλο και περισσότερο με κανονική.

5. Ένα παράδειγμα

Έστω X ο αριθμός αποτελεσμάτων "κεφαλή" σε 40 ρίψεις ενός συμμετρικού νομίσματος. Να βρεθεί η πιθανότητα $X = 20$.

Λύση: Πρόκειται για διωνυμική $B(40, \frac{1}{2})$ οπότε $\mu = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20$ και $\sigma = \sqrt{40\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ και η ακριβής λύση είναι
$Pr\{X = 20\} = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \simeq 0.1254$

Κατά την προσέγγιση από την κανονική κάνουμε πρώτα την λεγόμενη "**διόρθωση συνέχειας**" (αφού η διωνυμική είναι διακριτή ενώ η κανονική συνεχής):

$$Pr\{X = 20\} = Pr\{19.5 \leq X \leq 20.5\} =$$
$$Pr\{\frac{19.5-20}{\sqrt{10}} \leq \frac{X-20}{\sqrt{10}} \leq \frac{20.5-20}{\sqrt{10}}\} \simeq Pr\{-0.16 \leq Z \leq 0.16\} =$$
$$\Phi(0.16) - \Phi(-0.16) = \Phi(0.16) - [1 - \Phi(0.16)] =$$
$$2 \cdot \Phi(0.16) - 1 \simeq 0.1272$$

Άρα η προσέγγιση είναι πολύ καλή.

Οι δύο προσεγγίσεις για την διωνυμική:

– όταν το n είναι μεγάλο και το p μικρό καλή προσέγγιση δίνεται από την Poisson.
Ειδικότερα, όταν $n \geq 20$ και $p \leq 0.05$ ή όταν $n \geq 100$ και $n \cdot p \leq 10$

– όταν το $np(1-p)$ είναι μεγάλο (ειδικότερα $np(1-p) \geq 10$) τότε η κανονική δίνει αρκετά καλή προσέγγιση.

1 Ομοιόμορφη Κατανομή (συνεχής)

2 Εκθετική Κατανομή (συνεχής)

3 Η ανέλιξη Poisson (διακριτή)

4 Κανονική Κατανομή (συνεχής)

5 Προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική

6 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

7 Παραδείγματα

6. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

– Πρόκειται για ένα από τα δύο σημαντικότερα αποτελέσματα της θεωρίας πιθανοτήτων (μαζί με τον νόμο των μεγάλων αριθμών)

– Γενικεύει την προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική σε μεγάλη ποικιλία κατανομών (αθροίσματα ισόνομων, ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών)

– Εξηγεί γιατί τόσα πολλά τυχαία φαινόμενα είναι κανονικά κατανεμημένα

– Χρησιμοποιείται στον προσεγγιστικό υπολογισμό πιθανοτήτων.

6. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

“ οποιοδήποτε άθροισμα ισόνομων, στοχαστικά ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών τείνει στην κανονική”, δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} X_i \text{ όλες } \mu,\ \sigma^2 \\ \text{ανεξάρτητες} \\ X = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow Pr\left\{a \leq \frac{X - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \leq b\right\} \rightarrow \Phi(b) - \Phi(\alpha)$$

$$\text{καθώς το } n \rightarrow \infty$$

6. Ένα Παράδειγμα

Κατά την ρίψη 10 ζαριών, πόση είναι η πιθανότητα το άθροισμα των αποτελεσμάτων να είναι μεταξύ 30 και 40;

<u>Λύση:</u>

Έστω X_i το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού i (για $i = 1, 2, \ldots, 10$).

Είναι $E(X_i) = 3.5, Var(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = \frac{35}{12}$.

Έστω $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$. Απο το κεντρικό οριακό θεώρημα είναι:

$$Pr\{30 \leq X \leq 40\} = Pr\left\{ \frac{29.5 - 10\cdot 3.5}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \leq \frac{X - 10\cdot 3.5}{\sqrt{\frac{35}{12}}\sqrt{10}} \leq \frac{40.5 - 10\cdot 3.5}{\sqrt{\frac{350}{12}}} \right\} \simeq$$
$$Pr\{-1.0184 \leq Z \leq 1.0184\} \simeq 2\Phi(1.0184) - 1 = 0.692$$

Παρατήρηση:

Υπάρχουν παραλλαγές του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος για περιπτώσεις όπου οι μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες αλλά όχι απαραιτήτως ισόνομες.

1 Ομοιόμορφη Κατανομή (συνεχής)

2 Εκθετική Κατανομή (συνεχής)

3 Η ανέλιξη Poisson (διακριτή)

4 Κανονική Κατανομή (συνεχής)

5 Προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική

6 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

7 Παραδείγματα

7. Παράδειγμα 1

Αν η διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνδιάλεξης ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 0.1, πόση είναι η πιθανότητα μια συνδιάλεξη να κρατήσει απο 10 έως 20 λεπτά;

Λύση:

Έστω X η διάρκεια της συνδιάλεξης. Είναι:

$$Pr\{X \leq 20\} = Pr\{X \leq 10\} + Pr\{10 \leq X \leq 20\} \Rightarrow$$

$$Pr\{10 \leq X \leq 20\} = F(20) - F(10) =$$

$$= 1 - e^{-0.1 \cdot 20} - \left(1 - e^{-0.1 \cdot 10}\right) =$$

$$= 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} \simeq 0.233$$

7. Παράδειγμα 2

Αν X κανονική με παραμέτρους $\mu = 3$ και $\sigma^2 = 9$ να βρεθούν
α) η $Pr\{2 < X < 5\}$ και β) η $Pr\{X > 0\}$

<u>Λύση:</u>

α) $Pr\{2 < X < 5\} = Pr\{2-3 < X-3 < 5-3\} =$
$= Pr\left\{-\frac{1}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{2}{3}\right\} = Pr\left\{-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right\}$

Άρα η πιθανότητα είναι $\Phi(\frac{2}{3}) - \Phi(-\frac{1}{3}) =$

$= \Phi(\frac{2}{3}) - \left[1 - \Phi(\frac{1}{3})\right] = \Phi(\frac{2}{3}) + \Phi(\frac{1}{3}) - 1 \simeq 0.3779$

β) $Pr\{X > 0\} = Pr\{X - 3 > 0 - 3\} = Pr\{\frac{X-3}{3} > \frac{-3}{3}\} =$
$= Pr\{Z > -1\} = 1 - Pr\{Z < -1\} = 1 - \Phi(-1) =$
$= 1 - (1 - \Phi(1)) = \Phi(1) \simeq 0.8413$

7. Παράδειγμα 3

Σε έναν server φτάνουν κατά μέσο όρο 300 emails/ώρα.
$Pr\left\{3 \; emails \;\; \text{σε 2 λεπτά}\right\} = ?$

Λύση: Έστω ν = 300 emails/ώρα $\Rightarrow 60 \cdot \nu = 300 \Rightarrow \nu = 5$ ανά λεπτό

$$Pr\left\{3 \; emails \;\; \text{σε 2 λεπτά}\right\} = Pr\left\{X(2) = 3\right\} = e^{-2 \cdot 5} \cdot \frac{(2 \cdot 5)^3}{3!} = e^{-10} \cdot \frac{10^3}{3!}$$