“Πιθανότητες και Αρχές Στατιστικής” (3η Διάλεξη)

Σωτήρης Νικολετσέας, καθηγητής

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

Περιεχόμενα 3ης Διάλεξης

3ο Μάθημα "Πιθανότητες και Αρχές Στατιστικής"

Ολοκληρώνουμε σήμερα τον υπολογισμό πιθανοτήτων με στοιχειώδη μέσα (επόμενο μάθημα: ισχυρές μαθηματικές αναπαραστάσεις π.χ. τυχαίες μεταβλητές) μελετώντας ορισμένες πολύ βασικές έννοιες:

- Δεσμευμένη Πιθανότητα
- Στοχαστική Ανεξαρτησία

και ορισμένα χρήσιμα εργαλεία:

- τον πολλαπλασιαστικό νόμο
- το θεώρημα της ολικής πιθανότητας
- το θεώρημα του Bayes

Ορισμός

Ορισμός

Πείραμα τύχης:

- ΠΡΙΝ το πείραμα:
  - δειγματοχώρος Ω
  - για κάθε γεγονός A, υπάρχει η P(A)
- ΜΕΤΑ το πείραμα
  - ΣΥΝΕΒΗ το γεγονός B
  - $\Rightarrow$ "νέος δειγματοχώρος " Ω' είναι το B
  - $\Rightarrow$ η πιθανότητα του A αλλάζει αφού πλέον $A \equiv A \cdot B$

Συμβολισμός P(A|B) = "πιθανότητα του A δοθείσης της πραγματοποίησης του B"

Ένα απλό παράδειγμα

Πείραμα: Ζάρι
A = { Αποτέλεσμα 1 }
B = { Περιττό αποτέλεσμα }

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \mid B) = \begin{cases} \text{Όλες: } \{1,3,5\} \\ \text{Ευνοϊκές: } \{1\} \end{cases} \Rightarrow P(A \mid B) =$$

Ένα απλό παράδειγμα

Πείραμα: Ζάρι
A = { Αποτέλεσμα 1 }
B = { Περιττό αποτέλεσμα }

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \mid B) = \begin{cases} \text{Όλες: } \{1,3,5\} \\ \text{Ευνοϊκές: } \{1\} \end{cases} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{1}{3}$$

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα

4 μπάλες τοποθετούνται διαδοχικά σε 4 κελιά
B: "Οι πρώτες δύο σε διαφορετικά κελιά"
A: "Ένα κελί ακριβώς 3 μπάλες"
$P(A \mid B) =?$

Λύση:

Όλες οι περιπτώσεις $= N_B =$

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα

4 μπάλες τοποθετούνται διαδοχικά σε 4 κελιά
B: "Οι πρώτες δύο σε διαφορετικά κελιά"
A: "Ένα κελί ακριβώς 3 μπάλες"
$P(A \mid B) = ?$

Λύση:

Όλες οι περιπτώσεις $= N_B = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$
Ευνοϊκές περιπτώσεις $= N_{A \cdot B} =$

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα

4 μπάλες τοποθετούνται διαδοχικά σε 4 κελιά
B: "Οι πρώτες δύο σε διαφορετικά κελιά"
A: "Ένα κελί ακριβώς 3 μπάλες"
$P(A \mid B) =?$

Λύση:

Όλες οι περιπτώσεις $= N_B = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$
Ευνοϊκές περιπτώσεις $= N_{A \cdot B} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\Rightarrow P(A \mid B) = \frac{N_{A \cdot B}}{N_B} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

Ορισμός

Ορισμός

Έστω $P(B) > 0$
Η δεσμευμένη πιθανότητα είναι μια συνολοσυνάρτηση:

$$A \to P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Διαίσθηση: $P(A \mid B) = \frac{N_{A \cdot B}}{N_B} = \frac{\frac{N_{A \cdot B}}{N}}{\frac{N_B}{N}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ αν τα σημεία του χώρου είναι ισοπίθανα και πεπερασμένα.

Βασική Παρατήρηση

Λόγω της διαίρεσης με τον παράγοντα $P(B)$, αντίστοιχα θεωρήματα για πιθανότητες εξακολουθούν να ισχύουν υποθέτοντας το ίδιο γεγονός B

π.χ.

$$P(A_1 \cup A_2 \mid B) = \frac{P\left[(A_1 \cup A_2) \cdot B\right]}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cdot B \cup A_2 \cdot B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cdot B) + P(A_2 \cdot B) - P(A_1 \cdot A_2 \cdot B)}{P(B)} =$$

$$= P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1 \cdot A_2 \mid B)$$

*δηλαδή ίδια μορφή με $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2)$

Ορισμένα χρήσιμα εργαλεία με βάση δεσμευμένες πιθανότητες

β1) Ο πολλαπλασιαστικός νόμος

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cdot A_2)}{P(A_1)} \Rightarrow P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)$$

Γενικεύοντας: $P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) =$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cdot A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1})$$

αρκεί $P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) > 0$

Απόδειξη: 2ο μέλος $=$

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_2 \cdot A_1)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_3 \cdot A_1 \cdot A_2)}{P(A_1 \cdot A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cdots A_n)}{P(A_1 \cdots A_{n-1})} =$$

$=$ 1ο μέλος

Ορισμένα χρήσιμα εργαλεία με βάση δεσμευμένες πιθανότητες

β2) Το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Θεώρημα

$A_1, \cdots, A_n$ διαμέριση του $\Omega \Rightarrow P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)$

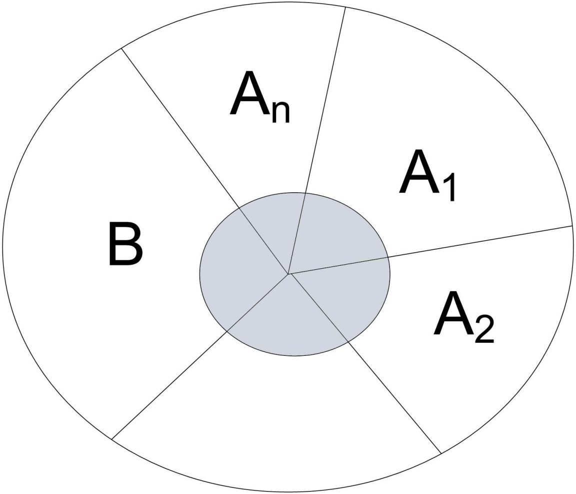
Απόδειξη:

$$2\text{ο μέλος} = \sum_{k=1}^{n} P(B \cdot A_k) =$$

$$P(B \cdot A_1) + \cdots + P(B \cdot A_n) = P\left[B \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n)\right]$$

$$P\left[B \cap \Omega\right] = P(B) = 1\text{ο μέλος}$$

Εποπτική εξήγηση με διάγραμμα Venn



2. Θεώρημα Bayes

Έστω ότι

A: "αιτία"

B: "αποτέλεσμα"

- Θεωρούμε γνωστή (ή μπορούμε να βρούμε) την $P(B|\ A)$
- Ζητάμε την $P(A|\ B)$

Παράδειγμα

Διαγνωστικά ιατρικά τεστ:
A: "το άτομο έχει μια ασθένεια"
B: "το τεστ είναι θετικό"

Είναι λογικό να γνωρίζουμε (π.χ. με βάση στατιστικές μετρήσεις) την $P(B|\ A)$ δηλαδή την πιθανότητα το τεστ να βγει θετικό δοθέντος του ότι το άτομο είναι ασθενές.

Μας ενδιαφέρει η "αντίστροφη" δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|\ B)$ δηλαδή η πιθανότητα το άτομο να είναι ασθενές δοθέντος ότι το τεστ ήταν θετικό.

Θεώρημα Bayes

Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{c} A_1, \cdots, A_n \ \text{διαμέριση του } \Omega \\ P(A_k) > 0, \forall k \\ P(B) > 0 \end{array}\right\} P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}$$

Θεώρημα - Απόδειξη

$$2\text{ο μέλος} = \frac{P(A_k) \cdot P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)} = \frac{P(B \cdot A_k)}{P(B)} =$$

$$= P(A_k \mid B) \; \square.$$

Παράδειγμα

Τεστ θετικό: 80% όταν υπάρχει ασθένεια, 10% όταν δεν υπάρχει ασθένεια

1% του πληθυσμού έχει ασθένεια. P(Ασθένεια | τεστ θετικό) = ?

Λύση: Έστω A έχει ασθένεια, $\overline{A}$ δεν έχει ασθένεια και B τεστ θετικό. Τα A, $\overline{A}$ είναι διαμέριση του Ω και θέλουμε την $P(A \mid B)$.

$$\text{Bayes} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})} =$$

Παράδειγμα

Τεστ θετικό
- 80% όταν υπάρχει ασθένεια
- 10% όταν δεν υπάρχει ασθένεια

1% του πληθυσμού έχει ασθένεια. P(Ασθένεια | τεστ θετικό) = ?

Λύση: Έστω A έχει ασθένεια, $\overline{A}$ δεν έχει ασθένεια και B τεστ θετικό. Τα A, $\overline{A}$ είναι διαμέριση του Ω και θέλουμε την $P(A \mid B)$.

$$\text{Bayes} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})} =$$

$$\frac{0.01 \cdot 0.8}{0.01 \cdot 0.8 + 0.99 \cdot 0.1} = \frac{8}{107} \simeq 7\%$$

3. Στοχαστική Ανεξαρτησία

Θα θέλαμε διαισθητικά $P(A \mid B) = P(A)$ **(1)**
δηλαδή η πραγματοποίηση του B να μην επηρεάζει το A.

$$\mathbf{(1)} \Rightarrow \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

<u>Ορισμός:</u>
A, B στοχαστικά ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Θεώρημα

<u>Θεώρημα:</u>

A, B ανεξάρτητα $\Rightarrow$ A, $\overline{B}$ ανεξάρτητα

<u>Απόδειξη:</u> Είναι $A \cdot B \cup A \cdot \overline{B} = A \cdot (B \cup \overline{B}) = A \cdot \Omega = A \Rightarrow$

$$P(A \cdot B) + P(A \cdot \overline{B}) = P(A) \Rightarrow$$

$$P(A \cdot \overline{B}) = P(A) - P(A \cdot B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) =$$

$$P(A)\,[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(\overline{B}) \qquad \square$$

Παράδειγμα 1

Ρίχνουμε 2 ζάρια

$$E_1 = \text{“άθροισμα 6”}$$
$$E_2 = \text{“άθροισμα 7”}$$
$$F = \text{“1ο ζάρι 4”}$$

α) E_1, F όχι ανεξάρτητα

β) E_2, F ανεξάρτητα

Παράδειγμα 1

Απόδειξη α)

$$E_1 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \Rightarrow P(E_1) = \frac{5}{36}$$

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

$$E_1 \cdot F =$$

Παράδειγμα 1

Απόδειξη α)

$$E_1 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \Rightarrow P(E_1) = \frac{5}{36}$$

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

$$E_1 \cdot F = \{(4,2)\} \Rightarrow P(E_1 \cdot F) = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6}$$

Άρα $\mathbf{E}_1$, F όχι ανεξάρτητα.

Διαισθητική Ερμηνεία: Το άθροισμα 6 περιορίζεται από το πρώτο ζάρι, αφού αν υπάρξει αποτέλεσμα 6 στο πρώτο ζάρι, είναι αδύνατο να έχουμε άθροισμα 6.

Παράδειγμα 1

Απόδειξη β)

$$E_2 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \Rightarrow P(E_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(F) = \frac{1}{6}$$

$$E_2 \cdot F = \{(4,3)\} \Rightarrow P(E_2 \cdot F) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

Άρα $\mathbf{E}_2$, F ανεξάρτητα.

Διαισθητική Ερμηνεία: Το άθροισμα 7 δεν περιορίζεται από το πρώτο ζάρι.

Παράδειγμα 2 - Α΄ τρόπος

Από δοχείο με 8 κόκκινες και 4 άσπρες μπάλες επιλέγω τυχαία 2 μπάλες. Ποιά η πιθανότητα και οι δύο να είναι κόκκινες;

Λύση: (Α΄ τρόπος)

Παράδειγμα 2 - Α΄ τρόπος

Από δοχείο με 8 κόκκινες και 4 άσπρες μπάλες επιλέγω τυχαία 2 μπάλες. Ποιά η πιθανότητα και οι δύο να είναι κόκκινες;

Λύση: (Α΄ τρόπος)

$$\text{Είναι } \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{8!}{2!6!}}{\frac{12!}{2!10!}} = \frac{7 \cdot 8}{11 \cdot 12}$$

Παράδειγμα 2 - Β′ τρόπος

Από δοχείο με 8 κόκκινες και 4 άσπρες μπάλες επιλέγω τυχαία 2 μπάλες. Ποιά η πιθανότητα και οι δύο να είναι κόκκινες;

Λύση: (Β′ τρόπος)

Παράδειγμα 2 - Β′ τρόπος

Από δοχείο με 8 κόκκινες και 4 άσπρες μπάλες επιλέγω τυχαία 2 μπάλες. Ποιά η πιθανότητα και οι δύο να είναι κόκκινες;

Λύση: (Β′ τρόπος)

Έστω R_1, R_2 τα γεγονότα η πρώτη (αντίστοιχα η δεύτερη) μπάλα να είναι κόκκινη.

Είναι: $P(R_1 \cdot R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2 | R_1) =$

Παράδειγμα 2 - Β′ τρόπος

Από δοχείο με 8 κόκκινες και 4 άσπρες μπάλες επιλέγω τυχαία 2 μπάλες. Ποιά η πιθανότητα και οι δύο να είναι κόκκινες;

Λύση: (Β′ τρόπος)

Έστω R_1, R_2 τα γεγονότα η πρώτη (αντίστοιχα η δεύτερη) μπάλα να είναι κόκκινη.

Είναι: $P(R_1 \cdot R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2|R_1) = \dfrac{8}{12} \cdot \dfrac{7}{11}$

(διότι προφανώς τα R_1, R_2 δεν είναι ανεξάρτητα)

4. Αμοιβαία (ή πλήρης) Ανεξαρτησία

Γενικεύοντας για 3 γεγονότα θα θέλαμε

A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$

<u>Ερώτημα</u>: Η ανεξαρτησία ανά ζεύγη δηλαδή

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$
$$P(A_2 \cdot A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$$
$$P(A_1 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

συνεπάγεται τη σχέση $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$;

4. Αμοιβαία (ή πλήρης) Ανεξαρτησία

Γενικεύοντας για 3 γεγονότα θα θέλαμε

A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$

<u>Ερώτημα:</u> Η ανεξαρτησία ανά ζεύγη δηλαδή

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$
$$P(A_2 \cdot A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$$
$$P(A_1 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

συνεπάγεται τη σχέση $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$;

<u>Απάντηση:</u> Όχι γενικά (ωστόσο ισχύει σχεδόν πάντα).

Αντιπαράδειγμα

Δημιουργώ χώρο με τις 6 διατάξεις των a,b, c και τα aaa, bbb, ccc (και θεωρώ τα 9 σημεία ισοπίθανα).

$$A_k = \text{“στη θέση k υπάρχει α”} \text{ για } \mathrm{k} = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) =$$

Αντιπαράδειγμα

Δημιουργώ χώρο με τις 6 διατάξεις των a,b, c και τα aaa, bbb, ccc (και θεωρώ τα 9 σημεία ισοπίθανα).

$$A_k = \text{“στη θέση k υπάρχει α”} \text{ για } \mathrm{k} = 1,\ 2,\ 3$$

$$\Rightarrow P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

επίσης $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1 \cdot A_3) = P(A_2 \cdot A_3) =$

Αντιπαράδειγμα

Δημιουργώ χώρο με τις 6 διατάξεις των a,b, c και τα aaa, bbb, ccc (και θεωρώ τα 9 σημεία ισοπίθανα).

$$A_k = \text{“στη θέση k υπάρχει α”} \text{ για } k = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{επίσης } P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1 \cdot A_3) = P(A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{τα } A_1, A_2, A_3 \text{ είναι ανεξάρτητα ανά ζεύγη}$$

Αλλά $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =$

Αντιπαράδειγμα

Δημιουργώ χώρο με τις 6 διατάξεις των a,b, c και τα aaa, bbb, ccc (και θεωρώ τα 9 σημεία ισοπίθανα).

$$A_k = \text{“στη θέση k υπάρχει α”} \text{ για } k = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{επίσης } P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1 \cdot A_3) = P(A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{τα } A_1, A_2, A_3 \text{ είναι ανεξάρτητα ανά ζεύγη}$$

$$\text{Αλλά } \; P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{1}{9} \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{27}$$

Ορισμός Πλήρους Στοχαστικής Ανεξαρτησίας

Ορισμός

$$\left.\begin{array}{l} A_1, \cdots, A_n (n \geq 2) \\ \text{πλήρως ανεξάρτητα} \end{array}\right\} \Leftrightarrow P(A_{i_1} A_{i_2} ... A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$$

για κάθε συνδυασμό $\{i_1, \cdots i_k\}$ των δεικτών $\{1, 2, \cdots, n\}$ αν k = 2, 3,$\cdots$, n

Ορισμός Πλήρους Στοχαστικής Ανεξαρτησίας

Παρατήρηση: Συνολικά πρέπει να ελεγχθούν

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - n - 1$$

δηλαδή εκθετικά πολλές συνθήκες

Στην πράξη, στηριζόμαστε στη διαίσθηση και θεωρούμε γεγονότα που συμβαίνουν:

- σε διαφορετικούς χρόνους
- σε διαφορετικούς χώρους

ως ανεξάρτητα, χωρίς να ελέγχουμε τις (εκθετικές στο πλήθος) σχέσεις.

Παράδειγμα

$$\left.\begin{array}{c} A_1, \cdots, A_n \text{ ανεξάρτητα} \\ P(A_k) = P_k \end{array}\right\} Pr\{\text{κανένα γεγονός δε συμβαίνει }\} =?$$

<u>Λύση</u>:

$$\underbrace{P\left\{\bigcap_k \overline{A_k}\right\} = \prod_k P(\overline{A_k})} = \prod_k (1 - P_k) \leq \prod_k e^{-P_k} = e^{-\sum_{k=1}^{n} P_k}$$

Λόγω του θεωρήματος της σελίδας 21.

Άσκηση 1 - Α΄ τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον "νέο", "περιορισμένο" δειγματοχώρο που δημιουργεί η "δέσμευση")
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται Β, Ν, Α, Δ). Αν οι Β και Ν έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο Α να έχει 3 σπαθιά;

Άσκηση 1 - Α′ τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον "νέο", "περιορισμένο" δειγματοχώρο που δημιουργεί η "δέσμευση")
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται B, N, A, Δ). Αν οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο A να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Έστω D: "οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά"
F: "ο A έχει 3 σπαθιά"
Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

Άσκηση 1 - Α′ τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον "νέο", "περιορισμένο" δειγματοχώρο που δημιουργεί η "δέσμευση")
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται B, N, A, Δ). Αν οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο A να έχει 3 σπαθιά;

<u>Λύση:</u>

Έστω D: "οι B και N έχουν συνολικά 8 σπαθιά"
F: "ο A έχει 3 σπαθιά"
Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$P(F|D) = \frac{N_{FD}}{N_D} = \frac{\binom{13}{8}\cdot\binom{39}{18}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{21}{10}}{\binom{13}{8}\cdot\binom{39}{18}\cdot\binom{26}{13}} = \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}}$$

Άσκηση 1 - Β′ τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον "νέο", "περιορισμένο" δειγματοχώρο που δημιουργεί η "δέσμευση")
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίκτες (που καλούνται Β, Ν, Α, Δ). Αν οι Β και Ν έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο Α να έχει 3 σπαθιά;

Άσκηση 1 - Β' τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον "νέο", "περιορισμένο" δειγματοχώρο που δημιουργεί η "δέσμευση")
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται Β, Ν, Α, Δ). Αν οι Β και Ν έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο Α να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Αφού θεωρούμε δεδομένα τα χαρτιά των Β και Ν, απομένουν 26 χαρτιά που μοιράζονται στους Α και Δ με

Άσκηση 1 - Β′ τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον "νέο", "περιορισμένο" δειγματοχώρο που δημιουργεί η "δέσμευση")
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται Β, Ν, Α, Δ). Αν οι Β και Ν έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο Α να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Αφού θεωρούμε δεδομένα τα χαρτιά των Β και Ν, απομένουν 26 χαρτιά που μοιράζονται στους Α και Δ με $\binom{26}{13}\binom{13}{13} = \binom{26}{13}$ τρόπους συνολικά.

Άσκηση 1 - Β′ τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον "νέο", "περιορισμένο" δειγματοχώρο που δημιουργεί η "δέσμευση")
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίκτες (που καλούνται Β, Ν, Α, Δ). Αν οι Β και Ν έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο Α να έχει 3 σπαθιά;

<u>Λύση:</u>

Αφού θεωρούμε δεδομένα τα χαρτιά των Β και Ν, απομένουν 26 χαρτιά που μοιράζονται στους Α και Δ με $\binom{26}{13}\binom{13}{13} = \binom{26}{13}$ τρόπους συνολικά.
Από αυτούς τους τρόπους ευνοϊκοί είναι

Άσκηση 1 - Β′ τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον "νέο", "περιορισμένο" δειγματοχώρο που δημιουργεί η "δέσμευση")
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες (που καλούνται Β, Ν, Α, Δ). Αν οι Β και Ν έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο Α να έχει 3 σπαθιά;

<u>Λύση:</u>

Αφού θεωρούμε δεδομένα τα χαρτιά των Β και Ν, απομένουν 26 χαρτιά που μοιράζονται στους Α και Δ με $\binom{26}{13}\binom{13}{13} = \binom{26}{13}$ τρόπους συνολικά.
Από αυτούς τους τρόπους ευνοϊκοί είναι $\binom{5}{3} \cdot \binom{21}{10} \cdot \binom{13}{13}$, δηλαδή ο Α διαλέγει 3 από τα εναπομένοντα 5 σπαθιά και τα υπόλοιπα 10 φύλλα του δεν είναι σπαθιά.

Άσκηση 1 - Β′ τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον "νέο", "περιορισμένο" δειγματοχώρο που δημιουργεί η "δέσμευση")
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίκτες (που καλούνται Β, Ν, Α, Δ). Αν οι Β και Ν έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο Α να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Αφού θεωρούμε δεδομένα τα χαρτιά των Β και Ν, απομένουν 26 χαρτιά που μοιράζονται στους Α και Δ με $\binom{26}{13}\binom{13}{13} = \binom{26}{13}$ τρόπους συνολικά.
Από αυτούς τους τρόπους ευνοϊκοί είναι $\binom{5}{3} \cdot \binom{21}{10} \cdot \binom{13}{13}$, δηλαδή ο Α διαλέγει 3 από τα εναπομένοντα 5 σπαθιά και τα υπόλοιπα 10 φύλλα του δεν είναι σπαθιά.

Άρα: $P =$

Άσκηση 1 - Β′ τρόπος (προαιρετικό υλικό)

(Δουλεύοντας με τον “νέο”, “περιορισμένο” δειγματοχώρο που δημιουργεί η “δέσμευση”)
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίκτες (που καλούνται Β, Ν, Α, Δ). Αν οι Β και Ν έχουν συνολικά 8 σπαθιά, ποιά η πιθανότητα ο Α να έχει 3 σπαθιά;

Λύση:

Αφού θεωρούμε δεδομένα τα χαρτιά των Β και Ν, απομένουν 26 χαρτιά που μοιράζονται στους Α και Δ με $\binom{26}{13}\binom{13}{13} = \binom{26}{13}$ τρόπους συνολικά.
Από αυτούς τους τρόπους ευνοϊκοί είναι $\binom{5}{3} \cdot \binom{21}{10} \cdot \binom{13}{13}$, δηλαδή ο Α διαλέγει 3 από τα εναπομένοντα 5 σπαθιά και τα υπόλοιπα 10 φύλλα του δεν είναι σπαθιά.

Άρα:
$$P = \frac{\binom{5}{3}\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}}$$

Άσκηση 2

(Χρήση της δεσμευμένης πιθανότητας για τον υπολογισμό πιθανοτήτων τομών από γεγονότα)
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες.
Ποιά η πιθανότητα κάθε παίχτης να πήρε ακριβώς 1 άσσο;

Άσκηση 2

(Χρήση της δεσμευμένης πιθανότητας για τον υπολογισμό πιθανοτήτων τομών από γεγονότα)
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίκτες. Ποιά η πιθανότητα κάθε παίκτης να πήρε ακριβώς 1 άσσο;

<u>Λύση: (Α΄ τρόπος)</u> Για $i = 1,2,3,4$ ορίζω τα E_i ως εξής:

E_1: "Ο άσσος σπαθί πάει σε κάποιον παίχτη".
E_2: "Ο άσσος σπαθί καί ο άσσος κούπα πάνε σε διαφορετικούς παίχτες".
E_3: "Ο άσσος σπαθί, ο άσσος κούπα, ο άσσος μπαστούνι πάνε σε διαφορετικούς παίχτες".
E_4: "Όλοι οι 4 άσσοι πάνε σε διαφορετικούς παίχτες".

Η ζητούμενη πιθανότητα $P(E_1E_2E_3E_4)$ είναι:
$P(E_1E_2E_3E_4) =$

Άσκηση 2

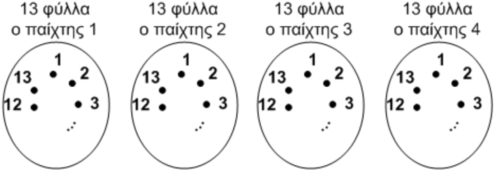
(Χρήση της δεσμευμένης πιθανότητας για τον υπολογισμό πιθανοτήτων τομών από γεγονότα)
Μοιράζουμε τυχαία τα 52 χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίχτες. Ποιά η πιθανότητα κάθε παίχτης να πήρε ακριβώς 1 άσσο;

Λύση: (Α΄ τρόπος) Για $i = 1,2,3,4$ ορίζω τα E_i ως εξής:

E_1: "Ο άσσος σπαθί πάει σε κάποιον παίχτη".
E_2: "Ο άσσος σπαθί καί ο άσσος κούπα πάνε σε διαφορετικούς παίχτες".
E_3: "Ο άσσος σπαθί, ο άσσος κούπα, ο άσσος μπαστούνι πάνε σε διαφορετικούς παίχτες".
E_4: "Όλοι οι 4 άσσοι πάνε σε διαφορετικούς παίχτες".

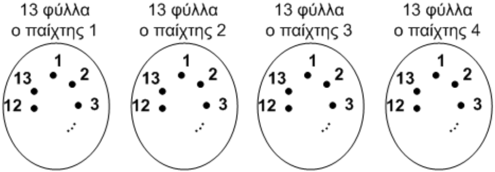
Η ζητούμενη πιθανότητα $P(E_1E_2E_3E_4)$ είναι:
$P(E_1E_2E_3E_4) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)P(E_4|E_1E_2E_3)$

Άσκηση 2 - Α′ τρόπος (Συνέχεια)



$P(E_1) =$

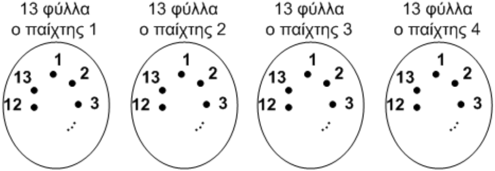
Άσκηση 2 - Α′ τρόπος (Συνέχεια)



$P(E_1) = 1$ (Προφανής)

$P(E_2|E_1) =$

Άσκηση 2 - Α′ τρόπος (Συνέχεια)

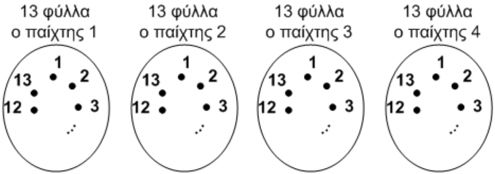


$P(E_1) = 1$ (Προφανής)

$P(E_2|E_1) = \frac{39}{51}$ (Αφού ο άσσος κούπα μπορεί να πάρει 51 θέσεις αλλά δεν πρέπει να "πάρει" κάποια από τις 13 θέσεις του παίχτη που πήρε τον άσσο σπαθί)

Ομοίως $P(E_3|E_1E_2) =$

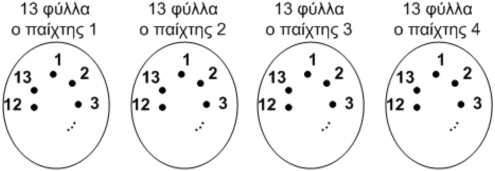
Άσκηση 2 - Α′ τρόπος (Συνέχεια)



$P(E_1) = 1$ (Προφανής)

$P(E_2|E_1) = \frac{39}{51}$ (Αφού ο άσσος κούπα μπορεί να πάρει 51 θέσεις αλλά δεν πρέπει να "πάρει" κάποια από τις 13 θέσεις του παίχτη που πήρε τον άσσο σπαθί)

Ομοίως $P(E_3|E_1E_2) = \frac{26}{50}$ και $P(E_4|E_1E_2E_3) =$



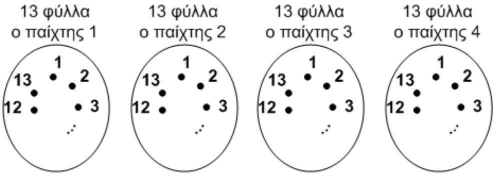
$P(E_1) = 1$ (Προφανής)

$P(E_2|E_1) = \dfrac{39}{51}$ (Αφού ο άσσος κούπα μπορεί να πάρει 51 θέσεις αλλά δεν πρέπει να "πάρει" κάποια από τις 13 θέσεις του παίχτη που πήρε τον άσσο σπαθί)

Ομοίως $P(E_3|E_1E_2) = \dfrac{26}{50}$ και $P(E_4|E_1E_2E_3) = \dfrac{13}{49}$

Οπότε $P(E_1E_2E_3E_4) =$

Άσκηση 2 - Α′ τρόπος (Συνέχεια)



$P(E_1) = 1$ (Προφανής)

$P(E_2|E_1) = \dfrac{39}{51}$ (Αφού ο άσσος κούπα μπορεί να πάρει 51 θέσεις αλλά δεν πρέπει να "πάρει" κάποια από τις 13 θέσεις του παίχτη που πήρε τον άσσο σπαθί)

Ομοίως $P(E_3|E_1E_2) = \dfrac{26}{50}$ και $P(E_4|E_1E_2E_3) = \dfrac{13}{49}$

Οπότε $P(E_1E_2E_3E_4) = \dfrac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49}$

Άσκηση 2 - Β′ τρόπος

Λύση: (Β′ τρόπος)

όλων των τρόπων:

Άσκηση 2 - Β' τρόπος

Λύση: (Β' τρόπος)

όλων των τρόπων: $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

Άσκηση 2 - Β′ τρόπος

<u>Λύση: (Β′ τρόπος)</u>

\# όλων των τρόπων: $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

\# ευνοικοί:

Άσκηση 2 - Β′ τρόπος

Λύση: (Β′ τρόπος)

\# όλων των τρόπων: $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

\# ευνοικοί: $4!\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$

Άσκηση 2 - Β′ τρόπος

Λύση: (Β′ τρόπος)

\# όλων των τρόπων: $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

\# ευνοικοί: $4!\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$

Αφού πρώτα μοιράζουμε έναν άσσο σε κάθε παίχτη και στην συνέχεια τα υπόλοιπα 12 φύλλα κάθε παίχτη αλλά οι 4 άσσοι μπορούν να πάνε στουσ 4 παίχτες με 4! τρόπους.

Άσκηση 2 - Β′ τρόπος

Λύση: (Β′ τρόπος)

\# όλων των τρόπων: $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

\# ευνοικοί: $4!\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$

Αφού πρώτα μοιράζουμε έναν άσσο σε κάθε παίχτη και στην συνέχεια τα υπόλοιπα 12 φύλλα κάθε παίχτη αλλά οι 4 άσσοι μπορούν να πάνε στουσ 4 παίχτες με 4! τρόπους.

Άρα: $P =$

Άσκηση 2 - Β′ τρόπος

Λύση: (Β′ τρόπος)

\# όλων των τρόπων: $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

\# ευνοικοί: $4!\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$

Αφού πρώτα μοιράζουμε έναν άσσο σε κάθε παίχτη και στην συνέχεια τα υπόλοιπα 12 φύλλα κάθε παίχτη αλλά οι 4 άσσοι μπορούν να πάνε στουσ 4 παίχτες με 4! τρόπους.

Άρα: $$P = \frac{4!\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}} = \frac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49}$$

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α΄ τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α΄ τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{$στις πρώτες i-1 ρίψεις ούτε 5 ούτε 7 $\bigcap$ 5 στη ρίψη $i\}$

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α΄ τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{$στις πρώτες i-1 ρίψεις ούτε 5 ούτε 7 $\bigcap$ 5 στη ρίψη $i\}$

Θέλουμε το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α΄ τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{$στις πρώτες i-1 ρίψεις ούτε 5 ούτε 7 $\bigcap$ 5 στη ρίψη $i\}$

Θέλουμε το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Είναι προφανώς $Pr\{E\} = Pr\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} Pr\{E_i\}$

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α΄ τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{$στις πρώτες i-1 ρίψεις ούτε 5 ούτε 7 $\bigcap$ 5 στη ρίψη $i\}$

Θέλουμε το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Είναι προφανώς $Pr\{E\} = Pr\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} Pr\{E_i\}$

Αλλά $Pr\{E_i\} =$

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α΄ τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{$στις πρώτες i-1 ρίψεις ούτε 5 ούτε 7 $\bigcap$ 5 στη ρίψη $i\}$

Θέλουμε το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Είναι προφανώς $Pr\{E\} = Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\{E_i\}$

Αλλά $Pr\{E_i\} = \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \cdot \frac{4}{36}$

(Αφού άθροισμα 5 προκύπτει για 4 αποτελέσματα και άθροισμα 7 για 6 αποτελέσματα)

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α΄ τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{$στις πρώτες i-1 ρίψεις ούτε 5 ούτε 7 $\bigcap$ 5 στη ρίψη $i\}$

Θέλουμε το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Είναι προφανώς $Pr\{E\} = Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\{E_i\}$

Αλλά $Pr\{E_i\} = \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \cdot \frac{4}{36}$

(Αφού άθροισμα 5 προκύπτει για 4 αποτελέσματα και άθροισμα 7 για 6 αποτελέσματα)

$\Rightarrow Pr\{E\} =$

Άσκηση 3

Ποιά η πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες, ανεξάρτητες ρίψεις 2 ζαριών να έρθει άθροισμα 5 πριν από άθροισμα 7;

Λύση: (Α΄ τρόπος) (χρησιμοποιώντας στοχαστική ανεξαρτησία)

Έστω $E_i = \{$στις πρώτες i-1 ρίψεις ούτε 5 ούτε 7 $\bigcap$ 5 στη ρίψη $i\}$

Θέλουμε το $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Είναι προφανώς $Pr\{E\} = Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\{E_i\}$

Αλλά $Pr\{E_i\} = \left(\frac{26}{36}\right)^{i-1} \cdot \frac{4}{36}$

(Αφού άθροισμα 5 προκύπτει για 4 αποτελέσματα και άθροισμα 7 για 6 αποτελέσματα)

$\Rightarrow Pr\{E\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{9} \left(\frac{13}{18}\right)^{i-1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{13}{18}} = \frac{2}{5}$

Άσκηση 3 - Β′ Τρόπος

Λύση: (Β′ τρόπος) (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Άσκηση 3 - Β′ Τρόπος

Λύση: (Β′ τρόπος) (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Η υπόθεση γίνεται ως προς το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης.

Άσκηση 3 - Β′ Τρόπος

Λύση: (Β′ τρόπος) (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Η υπόθεση γίνεται ως προς το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης.

Έστω: F: η 1η ρίψη έχει άθροισμα 5
G: η 1η ρίψη έχει άθροισμα 7
H: η 1η ρίψη δεν έχει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7

Άσκηση 3 - Β′ Τρόπος

<u>Λύση: (Β′ τρόπος)</u> (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Η υπόθεση γίνεται ως προς το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης.

Έστω: F: η 1η ρίψη έχει άθροισμα 5
G: η 1η ρίψη έχει άθροισμα 7
H: η 1η ρίψη δεν έχει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7

Προφανώς $F \cup G \cup H = \Omega$

Άσκηση 3 - Β′ Τρόπος

<u>Λύση: (Β′ τρόπος)</u> (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Η υπόθεση γίνεται ως προς το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης.

Έστω: F: η 1η ρίψη έχει άθροισμα 5
G: η 1η ρίψη έχει άθροισμα 7
H: η 1η ρίψη δεν έχει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7

Προφανώς $F \cup G \cup H = \Omega$

οπότε $Pr\{E\} = Pr\{EF \cup EG \cup EH\} =$
$= Pr\{F\}Pr\{E \mid F\} + Pr\{G\}Pr\{E \mid G\} + Pr\{H\}Pr\{E \mid H\}$

Άσκηση 3 - Β′ Τρόπος

<u>Λύση: (Β′ τρόπος)</u> (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Η υπόθεση γίνεται ως προς το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης.

Έστω: F: η 1η ρίψη έχει άθροισμα 5
G: η 1η ρίψη έχει άθροισμα 7
H: η 1η ρίψη δεν έχει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7

Προφανώς $F \cup G \cup H = \Omega$

οπότε $Pr\{E\} = Pr\{EF \cup EG \cup EH\} =$
$= Pr\{F\}Pr\{E \mid F\} + Pr\{G\}Pr\{E \mid G\} + Pr\{H\}Pr\{E \mid H\}$

όπου $Pr\{F\} = \dfrac{4}{36}$, $Pr\{G\} = \dfrac{6}{36}$, $Pr\{H\} = \dfrac{26}{36}$

Άσκηση 3 - Β′ Τρόπος

Λύση: (Β′ τρόπος) (πάλι με δεσμευμένη πιθανότητα)

Η υπόθεση γίνεται ως προς το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης.

Έστω: F: η 1η ρίψη έχει άθροισμα 5
G: η 1η ρίψη έχει άθροισμα 7
H: η 1η ρίψη δεν έχει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7

Προφανώς $F \cup G \cup H = \Omega$

οπότε $Pr\{E\} = Pr\{EF \cup EG \cup EH\} =$
$= Pr\{F\}Pr\{E \mid F\} + Pr\{G\}Pr\{E \mid G\} + Pr\{H\}Pr\{E \mid H\}$

όπου $Pr\{F\} = \frac{4}{36}$, $Pr\{G\} = \frac{6}{36}$, $Pr\{H\} = \frac{26}{36}$

προφανώς $Pr\{E \mid F\} = 1$
και $Pr\{E \mid G\} = 0$

Άσκηση 3 - Β′ Τρόπος (Συνέχεια)

Αλλά $Pr\{E \mid H\} = Pr\{E\}$

Άσκηση 3 - Β′ Τρόπος (Συνέχεια)

Αλλά $Pr\{E \mid H\} = Pr\{E\}$

Επειδή αν στην 1η ρίψη δεν έρθει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7, τότε η κατάσταση είναι ακριβώς όπως στην αρχή.
(δηλαδή και τώρα πρέπει το 5 να έρθει πριν από το 7 στις επόμενες ρίψεις, και λόγω της ανεξαρτησίας η 1η ρίψη δεν επηρεάζει τις υπόλοιπες).

Άσκηση 3 - Β' Τρόπος (Συνέχεια)

Αλλά $Pr\{E \mid H\} = Pr\{E\}$

Επειδή αν στην 1η ρίψη δεν έρθει άθροισμα ούτε 5 ούτε 7, τότε η κατάσταση είναι ακριβώς όπως στην αρχή.
(δηλαδή και τώρα πρέπει το 5 να έρθει πριν από το 7 στις επόμενες ρίψεις, και λόγω της ανεξαρτησίας η 1η ρίψη δεν επηρεάζει τις υπόλοιπες).

Με απλές πράξεις προκύπτει ότι $Pr\{E\} = \dfrac{2}{5}$

Άσκηση 3 - Διαισθητική εξήγηση

Λύση: (Διαισθητική εξήγηση)

Άσκηση 3 - Διαισθητική εξήγηση

Λύση: (Διαισθητική εξήγηση)

$$\text{Επειδή } Pr\{\text{άθροισμα } 5\} = \frac{4}{36}$$
$$\text{και } Pr\{\text{άθροισμα } 7\} = \frac{6}{36}$$

Άσκηση 3 - Διαισθητική εξήγηση

Λύση: (Διαισθητική εξήγηση)

$$\text{Επειδή } Pr\{\text{άθροισμα } 5\} = \frac{4}{36}$$
$$\text{και } Pr\{\text{άθροισμα } 7\} = \frac{6}{36}$$

Οι "πιθανότητες" (odds) είναι ουσιαστικά 6 προς 4 εναντίον του αθροίσματος 5.

Άσκηση 3 - Διαισθητική εξήγηση

Λύση: (Διαισθητική εξήγηση)

$$\text{Επειδή } Pr\{\text{άθροισμα } 5\} = \frac{4}{36}$$
$$\text{και } Pr\{\text{άθροισμα } 7\} = \frac{6}{36}$$

Οι "πιθανότητες" (odds) είναι ουσιαστικά 6 προς 4 εναντίον του αθροίσματος 5.

Άρα $Pr\{\text{άθροισμα 5 πριν από 7}\} =$

Άσκηση 3 - Διαισθητική εξήγηση

Λύση: (Διαισθητική εξήγηση)

Επειδή $Pr\{\text{άθροισμα } 5\} = \dfrac{4}{36}$

και $Pr\{\text{άθροισμα } 7\} = \dfrac{6}{36}$

Οι "πιθανότητες" (odds) είναι ουσιαστικά 6 προς 4 εναντίον του αθροίσματος 5.

Άρα $Pr\{\text{άθροισμα } 5 \text{ πριν από } 7\} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$