Ανάλυση Πειραματικών Σφαλμάτων σε Εργαστηριακές Ασκήσεις

ΧΡΗΣΤΟΣ ΧΡΗΣΤΙΔΗΣ
Τομέας Υλικού και Αρχιτεκτονικής των Υπολογιστών,
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής,
Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών.

Οι παρούσες σημειώσεις αποτελούν ένα χρήσιμο συμπλήρωμα για την διδασκαλία Εργαστηριακών Ασκήσεων σε πανεπιστημιακό επίπεδο. Η συγγραφή τους βασίσθηκε κυρίως στην προσωπική εμπειρία του γράφοντος από την διδασκαλία Εργαστηριακών Ασκήσεων σε φοιτητές της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών και στο βιβλίο του: J. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis*, 2nd edition, (University Science Books, Sausalito (CA), 1997). Παρατηρήσεις και σχόλια που, κατά την γνώμη των αναγνωστών, θα μπορούσαν να βελτιώσουν το επίπεδο κατανόησης των σημειώσεων και να ανασκευάσουν τυχόν τυπογραφικά λάθη στο κείμενο είναι ευπρόσδεκτα.

Αντί Προλόγου

Όλη αυτή η υπόθεση δεν διαφέρει πολύ από κείνη τη γνωστή ιστορία για την μύτη του αυτοκράτορα της Κίνας. Σε κανέναν δεν επιτρεπόταν να δεί τον αυτοκράτορα της Κίνας και το ερώτημα ήταν: Ποιο είναι το μήκος της μύτης του αυτοκράτορα; Για να το βρείς αρχίζεις να διασχίζεις τη χώρα ρωτόντας τους κατοίκους της τι μήκος είχε η μύτη του αυτοκράτορα. Τελικά βρίσκεις το μήκος της από τον μέσο όρο των απαντήσεων που σου έδωσαν οι διάφοροι Κινέζοι. Και νομίζεις ότι η απάντησή σου είναι ακριβής επειδή ήταν μεγάλος ο αριθμός των ερωτηθέντων. Δεν είναι όμως αυτός ο σωστός τρόπος για να βρείς κάτι. Όταν ρωτάς πολλούς ανθρώπους που δεν γνωρίζουν τίποτε για αυτό που τους ρωτάς, δεν ωφελεί σε τίποτα να βγάλεις τον μέσο όρο των απαντήσεών τους.

Richard Feynman
από το βιβλίο του: *Σίγουρα θα αστειεύεστε, κύριε Feynman!*
Εκδόσεις Τροχαλία

Περιεχόμενα

0.1 Ορισμοί και είδη σφαλμάτων

Στην επιστήμη η λέξη *σφάλμα* (error) δεν φέρει την συνηθισμένη έννοια που υπάρχει στους όρους *λάθος* ή *παραδρομή (κ. γκάφα).* Το σφάλμα στις επιστημονικές μετρήσεις εννοεί την αναπόφευκτη αβεβαιότητα που εμφανίζεται σε όλες τις μετρήσεις. Έτσι, τα σφάλματα δεν είναι λάθη που μπορούν να εξαλειφθούν τελείως όταν κάποιος είναι πολύ προσεκτικός ή όταν χρησιμοποιούνται πειραματικές συσκευές (όργανα μετρήσεων) μεγάλης ακρίβειας. Το καλύτερο που μπορεί να ελπίζει κανείς είναι να κρατήσει τα σφάλματα όσο γίνεται μικρότερα και να έχει μία αξιόπιστη εκτίμηση για το πόσο μεγάλα είναι αυτά.

0.1.1 Απόλυτο και Σχετικό Σφάλμα

Άμεση μέτρηση μιάς φυσικής ποσότητας συμβαίνει όταν διαβάζουμε την κλίμακα ή την ψηφιακή οθόνη ενός οργάνου (π.χ. χάρακας, χρονόμετρο, βολτόμετρο κλπ). Έτσι, θα ονομάζουμε *μέτρηση* την άμεση μέτρηση και *εκτίμηση* τον υπολογισμό μιας φυσικής παραμέτρου από άλλες άμεσα μετρούμενες ποσότητες (π.χ. γίνεται εκτίμηση της αντίστασης R από τις μετρούμενες ποσότητες τάση V και ρεύμα I). Το αποτέλεσμα της άμεσης μέτρησης ή της εκτίμησης μιάς φυσικής ποσότητας x γράφεται:

$$x = x_{best} \pm \delta x \tag{1}$$

όπου x_{best} = (η καλύτερη εκτίμηση του x)

(χρησιμοποιούμε τον όρο *εκτίμηση* γιατί όπως θα δούμε στα επόμενα το x_{best} μπορεί να προκύψει και σαν μέσος όρος από επαναλαμβανόμενες μετρήσεις της *ίδιας* φυσικής ποσότητας με την *ίδια* μέθοδο μέτρησης.)

και δx = (απόλυτο σφάλμα της μέτρησης).

Το απόλυτο σφάλμα είναι πάντοτε ένας θετικός αριθμός: $\delta x >$0.

Η εξίσωση (1) εκφράζει την πεποίθεσή μας ότι η σωστή τιμή της x βρίσκεται πιθανότατα στο διάστημα μεταξύ x_{best}-δx και x_{best}+δx.

$$\text{Το σχετικό σφάλμα της } x = \frac{\delta x}{\mid x_{best} \mid}$$

είναι μία αδιάστατη θετική ποσότητα (δίχως μονάδες) όπου το σύμβολο $|x_{best}|$ είναι η απόλυτη τιμή της x_{best}.

$$\text{Το επι τοις εκατό σφάλμα της } x = \frac{\delta x}{\mid x_{best} \mid} \times 100\%$$

είναι μία προσεγγιστική ένδειξη για την ποιότητα μιάς μέτρησης. Έτσι, περίπου 10% σχετικό σφάλμα είναι συνήθως ένδειξη μιάς αρκετά χονδρικής μέτρησης (π.χ. στα 10 Km μία χονδρική μέτρηση μπορεί να εμφανίζει σφάλμα περίπου 1 Km). Ένα σχετικό σφάλμα περίπου 1% ή 2% χαρακτηρίζει μία προσεκτική μέτρηση και είναι κοντά στο βέλτιστο που μπορούμε να ελπίζουμε στα πειράματα ενός Εισαγωγικού Εργαστηρίου Φυσικής.

0.1.2 Τυχαία και Συστηματικά Σφάλματα

Τυχαία (random) σφάλματα είναι όλες οι πειραματικές αβεβαιότητες που μπορούν να αποκαλυφθούν με επανάληψη των μετρήσεων. Εκφράζουν την αναπόφευκτη αβεβαιότητα που εμφανίζεται σε όλες τις μετρήσεις.

Συστηματικά (systematic) σφάλματα είναι όλες οι πειραματικές αβεβαιότητες που *δέν* μπορούν να αποκαλυφθούν με επανάληψη των μετρήσεων. Ανθρώπινα λάθη και κακή ρύθμιση των οργάνων μέτρησης (π.χ. όταν η στάθμη ενός ζυγού δεν είναι σωστά ευθυγραμμισμένη) είναι συνηθισμένες πηγές μεγάλων συστηματικών σφαλμάτων.

Αξίζει να δώσετε ιδιαίτερη προσοχή σε μερικά παραδείγματα συστηματικών σφαλμάτων που οφείλονται σε ανθρώπινα λάθη λόγω απροσεξίας ή απειρίας των πειραματιστών. Το φαινόμενο της παράλλαξης που προκαλείται π.χ. όταν τοποθετούμε το κεφάλι μας από την μία πλευρά και μετά από την αντίθετη του δείκτη κατά την ανάγνωση μιας μετρικής κλίμακας (σε ένα χρονόμετρο ή αναλογικό βολτόμετρο κλπ) είναι σύνηθες παράδειγμα απροσεξίας. Ένα παράδειγμα απειρίας εμφανίζεται κατά την εκτίμηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g με απλό εκκρεμές, όπου το μήκος ℓ που υπεισέρχεται στον τύπο g=4π$^2\ell/T^2$ πρέπει να το μετράτε από το σημείο ανάρτησης του νήματος έως το κέντρο βάρους του βαριδίου και όχι από το μήκος του νήματος μόνον.

0.1.3 Σημαντικά ψηφία

Όταν καθορισθεί το σφάλμα δx μιάς μέτρησης, τότε τα σημαντικά ψηφία της x_{best} μπορούν να καθορισθούν στην τελική απάντηση.

Γενικός κανόνας: Σε κάθε τελική απάντηση το τελευταίο σημαντικό ψηφίο της x_{best} πρέπει να είναι συνήθως της ίδιας τάξης μεγέθους (που σημαίνει στην ίδια δεκαδική υποδιαίρεση) με το σφάλμα δx.

Παραδείγματα
92.81 $\pm$ 0.3 = 92.8 $\pm$ 0.3
92.81 $\pm$ 3 = 93 $\pm$ 3
92.81 $\pm$ 30 = 90 $\pm$ 30
x = 3.1234 $\times$ 10^4 $\pm$ 2 m = (3.1234 $\pm$ 0.0002) $\times$ 10^4 m
v = 8.123456 $\pm$ 0.0312 m/s = 8.12 $\pm$ 0.03 m/s

Όταν εκτελούμε μία σειρά αριθμητικών πράξεων για να βρούμε τη x_{best}, π.χ. με υπολογιστή χειρός, δεν χρειάζεται να στρογγυλεύουμε τις τιμές σε κάθε βήμα, αλλά στο τελικό αποτέλεσμα μόνο.

0.1.4 Αντιστοιχία μεταξύ Σημαντικών ψηφίων και Σχετικών Σφαλμάτων

Το σχετικό σφάλμα σχετίζεται με τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων. Αυτό μπορεί να φανεί εύκολα αν δεχθούμε ότι κάθε αριθμός με N σημαντικά ψηφία παρουσιάζει σφάλμα (αβεβαιότητα) περίπου 1 στο N-ιοστό ψηφίο. Έτσι οι αριθμοί x=21 και y=0.21, που έχουν δύο σημαντικά ψηφία, γράφονται σύμφωνα με την σύμβαση που αναφέραμε ως: x=21 $\pm$ 1 και y=0.21 $\pm$ 0.01. Παρόλο που οι δύο αριθμοί έχουν εντελώς διαφορετικά απόλυτα σφάλματα παρατηρούμε ότι εμφανίζουν το ίδιο σχετικό σφάλμα:

$$\frac{\delta x}{\mid x_{best} \mid} = \frac{\delta y}{\mid y_{best} \mid} = \frac{1}{21} = \frac{0.01}{0.21} = 0.05 = 5\%$$

Έτσι, το γεγονός ότι οι αριθμοί 21 και 0.21 (ή 2.1, ή 0.0021 κλπ) έχουν δύο σημαντικά ψηφία είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι είναι 5% αβέβαιοι. Με τον ίδιο τρόπο, το 21.0, με 3 σημαντικά ψηφία είναι 0.5% αβέβαιο. Ατυχώς, αυτή η χρήσιμη αντιστοιχία είναι μόνο προσεγγιστική.

Για παράδειγμα ο αριθμός 10, με δύο σημαντικά ψηφία, σημαίνει: 10 ± 1= 10 ± 10%, ενώ ο αριθμός 99 (με δύο σημαντικά ψηφία και αυτός) σημαίνει: 99 ± 1=99 ± 1%. Γίνεται λοιπόν εμφανές ότι το σχετικό σφάλμα που συνδέεται με δύο σημαντικά ψηφία βρίσκεται στο διάστημα μεταξύ 1% και 10%, ανάλογα με το πρώτο ψηφίο του αριθμού. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μία προσεγγιστική αντιστοιχία μεταξύ σημαντικών ψηφίων και σχετικών σφαλμάτων:

Πίνακας 1: Προσεγγιστική αντιστοιχία μεταξύ σημαντικών ψηφίων και σχετικών σφαλμάτων.

Αριθμός σημαντικών ψηφίων	Σχετικό σφάλμα μεταξύ	ή χονδρικά
1	10% και 100%	50%
2	1% και 10%	5%
3	0.1% και 1%	0.5%

0.2 Κανόνες Μετάδοσης Σφαλμάτων

Συνήθως ο καθορισμός μιας φυσικής παραμέτρου προκύπτει από την μέτρηση άλλων φυσικών ποσοτήτων (π.χ. η ηλεκτρική αντίσταση προκύπτει από την μέτρηση της τάσης και του ρεύματος). Για αυτές τις περιπτώσεις πρέπει να καθορισθούν κανόνες μετάδοσης των σφαλμάτων από τις μετρήσεις. Γενικώς, οι κανόνες μετάδοσης σφαλμάτων αναφέρονται στην περίπτωση όπου έχουν μετρηθεί διάφορες ποσότητες x,..., w με σφάλμα δx,..., δw και ζητάμε να χρησιμοποιηθούν αυτές οι τιμές για να υπολογίσουμε μία ποσότητα q. Τα σφάλματα στα x,..., w μεταδίδονται μέσα από τον υπολογισμό και προκαλούν ένα σφάλμα στο q σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες.

0.2.1 Αθροίσματα και Διαφορές

Αν

$$q = x + ... + z - (u + ... + w), \tag{2}$$

τότε

$$(\delta q)^2 = (\delta x)^2 + ... + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + ... + (\delta w)^2 \tag{3}$$

μόνον άν τα σφάλματα είναι *ανεξάρτητα* και *τυχαία.*

Άν τα σφάλματα δεν είναι *ανεξάρτητα* μεταξύ τους τότε:

$$\delta q \leq \delta x + ... + \delta z + \delta u + ... + \delta w \tag{4}$$

που ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις.

0.2.2 Γινόμενα και Πηλίκα

Αν

$$q = \frac{x \times ... \times z}{u \times ... \times w}, \tag{5}$$

τότε

$$\left(\frac{\delta q}{q}\right)^2 = \left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + ... + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{u}\right)^2 + ... + \left(\frac{\delta w}{w}\right)^2 \tag{6}$$

μόνον άν τα σφάλματα είναι *ανεξάρτητα* και *τυχαία*.

Άν τα σφάλματα δεν είναι *ανεξάρτητα* μεταξύ τους τότε:

$$\frac{\delta q}{\mid q \mid} \leq \frac{\delta x}{\mid x \mid} + ... + \frac{\delta z}{\mid z \mid} + \frac{\delta u}{\mid u \mid} + ... + \frac{\delta w}{\mid w \mid} \tag{7}$$

που ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις.

0.2.3 Μετρούμενη ποσότητα επί σταθερό αριθμό

Αν B είναι ένας γνωστός και σταθερός αριθμός (π.χ. B=π) και

$$q = Bx, \tag{8}$$

τότε

$$\delta q = B\delta x \tag{9}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\delta q}{\mid q \mid} = \frac{\delta x}{\mid x \mid} \tag{10}$$

0.2.4 Σφάλμα μιάς δύναμης

Αν n είναι ένας γνωστός και σταθερός αριθμός και

$$q = x^n, \tag{11}$$

τότε

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n|\frac{\delta x}{|x|} \tag{12}$$

Η εξίσωση (12) δείχνει ότι για $n > 1$ το μεταδιδόμενο σφάλμα δq μεγεθύνεται, ενώ για $n < 1$ το σφάλμα στο δq σμικρύνεται (π.χ. όταν υπάρχει τετραγωνική ρίζα, όπου n=1/2, το σφάλμα στο δq υποδιπλασιάζεται). Το συμπέρασμα είναι ότι για να κρατήσουμε το δq όσο γίνεται μικρότερο πρέπει να μετρήσουμε με όσο γίνεται μεγαλύτερη ακρίβεια τις φυσικές ποσότητες που υψώνονται σε κάποια δύναμη $n > 1$, ώστε να επιτύχουμε το ελάχιστο δυνατό σφάλμα στο δx.

0.2.5 Σφάλμα σε συνάρτηση μιάς μεταβλητής

Αν *q=q(x)* είναι μια συνάρτηση του *x* (π.χ. μια τριγωνομετρική ή εκθετική ή λογαριθμική συνάρτηση) τότε:

$$\delta q = \left| \frac{dq(x)}{dx} \right| \delta x \tag{13}$$

Στην περίπτωση που η *q(x)* είναι μια περίπλοκη συνάρτηση μιάς μεταβλητής τότε είναι ευκολότερο να χρησιμοποιείτε τον ισοδύναμο τύπο:

$$\delta q = \mid q(x_{best} + \delta x) - q(x_{best}) \mid \tag{14}$$

0.2.6 Γενικός τύπος για μετάδοση σφάλματος

Αν $q = q(x, ..., z)$ είναι μια συνάρτηση των x,...,z τότε:

$$(\delta q)^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x} \delta x \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \delta z \right)^2 \tag{15}$$

μόνον άν τα σφάλματα είναι *ανεξάρτητα* και *τυχαία*. (Για τις μερικές παραγώγους $\partial q/\partial x$,..., $\partial q/\partial z$ βλέπε το μαθηματικό συμπλήρωμα στο τέλος των σημειώσεων).

Άν τα σφάλματα δεν είναι *ανεξάρτητα* μεταξύ τους τότε:

$$\delta q \leq \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right| \delta x + ... + \left| \frac{\partial q}{\partial z} \right| \delta z \tag{16}$$

που ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις.

0.2.7 Παραδείγματα Μετάδοσης Σφαλμάτων

1) Περί ανεξαρτησίας σφαλμάτων

Για να υπολογίσουμε την μετάδοση σφάλματος της $q = x(y - z\sin u)$ από τις μετρούμενες ποσότητες x, y, z, u ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα: α) υπολογίζουμε την συνάρτηση $\delta(\sin u)$ από την εξίσωση (13), β) μετά το γινόμενο z επί $\sin u$ από την εξίσωση (3), γ) μετά την διαφορά $\delta(y - z\sin u)$ από την εξίσωση (3), δ) και τέλος το γινόμενο $x(y - z\sin u)$ από την εξίσωση (3).

Αυτή η βήμα-προς-βήμα διαδικασία δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε συναρτήσεις που περιλαμβάνουν τουλάχιστον μια μεταβλητή η οποία εμφανίζεται περισσότερο από μια φορά, όπως στην: $q = y - x\sin y$. Οι δύο όροι δεν είναι *ανεξάρτητοι* γιατί εξαρτώνται από την y. Έτσι, για να υπολογίσουμε το σφάλμα δq πρέπει να εφαρμόσουμε τον γενικό τύπο από την εξ.16.

2) Εξάρτηση σφαλμάτων στις δυνάμεις

Από την εξίσωση (12) γνωρίζουμε ότι το σφάλμα στην συνάρτηση q=x^2 είναι:

$$\frac{\delta q}{\mid q \mid} = 2\frac{\delta x}{\mid x \mid}$$

Ακολουθώντας όμως ένα απατηλό επιχείρημα μπορούμε να θεωρήσουμε το q=$x^2 = x \times x$, οπότε σύμφωνα με την εξίσωση (6) για το γινόμενο έχουμε:

$$\left(\frac{\delta q}{q}\right)^2 = \left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 \Longrightarrow \frac{\delta q}{q} = (2)^{1/2}\frac{\delta x}{\mid x \mid}$$

το συμπέρασμα είναι λάθος. Πριν δείτε την απάντηση, μπορείτε να βρείτε πού είναι το λάθος ;

(Το λάθος είναι ότι η εξίσωση (6) ισχύει μόνον αν τα σφάλματα στους διάφορους παράγοντες είναι ανεξάρτητα. Όταν λοιπόν γράφουμε το q=$x^2 = x \times x$, οι δύο όροι (x και x) δέν είναι ανεξάρτητοι και επομένως η εξίσωση (6) δεν ισχύει.)

3) Εκτίμηση του g με ένα απλό εκκρεμές

Η περίοδος ταλάντωσης T ενός απλού εκκρεμούς είναι T=2π$(\ell/g)^{1/2}$. Μέτρηση του μήκους ℓ από το σημείο αναρτήσεως του νήματος έως το κέντρο βάρους του βαριδίου και της T μπορεί να μας δώσει μία εκτίμηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g:

$$g = 4\pi^2\ell/T^2$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας δίνει το g σαν συνάρτηση των τριών παραγόντων 4π^2, ℓ και T^2. Εφόσον τα αντίστοιχα σφάλματα είναι ανεξάρτητα και τυχαία μπορούμε να εφαρμόσουμε την βήμα-προς-βήμα μέθοδο μετάδοσης σφαλμάτων. Έτσι, ο παράγοντας 4π^2 δεν έχει σφάλμα ενώ το σχετικό σφάλμα στο T^2 δίνεται από την εξίσωση (12):

$$\frac{\delta T^2}{T^2} = 2\frac{\delta T}{T}$$

Άρα το σχετικό σφάλμα στην απάντησή μας για το g δίνεται από την εξίσωση (6):

$$\left(\frac{\delta g}{g}\right)^2 = \left(\frac{\delta \ell}{\ell}\right)^2 + \left(2\frac{\delta T}{T}\right)^2$$

4) Εκτίμηση του συντελεστή διάθλασης από το νόμο του $Snell$

Όταν μία ακτίνα φωτός εισέρχεται από τον αέρα σε γυαλί οι γωνίες εισόδου ϑ_i και διάθλασης ϑ_r ορίζονται ως η απόκλιση από την κάθετο στο σημείο εισόδου της διεπιφάνειας και σχετίζονται μεταξύ τους με το νόμο του $Snell$: $\sin\vartheta_i$=$\eta\sin\vartheta_r$, όπου η είναι ο συντελεστής διάθλασης του γυαλιού. Έτσι, μετρώντας τις γωνίες εισόδου ϑ_i και διάθλασης ϑ_r μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση του η:

$$\eta = \frac{sin\theta_i}{sin\theta_r}$$

Επειδή ο συντελεστής διάθλασης η είναι μια σχετικά περίπλοκη τριγωνομετρική συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών μας διευκολύνει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (6) για το πηλίκο, σε ένα βήμα-προς-βήμα υπολογισμό, παρά να εφαρμόσουμε το γενικό τύπο χρησιμοποιώντας την εξίσωση (15):

$$\left(\frac{\delta \eta}{\eta}\right)^2 = \left(\frac{\delta \sin\theta_i}{\sin\theta_i}\right)^2 + \left(\frac{\delta \sin\theta_r}{\sin\theta_i}\right)^2$$

Για να βρούμε το σχετικό σφάλμα του ημιτόνου κάθε γωνίας χρησιμοποιούμε την εξίσωση (13) για το σφάλμα συνάρτησης μιάς μεταβλητής:

$$\delta \sin\theta = \left|\frac{d\sin\theta}{d\theta}\right| \delta \sin\theta = |\cos\theta| \delta\theta, \text{ σε } rad$$

Έτσι το σχετικό σφάλμα είναι:

$$\frac{\delta \sin\theta}{|\sin\theta|} = \mid cot\theta \mid \delta\theta, \text{ σε } rad$$

Προσέχουμε ότι στον υπολογισμό σφαλμάτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων οι γωνίες υπολογίζονται πάντοτε σε ακτίνια (1 rad=π/180^o).

0.3 Στατιστική Ανάλυση Σφαλμάτων

0.3.1 Μέση τιμή και Τυπική Απόκλιση

Υποθέτουμε ότι συλλέγονται N μετρήσεις x_1, x_2,..., x_N για την ίδια ποσότητα x, όλες με την ίδια μέθοδο. Με την προϋπόθεση ότι όλα τα σφάλματα είναι τυχαία και μικρά παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

1) Μέση τιμή

Η καλύτερη εκτίμηση για την πραγματική τιμή του x είναι η μέση τιμή (*mean value*) των N μετρήσεων:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = x_{best} \tag{17}$$

2) Τυπική απόκλιση

Το μέσο εύρος της κατανομής των σφαλμάτων γύρω από την μέση τιμή των N μετρήσεων x_1, x_2,..., x_N δίνεται από την τυπική απόκλιση (*standard deviation*):

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 \tag{18}$$

Αυτός ο ορισμός της τυπικής απόκλισης, που συχνά αποκαλείται και τυπική απόκλιση δείγματος (*sample standard deviation*), είναι ο πιό κατάλληλος για το σκοπό μας. Η πληθυσμιακή τυπική απόκλιση (*population standard deviation*) βρίσκεται αντικαθιστώντας τον παράγοντα (N-1) στον παρονομαστή με το N. Όσοι λοιπόν χρησιμοποιούν έτοιμες συναρτήσεις υπολογιστών για να βρούν την τυπική απόκλιση πρέπει να διευκρινίσουν ποιόν από τους δύο ορισμούς χρησιμοποιεί ο υπολογιστής.

Η τυπική απόκλιση σ_x εκφράζει το εύρος της κατανομής των σφαλμάτων που έχει για κέντρο της την μέση τιμή. Το εύρος σ_x είναι το όριο εμπιστοσύνης του 68%, που μας λέει ότι υπάρχει 68% πιθανότητα για κάθε μια μέτρηση x_1, x_2,..., x_N να βρίσκεται μέσα σε μία απόσταση σ_x από την πραγματική τιμή $\overline{x} = x_{best}$.

Στην πράξη αυτό που ξέρουμε είναι οι N μετρήσεις x_1, x_2,..., x_N, όπου το N είναι τόσο μεγάλο όσο ο διαθέσιμος χρόνος μας και η υπομονή μας επιτρέπει να το κάνουμε. Βασιζόμενοι σε αυτές τις N μετρημένες τιμές, η καλύτερη εκτίμηση της πραγματικής τιμής του x είναι η μέση τιμή $\overline{x}$ και η καλύτερη εκτίμηση του εύρους της κατανομής των N τιμών γύρω από την $\overline{x}$ είναι η τυπική απόκλιση σ_x.

0.3.2 Μετάδοση σφαλμάτων στην σ_q της $q(x, y, ..., z)$

Το πρόβλημα της μετάδοσης σφαλμάτων προκύπτει όταν μετρούμε έναν αριθμό διαφορετικών φυσικών ποσοτήτων $x, y, ..., z$, όλες με τα δικά τους σφάλματα, και μετά θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτές τις ποσότητες για να υπολογίσουμε την συνάρτηση $q(x, y, ..., z)$. Αν οι διαφορετικές ποσότητες $x, y, ..., z$ υπόκεινται μόνον σε τυχαία σφάλματα τότε η κάθε μια θα εμφανίζει ένα εύρος κατανομής σ_x, σ_y,...,σ_z. Αποδεικνύεται ότι οι τιμές της $q(x, y, ..., z)$ κατανέμονται γύρω από την καλύτερη εκτίμηση της $q(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z})$ με τυπική απόκλιση (εύρος):

$$\sigma_q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\sigma_z\right)^2 \tag{19}$$

Η εξίσωση (19) έχει ανάλογη μορφή με αυτήν της εξίσωσης (15). Αυτό δείχνει ότι η τυπική απόκλιση σ_q υπέχει τον ρόλο της δq για την μετάδοση *ανεξάρτητων και τυχαίων* σφαλμάτων.

Λήμμα Στην περίπτωση που $q(x, y, ..., z) = x + y + ... + z$ τότε η $\sigma_q^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + ... + \sigma_z^2$, γιατί οι μερικές παράγωγοι στην εξ.19 είναι μονάδα.

0.3.3 Τυπική απόκλιση από την μέση τιμή $\sigma_{\overline{x}}$

Η τυπική απόκλιση από την μέση τιμή $\sigma_{\overline{x}}$ βρίσκεται εφαρμόζοντας την εξ.19 για τις N μετρήσεις x_1, x_2,..., x_N της ίδιας ποσότητας x:

$$(\sigma_{\overline{x}})^2 = \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_1}\sigma_{x_1}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_N}\sigma_{x_N}\right)^2$$

Επειδή οι x_1, x_2,..., x_N είναι όλες μετρήσεις της ίδιας ποσότητας x το εύρος κατανομής είναι το ίδιο για όλες και ίσο με σ_x: $\sigma_{x_1} = ... = \sigma_{x_N} = \sigma_x$.

Από τον ορισμό της μέσης τιμής (εξ.17) προκύπτει ότι όλες οι μερικές παράγωγοι είναι ίσες:

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_1} = ... = \frac{\partial \overline{x}}{\partial x_N} = \frac{1}{N}$$

Άρα η $(\sigma_{\overline{x}})^2$ ανάγεται στην:

$$(\sigma_{\overline{x}})^2 = \left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{N}\sigma_x\right)^2 = N\frac{\sigma_x^2}{N^2}$$

Επομένως η τυπική απόκλιση από την μέση τιμή $\sigma_{\overline{x}}$ είναι:

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{N^{1/2}} = \text{τυχαίο σφάλμα} \tag{20}$$

Γίνεται ξεκάθαρο πλέον ότι όταν μετράμε μια ποσότητα x πολλές φορές τότε η μέση τιμή $\overline{x}$ αυτών των μετρήσεων είναι η καλύτερη εκτίμηση της x ($\overline{x} = x_{best}$ στην εξ.1) ενώ η τυπική απόκλιση από την μέση τιμή $\sigma_{\overline{x}}$ είναι μια καλή μέτρηση του τυχαίου σφάλματος ($\sigma_{\overline{x}} = \delta x$ στην εξ.1). Έτσι η εξ.1 γίνεται:

$$x_{best} \pm \delta x = \overline{x} \pm \sigma_{\overline{x}} = \overline{x} \pm \frac{\sigma_x}{N^{1/2}} \tag{21}$$

που σημαίνει ότι, βασιζόμενοι στις παρατηρήσεις μας, αναμένουμε με πιθανότητα 68% κάθε μέτρηση της x, που έγινε με τον ίδιο τρόπο, να βρίσκεται στο διάστημα μεταξύ $\overline{x} - \sigma_{\overline{x}}$ και $\overline{x} + \sigma_{\overline{x}}$.

0.3.4 Κριτήριο αποδοχής ενός μετρημένου αποτελέσματος

Συνήθως η πειραματική εκτίμηση στην εξ.21 μπορεί να συγκριθεί με μια γνωστή ή αναμενόμενη τιμή x_{exp} που έχει προκύψει είτε από την θεωρία είτε από άλλα ακριβέστερα πειράματα. Η *ασυμφωνία* της x_{exp} από την x_{best}: $|x_{best} - x_{exp}|$, παρέχει ένα κριτήριο αποδοχής του μετρημένου αποτελέσματος x_{best}:

$$t = \frac{|x_{best} - x_{exp}|}{\sigma_{\overline{x}}} \tag{22}$$

όπου t είναι ο αριθμός που μας λέει ότι η x_{best} διαφέρει από την x_{exp} κατά t τυπικές αποκλίσεις. Η $\sigma_{\overline{x}}$ είναι η τυπική απόκλιση της $x_{best} = \overline{x}$. Για τα πειράματα ενός εκπαιδευτικού εργαστηρίου φυσικής μπορούμε να καταρτίσουμε κριτήρια αποδοχής που στηρίζονται στην ασυμφωνία $|x_{best} - x_{exp}|$ =$t\sigma_{\overline{x}}$. Έτσι:

Άν $|x_{best} - x_{exp}| \leq 1.8\sigma_{\overline{x}}$ το αποτέλεσμα *είναι αποδεκτό.*

Άν $|x_{best} - x_{exp}| \geq 2.6\sigma_{\overline{x}}$ το αποτέλεσμα *δεν είναι αποδεκτό.* Άρα πρέπει να επαναλάβουμε το πείραμα (την εργαστηριακή άσκηση).

Άν $1.9\sigma_{\overline{x}} \leq |x_{best} - x_{exp}| \leq 2.5\sigma_{\overline{x}}$ *το πείραμα δεν καταλήγει σε συμπέρασμα.* Άρα πρέπει να επαναλάβουμε τις μετρήσεις προσπαθώντας να εντοπίσουμε και τα *συστηματικά σφάλματα.*

Όταν υπάρχουν σημαντικά *συστηματικά* σφάλματα τότε η $\sigma_{\overline{x}}$ δίνει την συνιστώσα του τυχαίου σφάλματος: δx_{ran}=$\sigma_{\overline{x}}$. Αν λοιπόν υπάρχει τρόπος να εκτιμήσουμε την συνιστώσα του συστηματικού σφάλματος δx_{sys} τότε, υποθέτοντας ότι τα δx_{ran} και δx_{sys} είναι *ανεξάρτητα,* μια λογική έκφραση για το ολικό σφάλμα δx_{tot} είναι:

$$(\delta x_{tot})^2 = (\delta x_{ran})^2 + (\delta x_{sys})^2 \tag{23}$$

Ονομάζουμε *λογική* την έκφραση της $(\delta x_{tot})^2$ γιατί δεν υπάρχει αυστηρή μαθηματική απόδειξη της εξ.23.

0.3.5 Παράδειγμα στη Στατιστική Ανάλυση Σφαλμάτων

Αυτό το παράδειγμα εξετάζει την περίπτωση όπου η στατιστική ανάλυση δεν μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας στις μετρήσεις αλλά μπορεί στις τελικές απαντήσεις.

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να μετρήσουμε την σταθερά ελατηρίου k χρονομετρώντας τις ταλαντώσεις μιάς μάζας m που είναι στεραιωμένη στο άκρο του ελατηρίου. Γνωρίζουμε από τη στοιχειώδη μηχανική ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι T=2π$(m/k)^{1/2}$. Έτσι, μετρώντας τα T και m βρίσκουμε την k:

$$k = 4\pi^2 m/T^2$$

Ο απλούστερος τρόπος να βρούμε την k είναι να χρησιμοποιήσουμε μία γνωστή μάζα m και να κάνουμε διάφορες προσεκτικές μετρήσεις της T. Όμως είναι πιό ενδιαφέρον να χρονομετρήσουμε πολλές φορές την T για πολλές διαφορετικές μάζες m γιατί, π.χ., με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι $T^2 \sim m$ καί να μετρήσουμε την k). Έστω λοιπόν ότι παίρνουμε τις μετρήσεις που παρουσιάζονται στις πρώτες δύο γραμμές του Πίνακα.

Πίνακας 2: Μετρήσεις της σταθεράς ελατηρίου.

μάζα m (kg)	0.513	0.581	0.634	0.691	0.752	0.834	0.901	0.950
περίοδος T (sec)	1.24	1.33	1.36	1.44	1.50	1.59	1.65	1.69
$k = 4\pi^2 m/T^2$	13.17	12.97	κλπ					

Προφανώς δέν έχει νόημα να υπολογίσουμε μέσες τιμές για τις *διαφορετικές* μάζες ή τις *διαφορετικές* περιόδους γιατί δεν είναι διαφορετικές μετρήσεις της *ίδιας* ποσότητας. Ούτε μπορούμε να μάθουμε κάτι για τα σφάλματα συγκρίνοντας τις διαφορετικές τιμές της μάζας ή της περιόδου. Παρόλα αυτά μπορούμε να συνδιάσουμε κάθε τιμή της m με την αντίστοιχή της T για να υπολογίσουμε την k, όπως δείχνουμε στην τελευταία γραμμή του πίνακα. Οι απαντήσεις για την k στην τελευταία γραμμή *είναι* όλες μετρήσεις της *ίδιας* ποσότητας και επομένως υπόκεινται σε στατιστική ανάλυση. Συγκεκριμένα, η καλύτερη εκτίμηση της k είναι η μέση τιμή: $k_{best} = \overline{k}$=13.16 N/m και το τυχαίο σφάλμα δk_{ran} είναι η τυπική απόκλιση από τη μέση τιμή: $\sigma_{\overline{x}}$=0.06 N/m (κάνετε όλες τις πράξεις για άσκηση). Έτσι, η τελική απάντηση είναι: k=13.16 $\pm$ 0.06 N/m.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο ζυγός που χρησιμοποιήθηκε για την μέτρηση των μαζών είχε συστηματικό σφάλμα περίπου 1% και το χρονόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για την μέτρηση της περιόδου είχε 0.5%. Επειδή τα σφάλματα στην m και T είναι ανεξάρτητα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξ.6 για να βρούμε την συνιστώσα του συστηματικού σφάλματος δk_{sys}:

$$\left(\frac{\delta k_{sys}}{k_{best}}\right)^2 = \left(\frac{\delta m_{sys}}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\delta T_{sys}}{T}\right)^2 = (1\%)^2 + (0.5\%)^2$$

$$\Rightarrow \delta k_{sys} = (1.4\%) \times k_{best} = 0.014 \times (13.16 N/m) = 0.18 N/m$$

Η ολική τυπική απόκλιση για την k μπορεί να βρεθεί από την εξ.23:

$$(\delta k_{tot})^2 = (\delta k_{ran})^2 + (\delta k_{sys})^2 = (0.06)^2 + (0.18)^2 \Rightarrow \delta k_{tot} = 0.19 N/m$$

Η τελική απάντηση είναι: k=$k_{best} \pm \delta k_{tot}$= 13.16 ± 0.19 N/m = 13.2 ± 0.2 N/m.

0.4 Προσαρμογή καμπύλης σε πειραματικά δεδομένα με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων

Θεωρούμε N ζεύγη μετρήσεων (x_1, y_1),...,(x_N, y_N) από δύο μεταβλητές x και y. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι να βρούμε τις βέλτιστες τιμές για τις παραμέτρους της καμπύλης προσαρμογής των δεδομένων από τη γραφική παράσταση της y ως συνάρτηση της x. Υποθέτουμε ότι μόνον οι μετρήσεις της y εμφανίζουν υπολογίσιμα σφάλματα ενώ για την x είναι αμελητέα.

0.4.1 Ευθεία γραμμή: $y = A + Bx$

Αν η y ακολουθεί μια γραμμική σχέση: $y = A + Bx$, και αν όλες οι μετρήσεις της y έχουν τα *ίδια σφάλματα*, τότε η βέλτιστη εκτίμηση των σταθερών A και B είναι:

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta} \tag{24}$$

και

$$B = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta} \tag{25}$$

όπου ο παρονομαστής Δ είναι:

$$\Delta = N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right)^2 \tag{26}$$

Με βάση τα μετρημένα σημεία, η βέλτιστη εκτίμηση του σφάλματος στην μέτρηση της y είναι:

$$(\sigma_y)^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i)^2 \tag{27}$$

Τα σφάλματα των A και B είναι:

$$(\sigma_A)^2 = (\sigma_y)^2 \frac{\sum x_i^2}{\Delta} \tag{28}$$

και

$$(\sigma_B)^2 = (\sigma_y)^2 \frac{N}{\Delta} \tag{29}$$

0.4.2 Ευθεία γραμμή από την αρχή των αξόνων: $y = Bx$

Αν η y ακολουθεί μια γραμμική σχέση: $y = Bx$, και αν όλες οι μετρήσεις της y έχουν τα *ίδια σφάλματα*, τότε η βέλτιστη εκτίμηση της σταθεράς B είναι:

$$B = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \tag{30}$$

Με βάση τα μετρημένα σημεία, η βέλτιστη εκτίμηση του σφάλματος στην μέτρηση της y είναι:

$$(\sigma_y)^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (y_i - Bx_i)^2 \tag{31}$$

Το σφάλμα του B είναι:

$$(\sigma_B)^2 = \frac{(\sigma_y)^2}{\sum x_i^2} \tag{32}$$

0.4.3 Εκθετική συνάρτηση: $y = Ae^{Bx}$

Αν η y ακολουθεί μια γραμμική σχέση: y=Ae^{Bx}, τότε μπορεί να μετατραπεί σε μια γραμμική έκφραση:

$$y = Ae^{Bx} \Leftrightarrow z = \ln(y) = \ln(A) + Bx \tag{33}$$

Με αυτή τη μετατροπή μπορούμε να εφαρμόσουμε την γραμμική μέθοδο προσαρμογής με ελάχιστα τετράγωνα (εξ.24, 25, 26) για τις μεταβλητές z και x. Όμως, ακόμη και αν όλες οι μετρήσεις της y έχουν τα *ίδια σφάλματα* τότε τα σφάλματα στις τιμές $z_i = \ln(y_i)$ δεν είναι ίδια για κάθε z_i. Σύμφωνα με τους κανόνες μετάδοσης σφάλματος (εξ.13) έχουμε $q = z = \ln(y)$:

$$\sigma_z = \left| \frac{dz(x)}{dx} \right| \sigma_y = \frac{\sigma_y}{y} \tag{34}$$

Έτσι αν τα σ_y είναι ίδια για όλες τις μετρήσεις, το σ_z μεταβάλλεται (το σ_z αυξάνει όσο το y μειώνεται). Προφανώς η μεταβλητή $z = \ln(y)$ δεν ικανοποιεί την απαίτηση για ίδια σφάλματα σε κάθε μέτρηση.

Παρόλο που υπάρχει αυστηρή μέθοδος για αυτή την περίπτωση (βασίζεται σε $weighted\ averages$), στην πράξη συχνά δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ούτε ότι τα σφάλματα των y_i είναι πράγματι σταθερά. Συνήθως τα σφάλματα παρουσιάζουν μικρή μεταβολή και κάνει μικρή διαφορά ποια μέθοδος χρησιμοποιείται. Σε κάθε περίπτωση, όταν τα σφάλματα δεν είναι γνωστά, η απευθείας χρήση των εξισώσεων 24 εως 26 δίνει μια απλή και λογική (αν όχι την βέλτιστη) εκτίμηση των σταθερών A και B στην εξ.33.

Έτσι, οι εξισώσεις 24, 25 και 26 (όχι όμως και οι εξ.27, 28, 29) μπορούν να χρησιμοποιούνται για την προσαρμογή της καλύτερης ευθείας στην εξ.33.

0.4.4 Γραμμική εξάρτηση από δύο μεταβλητές: $z = A + Bx + Cy$

Αν έχουμε μια σειρά μετρήσεων (x_i, y_i, z_i), $i = 1, ..., N$, όπου οι z_i έχουν το ίδιο σφάλμα ενώ οι x_i και y_i έχουν αμελητέα σφάλματα, τότε άν η μεταβλητή z εξαρτάται γραμμικά από τις δύο άλλες x και y: $z = A + Bx + Cy$, η βέλτιστη εκτίμηση των σταθερών συντελεστών A, B, C καθορίζεται από την λύση του συστήματος *κανονικών εξισώσεων*:

$$\begin{aligned} AN + B\sum_{i=1}^{N} x_i + C\sum_{i=1}^{N} y_i &= \sum_{i=1}^{N} z_i \\ A\sum_{i=1}^{N} x_i + B\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + C\sum_{i=1}^{N} x_i y_i &= \sum_{i=1}^{N} x_i z_i \\ A\sum_{i=1}^{N} y_i + B\sum_{i=1}^{N} x_i y_i + C\sum_{i=1}^{N} y_i^2 &= \sum_{i=1}^{N} y_i z_i \end{aligned} \tag{35}$$

0.4.5 Δευτεροβάθμιο πολυώνυμο: $y = A + Bx + Cx^2$

Αν έχουμε μια σειρά μετρήσεων (x_i, y_i), $i = 1, ..., N$, όπου οι y_i έχουν το ίδιο σφάλμα ενώ οι x_i έχουν αμελητέα σφάλματα, και ισχύει ότι: $y = A + Bx + Cx^2$ (π.χ. το ύψος ενός σώματος που πέφτει εξαρτάται από το τετράγωνο του χρόνου: $y = y_o + \upsilon_o t - (1/2)gt^2$), τότε η βέλτιστη εκτίμηση των σταθερών συντελεστών A, B, C καθορίζεται από την λύση του συστήματος *κανονικών εξισώσεων*:

$$\begin{aligned} AN + B\sum_{i=1}^{N} x_i + C\sum_{i=1}^{N} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{N} y_i \\ A\sum_{i=1}^{N} x_i + B\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + C\sum_{i=1}^{N} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ A\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{N} x_i^3 + C\sum_{i=1}^{N} x_i^4 &= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i \end{aligned} \tag{36}$$

Η γενική περίπτωση ενός πολυωνύμου ανώτερης τάξης από $n = 2$ δεν εξετάζεται εδώ γιατί τέτοιες μορφές απαντώνται σπανιότερα στην φυσική.

0.4.6 Η μορφή: $y = Af(x) + Bg(x)$

Αν η μεταβλητή y έχει την μορφή: $y = Af(x) + Bg(x)$ (π.χ. το στιγμιαίο πλάτος ενός ταλαντούμενου βάρους σε ένα κάθετα αναρτημένο ελατήριο: $y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, με $x = \omega t$) τότε η βέλτιστη εκτίμηση των σταθερών συντελεστών A, B καθορίζεται από την λύση του συστήματος *κανονικών εξισώσεων*:

$$\begin{aligned} A\sum_{i=1}^{N} [f(x_i)]^2 + B\sum_{i=1}^{N} f(x_i)g(x_i) &= \sum_{i=1}^{N} y_i f(x_i) \\ A\sum_{i=1}^{N} f(x_i)g(x_i) + B\sum_{i=1}^{N} [g(x_i)]^2 &= \sum_{i=1}^{N} y_i g(x_i) \end{aligned} \tag{37}$$

0.5 Υπόδειγμα Αναφοράς για Εργαστηριακή Άσκηση

Παρουσιάζεται ο ενδεδειγμένος τρόπος συγγραφής μιας αναφοράς εργαστηριακών μετρήσεων.

0.5.1 Παράδειγμα με ελάχιστα τετράγωνα

Τίτλος: Βαθμονόμηση ελατηρίου για μέτρηση μάζας (Ζυγός Ελατηρίου).

Ημ/νία: ...

Ονόματα συνεργατών: 1)..., 2)..., 3)....

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

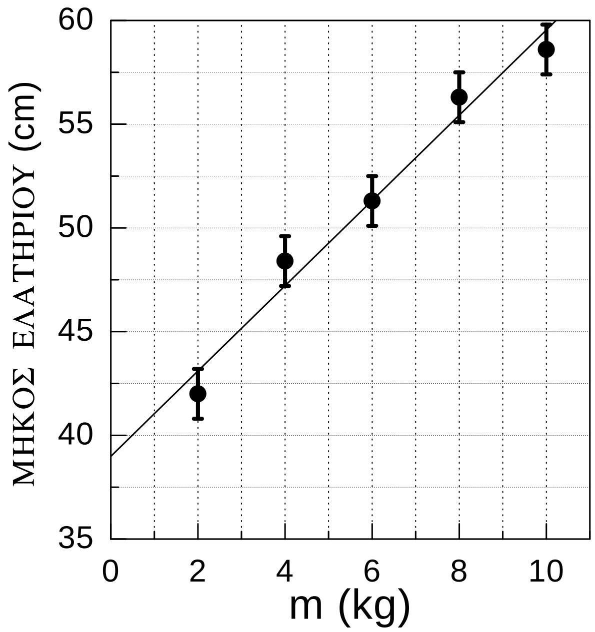
Η κατασκευή ενός ζυγού ελατηρίου απαιτεί την βαθμονόμηση μιας κλίμακας για την μέτρηση μαζών από την επιμήκυνση του ελατηρίου. Για αυτό το σκοπό αναρτούμε το ένα άκρο του ελατηρίου από ένα άκαμπτο στήριγμα, κρεμούμε ένα δίσκο ζυγού στο άλλο άκρο, και τοποθετούμε ένα μέτρο στα πλάγια της κατασκευής για να μετρούμε την επιμήκυνση του ελατηρίου. Για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώς ζυγός πρέπει να βρούμε την συσχέτιση μεταξύ της μάζας στο δίσκο και της επιμήκυνσης του ελατηρίου.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Για την βαθμονόμηση παίρνουμε πέντε μάζες ($N = 5$) των m_i=2 kg, $i = 1, ..., 5$ και τις προσθέτουμε μια-μια, καταγράφοντας το αντίστοιχο μήκος του ελατηρίου ℓ_i από το σημείο αναρτήσεως στο άκαμπτο στήριγμα έως το άλλο άκρο του. Οι μετρήσεις παρουσιάζονται στις πρώτες τρείς στήλες του Πίνακα.

Πίνακας 3: Μάζες m_i (σε kg) και επιμηκύνσεις ℓ_i (σε cm) για τον ζυγό ελατήριο.

Αριθμός δοκιμής i	$x = m_i$	$y = \ell_i$	m_i^2	$m_i\ell_i$
1	2	42.0	4	84
2	4	48.0	16	194
3	6	51.3	36	308
4	8	56.3	64	450
5	10	58.6	100	586
N=5	$\sum m_i$=30	$\sum \ell_i$=256.6	$\sum m_i^2$=220	$\sum m_i\ell_i$=1,622



Σχήμα 1: Γραφική παράσταση των δεδομένων από τον πίνακα μετρήσεων και της ευθείας που προκύπτει από την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Υποθέτοντας ότι το ελατήριο ικανοποιεί τον νόμο του $Hook$, $mg = k\ell$, τότε:

$$\ell = \ell_o + (\frac{g}{k})m \Leftrightarrow \ell = A + Bm \Leftrightarrow y = A + Bx, \text{ όπου } x_i \leftrightarrow m_i,\, y_i \leftrightarrow \ell_i$$

όπου $\ell_o = A$ είναι το μήκος του ελατηρίου δίχως βάρος και $\Delta\ell$=ℓ-ℓ_o είναι η αντίστοιχη επιμήκυνση. Το μήκος ℓ είναι η εξαρτημένη μεταβλητή y και η μάζα m η ανεξάρτητη μεταβλητή x. Η βαθμονόμηση του ζυγού επιτυγχάνεται από τον προσδιορισμό των σταθερών A και $B = g/k$ με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων (εξ.24, 25, 26). Ο προσδιορισμός των A και B απαιτεί τον υπολογισμό των αθροισμάτων: $\sum m_i$, $\sum \ell_i$, $\sum m_i^2$, και $\sum m_i\ell_i$. Για αυτό το σκοπό υπολογίζουμε τις ποσότητες m_i^2 και $m_i\ell_i$ στις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα μετρήσεων και τα αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην τελευταία γραμμή της κάθε στήλης.

Τώρα ο υπολογισμός των σταθερών A και B μπορεί να γίνει απευθείας. Σύμφωνα με την εξ.26 ο παρονομαστής Δ είναι:

$$\Delta = N\sum_{i=1}^{N} m_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)^2 = 5 \times 220 - 30^2 = 200$$

Το σημείο τομής A της ευθείας με τον κάθετο άξονα y δίνεται από την εξ.24:

$$A = \frac{\sum m_i^2 \sum \ell_i - \sum m_i \sum m_i\ell_i}{\Delta} = \frac{220 \times 256.6 - 30 \times 1622}{200} = 39.0\ cm$$

Τέλος, από την εξ.25 βρίσκουμε την κλίση B:

$$B = \frac{N\sum m_i\ell_i - \sum m_i \sum \ell_i}{\Delta} = \frac{5 \times 1622 - 30 \times 256.6}{200} = 2.06\ cm/kg$$

Η γραφική παράσταση των πειραματικών δεδομένων και της υπολογισμένης ευθείας από τις τιμές των A και B δίνεται στο σχήμα.1.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Με βάση τα μετρημένα σημεία, η βέλτιστη εκτίμηση του σφάλματος στην μέτρηση της $y = \ell$ είναι (εξ.27):

$$(\sigma_\ell)^2 = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}(\ell_i - A - Bm_i)^2 = \frac{1}{5-2}(1.2544 + 1.3456 + 0.0036 + 0.6724 + 1) = 1.4253$$

$\Rightarrow \sigma_\ell = \pm 1.1939\ cm$ = $\pm 1.2\ cm.$

Αυτό το σφάλμα σημειώνεται σε κάθε σημείο του σχήματος-1 με μικρά ευθύγραμμα τμήματα ($error\ bars$) παράλληλα ως πρός τον άξονα-y που έχουν μήκος: $\sigma_\ell = 1.2\ cm$, εκατέρωθεν κάθε σημείου.

Τα σφάλματα των A και B είναι (εξ.28 και 29):

$$(\sigma_A)^2 = (\sigma_\ell)^2\frac{\sum m_i^2}{\Delta} = (1.2)^2\frac{220}{200} = 1.584 \Rightarrow \sigma_A = \pm 1.2586\ cm = \pm 1.3\ cm$$

και

$$(\sigma_B)^2 = (\sigma_\ell)^2\frac{N}{\Delta} = (1.2)^2\frac{5}{200} = 0.036 \Rightarrow \sigma_B = \pm 0.1897\ cm/kg = \pm 0.19\ cm/kg$$

για το σ_B τα δεκαδικά ψηφία καθορίζονται από το γεγονός ότι B= 2.06 cm/kg

ΤΕΛΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα τελικά αποτελέσματα των μετρήσεων γράφονται μαζί με τα σφάλματα και περιέχουν την τελική στρογγυλοποίηση των σημαντικών ψηφίων. Έτσι,

1) $A = 39.0 \pm 1.3\ cm$ = $39 \pm 1\ cm.$

2) $B = 2.06 \pm 0.19\ cm/kg$ = $2.1 \pm 0.2\ cm/kg.$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Η βαθμονόμηση του ελατηρίου με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων έδωσε την εξίσωση βαθμονόμησης (*calibration line*) σύμφωνα με την οποία το συγκεκριμένο ελατήριο μπορεί να λειτουργήσει ώς ζυγός. Η εξίσωση βαθμονόμησης είναι:

$$\ell = \ell_o + \frac{g}{k}m = (39 \pm 1) + (2.1 \pm 0.2)m$$

Σύμφωνα με αυτή την εξίσωση, αν μια μάζα m αντιστοιχεί σε μήκος ελατηρίου ℓ=53.2 cm τότε ο ζυγός μας δίνει:

$$m = \frac{\ell - A}{B} = \frac{(53.2 - 39)\ cm}{2.1\ cm/kg} = 6.7619\ kg = 6.8\ kg$$

Το γεγονός ότι προκύπτουν δύο σημαντικά ψηφία στον προσδιορισμό της μάζας συνεπάγεται, σύμφωνα με τον Πίνακα-1 (σελ.5), ότι το σχετικό σφάλμα της (που είναι το σφάλμα του ζυγού) είναι μεταξύ 1% και 10% ή χονδρικά περίπου 5%.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Για την συγγραφή αυτής της αναφοράς χρησιμοποιήθηκαν εξισώσεις από τις παρακάτω αναφορές:

1) Χ. Χρηστίδης, *Ανάλυση Πειραματικών Σφαλμάτων στη Φυσική*, σελίδες 4, 5 και 14, σημειώσεις από την ηλεκτρονική διεύθυνση στο διαδίκτιο: *www.des.upatras.gr*, *Τομέας Φυσικής*.

2) J. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis*, 2nd edition, (University Science Books, Sausalito (CA), 1997), σελίδες 184 έως 186.

ΤΕΛΟΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

0.6 Μαθηματικό Συμπλήρωμα

0.6.1 Μερικές Παράγωγοι

Έστω η πραγματική συνάρτηση $q(x, y, ..., z)$ πολλών μεταβλητών $x, y, ..., z$ διαθέτει μερικές παραγώγους ως προς αυτές τις μεταβλητές. Για να βρούμε την μερική παράγωγο $\partial q/\partial x$ κρατάμε τις άλλες παραμέτρους $y, ..., z$ σταθερές και παραγωγίζουμε μόνο ως προς x.

Παράδειγμα: Αν η $q(x, y) = x^2y + y^3$ τότε η

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{d(x^2y + y^3)}{dx} = 2xy$$

Για να βρούμε την $\partial q/\partial y$ κρατάμε το x σταθερό και παραγωγίζουμε μόνο ως προς y

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{d(x^2y + y^3)}{dy} = x^2 + 3y^2$$

0.6.2 Πολλαπλές Μερικές Παράγωγοι

Έστω ότι οι μερικές παράγωγοι $\partial q/\partial x$, $\partial q/\partial y$, και $\partial q/\partial z$ της πραγματικής συνάρτησης $q(x, y, z)$ υπάρχουν και είναι συνεχείς. Αν αυτές οι παράγωγοι με τη σειρά τους έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους τότε λέμε ότι η $q(x, y, z)$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ή ότι η $q(x, y, z)$ έχει συνεχείς *πολλαπλές μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως*. Δίνουμε μερικά παραδείγματα για τον τρόπο που γράφουμε αυτές τις μερικές παραγώγους ανώτερης τάξεως όταν η $q(x, y)$ είναι συνάρτηση μόνον των x και y:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

Οι $\partial^2 q/\partial x \partial y$ και $\partial^2 q/\partial y \partial x$ λέγονται *μεικτές μερικές παράγωγοι δευτέρας τάξεως* και είναι ίσες μεταξύ τους:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial x}$$

Παράδειγμα: Βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως της $q(x, y) = xy + (x + 2y)^2$.

$$\frac{\partial q}{\partial x} = y + 2(x + 2y), \frac{\partial q}{\partial y} = x + 4(x + 2y)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 8, \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} = 5, \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial x} = 5$$

0.6.3 Βιβλιογραφία

Διανυσματικός Λογισμός, $J.Marsden$-$A.Tromba$, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Απόδοση στα Ελληνικά από τον Α. Γιαννόπουλο, παράγραφοι 2.3 και 2.6.

Αντί Επιλόγου

...Για αυτό και εγώ ονομάζω όλες αυτές τις υποτιθέμενες επιστήμες, **επιστήμες λατρείας του φορτίου***, γιατί ακολουθούν όλες τις διαδικασίες και τις μορφές επιστημονικής έρευνας, αλλά χάνουν κάτι ουσιαστικό. Τώρα επιβάλλεται, βέβαια, να σας πώ τι χάνουν.*

... υπάρχει πάντα ένα χαρακτηριστικό που απουσιάζει στις επιστήμες λατρείας του φορτίου. Αυτό είναι κάτι που ελπίζω να μάθετε κατά την διάρκεια των σπουδών σας - κάτι που δέν λέμε ξεκάθαρα τι είναι αλλά θα προσπαθήσω να σας διευκρινίσω. Είναι ένα είδος ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ ΑΚΕΡΑΙΟΤΗΤΑΣ, μια αρχή επιστημονικής σκέψης που αντιστοιχεί σε απόλυτη εντιμότητα. Αν κάνεις ένα πείραμα, πρέπει να αναφερθείς και στο καθετί που μπορεί να δείξει ότι το αποτέλεσμα δεν ισχύει - όχι μόνο σε ότι πιστεύεις ότι το αποδεικνύει. Πρέπει να ελέγξεις τις αιτίες που είναι δυνατό να εξηγούν τα αποτελέσματά σου. Πρέπει να αναφερθείς σε πράγματα που πέρασαν από τη σκέψη σου, αλλά που τα έχεις αποκλείσει σε κάποια άλλα πειράματα. Θα πρέπει ακόμη να καταγράψεις την κάθε λεπτομέρεια σχετικά με τα πειράματα, ώστε αυτός που θα ασχοληθεί να είναι σίγουρος ότι έχουν αποκλειστεί.

... και υπάρχει άνθρωπος που λέει ότι είναι άσχετη απαίτηση να επαναληφθεί ένα πείραμα. Είναι αυτό ΕΠΙΣΤΗΜΗ; ... Αυτός ο άνθρωπος μίλησε... και τι πρότεινε νομίζετε; Πρίν εκπαιδευτεί κάποιος, να ερευνάται εάν έχει ικανότητα να βγάλει πολλά αποτελέσματα και όχι να σπαταλάται χρόνος σε φιλόδοξους φοιτητές που δείχνουν μεν ενδιαφέρον αλλά βγάζουν μόνο τυχαία αποτελέσματα. Είναι πολύ επικίνδυνο να ακολουθείς τέτοια τακτική στη διδασκαλία - να διδάσκεις τους φοιτητές πως να βγάζουν συγκεκριμένα αποτελέσματα και όχι πως να κάνουν πειράματα με επιστημονική εντιμότητα.

Για αυτό μια ευχή κάνω για σας: να έχετε την καλή τύχη όπου βρεθείτε να είστε ελεύθεροι να διατηρείτε το είδος της ακεραιότητας που έχω περιγράψει και να μην πιεστείτε, από ανάγκη να διατηρήσετε τη θέση σας ή από οικονομική ανάγκη, να προδώσετε αυτή την ακεραιότητα. Μακάρι να έχετε πάντα αυτή την ελευθερία.

Richard Feynman
από το βιβλίο του: *Σίγουρα θα αστειεύεστε, κύριε Feynman!*
Εκδόσεις Τροχαλία