Αναδρομικές Εξισώσεις

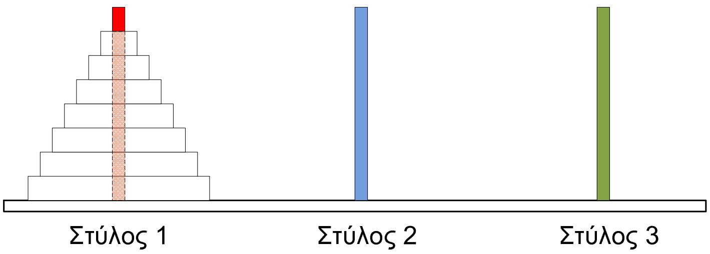
27 Νοεμβρίου 2008

Οι σημειώσεις βασίζονται στο [1].

Οι αναδρομικές εξισώσεις εμφανίζονται πολύ συχνά σε προβλήματα αναδρομής. Πιο συγκεκριμένα, αυτές οι εξισώσεις εμφανίζονται σε αλγόριθμους που εμπεριέχουν κάποια αναδρομική διαδικασία. Σε αυτή τη διάλεξη θα δούμε τρόπους να κατασκευάζουμε μία αναδρομική εξίσωση για την επίλυση ενός προβλήματος καθώς και τρόπους να βρίσκουμε κλειστούς τύπους για αυτές. Όπως θα δούμε υπάρχει μεγάλη σχέση με την εύρεση κλειστών τύπων για αθροίσματα.

0.1 Οι Πύργοι του Ανόι

Στο πρόβλημα των πύργων του Ανόι, υπάρχουν τρεις στύλοι και 7 δίσκοι διαφορετικού μεγέθους ο καθένας. Κάθε δίσκος έχει μία τρύπα στη μέση του έτσι ώστε να μπαίνει στον στύλο. Στην αρχή και οι επτά δίσκοι βρίσκονται στον στύλο 1 όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1. Οι δίσκοι τακτοποιούνται κατά μέγεθος έτσι ώστε ο μικρότερος να είναι στην κορυφή και ο μεγαλύτερος στη βάση. Ο στόχος του παιχνιδιού είναι να μετακινήσετε όλους τους δίσκους στον στύλο 3 χρησιμοποιώντας και τον στύλο 2 με τον περιορισμό οι μικρότεροι δίσκοι να είναι πάντα πάνω από μεγαλύτερους δίσκους.



Σχήμα 1: Οι πύργοι του Ανόι.

Αρχικά η μόνη κίνηση που μπορεί να γίνει είναι η μετακίνηση του μικρότερου δίσκου σε άλλον στύλο. Έπειτα ένας δίσκος δεν μπορεί ποτέ να είναι πάνω σε μικρότερο και άρα τον μετακινούμε στον εναπομείναντα στύλο. Το πρόβλημα αυτό ανακαλύφθηκε το 1883 από το Γάλλο μαθηματικό Edouard Lucas. Το παιχνίδι αυτό το συνόδευσε και από ένα μύθο λέγοντας ότι 64 χρυσοί δίσκοι βρίσκονταν σε ένα στύλο και οι μοναχοί προσπαθούσαν να τους μεταφέρουν σε έναν άλλο στύλο με τους συγκεκριμένους κανόνες (ένας δίσκος μετακινείται κάθε φορά και μπαίνουν σε σειρά μεγέθους). Όταν θα το κατάφερναν τότε η γη θα καταστρέφονταν. Η ερώτηση είναι σε πόσο χρόνο οι μοναχοί θα κατορθώσουν να μετακινήσουν τους δίσκους;

0.1.1 Λύση των Πύργων του Ανόι

Για να βρούμε τη στρατηγική που θα μας οδηγήσει στη λύση του παιχνιδιού ας σκεφτούμε τι θα κάναμε στην περίπτωση 3 δίσκων. Θα μετακινήσουμε τους δύο μικρότερους δίσκους στον ενδιάμεσο στύλο και έπειτα θα μετακινήσουμε τον μεγαλύτερο στην τελική του θέση. Έπειτα θα κάνουμε το ίδιο με τους εναπομείναντες δίσκους. Αυτό μας δίνει μία ιδέα για το τι θα πρέπει να κάνουμε αν έχουμε n δίσκους. Έστω ότι $T(n)$ είναι ο αριθμός βημάτων που χρειάζεται να εκτελέσουμε για να κάνουμε τη μεταφορά n δίσκων. Τότε, μεταφέρουμε τους $n-1$ δίσκους στον ενδιάμεσο στύλο σε $T(n-1)$ βήματα, έπειτα μεταφέρουμε τον μεγαλύτερο στην τελική του θέση σε 1 βήμα και τέλος μεταφέρουμε τους $n-1$ δίσκους στον τρίτο στύλο σε $T(n-1)$ βήματα. Άρα παίρνουμε την εξής αναδρομική εξίσωση που περιγράφει τον αριθμό των βημάτων:

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

Προσοχή ότι το επιχείρημα για την ισότητα δεν είναι ολοκληρωμένο αφού παραπάνω δείξαμε ότι $T(n) \le 2T(n-1) + 1$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι $T(n) \ge 2T(n-1) + 1$ ώστε να ισχύει η ισότητα ([3]).

Επιπλέον θα πρέπει να δώσουμε αρχικές συνθήκες στην αναδρομή. Δηλαδή τι γίνεται όταν $T(0)$. Προφανώς όταν δεν έχουμε δίσκους τότε ο αριθμός των κινήσεων είναι 0, άρα $T(0) = 0$. Άρα συνολικά παίρνουμε:

$$T(0) = 0$$
$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

και αυτές οι δύο ισότητες καλούνται *αναδρομική σχέση.*

Για να βρούμε ένα κλειστό τύπο για το $T(n)$ θα πρέπει να ξετυλίξουμε την αναδρομή. Συγκεκριμένα:

$$\begin{gathered} T(n) = 2(2T(n-2)+1)+1 = 2^2T(n-2)+1+2 \;\Rightarrow \\ T(n) = 2^2(2T(n-3)+1)+1+2 = 2^3T(n-4)+1+2+2^2 \Rightarrow \\ \ldots \Rightarrow \\ T(n) = 2^nT(0) + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 0 + 2^n - 1 \Rightarrow \\ T(n) = 2^n - 1 \end{gathered}$$

Άρα ο αριθμός των βημάτων που πρέπει να κάνουμε είναι εκθετικά μεγάλος. Δηλαδή για 64 δίσκους θα πρέπει να κάνουν οι μοναχοί 2^{64} κινήσεις. Επομένως υπάρχει αρκετός χρόνος μέχρι να καταστραφεί η γη.

0.2 Μέθοδοι Επίλυσης Αναδρομικών Σχέσεων

Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε κάποιες μεθόδους για επίλυση αναδρομικών σχέσεων. Οι μέθοδοι αυτές μπορούν είτε να δώσουν ακριβή λύση ή να δώσουν ένα πάνω ή κάτω φράγμα. Σε περίπτωση που αναζητάμε φράγματα εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με πάνω φράγματα αφού τα κάτω παράγονται με αντίστοιχο τρόπο.

0.2.1 Μέθοδος Αντικατάστασης (Πρόβλεψη και Απόδειξη με Επαγωγή)

Η μέθοδος αντικατάστασης ή σωστής πρόβλεψης συνίσταται στην πρόβλεψη της λύσης της αναδρομής, την οποία επαληθεύουμε (αποδεικνύουμε) στη συνέχεια με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Η μέθοδος αυτή δίνει πολύ καλά αποτελέσματα, αλλά προφανώς μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο στις περιπτώσεις που η πρόβλεψη είναι εύκολη. Ακολουθεί ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου:

Παράδειγμα 1 *Να βρείτε άνω φράγμα για την* $T(n) = 2T(n/2) + n$

Απόδειξη. Προβλέπουμε ότι $T(n) = O(nlogn)$. Εφαρμογή της μεθόδου σημαίνει να αποδείξουμε ότι $T(n) \leq cnlogn$ για κάποια σταθερά $c > 0$. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση μαθηματικής επαγωγής στο n. Υποθέτουμε (επαγωγική υπόθεση) ότι η πρόβλεψή μας ισχύει για κάθε τιμή μικρότερη του n, άρα $T(n/2) \leq c(n/2)\log(n/2)$, και θα την αποδείξουμε για την τιμή n. Αντικαθιστώντας αυτή την τελευταία σχέση στην αναδρομή μας, παίρνουμε

$$T(n) = 2T(n/2) + n \leq 2c(n/2)\log(n/2) + n = cn\log(n/2) + n =$$
$$cn\log n - cn + n \leq cn\log n$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει για οποιαδήποτε $c \geq 1$. Η ακριβής σταθερά θα προσδιορισθεί από τις αρχικές συνθήκες τις οποίες η μαθηματική επαγωγή πρέπει να ικανοποιεί, δηλ. το c πρέπει να επιλεχθεί έτσι ώστε η ανισότητα $T(n) \leq cn\log n$ να ισχύει και για τις αρχικές συνθήκες (το βασικό βήμα της επαγωγής). Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα αν δεν είμαστε προσεκτικοί. Αν π.χ. επιλέξουμε ως αρχική συνθήκη $T(1) = 1$, τότε δεν υπάρχει c που να ικανοποιεί την $1 = T(1) \leq c1\log 1 = 0$.

Τέτοια προβλήματα μπορούμε να τα ξεπεράσουμε εύκολα, είτε με το να θέσουμε την τιμή της $T(1)$ ίση με μια κατάλληλη σταθερά που δεν εξαρτάται από τον κλειστό τύπο της $T(n)$, είτε με το να απομακρύνουμε την αρχική συνθήκη που δημιουργεί το πρόβλημα και να θεωρήσουμε άλλες μικρές τιμές του n, π.χ. $n = 2; 3$, που μας βολεύουν καλύτερα. Αυτό είναι και σύμφωνο με τον ασυμπτωτικό συμβολισμό, ο οποίος μας υπαγορεύει να αποδείξουμε ότι $T(n) \leq cn\log n$ για όλα τα $n \geq n_0$, όπου n_0 είναι μια σταθερά. Από την αναδρομή προκύπτει ότι $T(2) = 2T(1) + 2 = 4$, και επομένως πρέπει να διαλέξουμε c τέτοια ώστε $4 = T(2) \leq c2\log 2$. Άρα, οποιαδήποτε $c \geq 2$ είναι αρκετή για την περίπτωσή μας. ∎

Σε όλες τις αναδρομικές σχέσεις που θα εξετάσουμε, είναι σχεδόν προφανές το πως μπορούν να επεκταθούν οι αρχικές συνθήκες έτσι ώστε οι κλειστοί τύποι των αναδρομών να ισχύουν και για μικρές τιμές του n. Για το λόγο αυτό δεν θα ασχοληθούμε με αρχικές συνθήκες στη συνέχεια.

Υπάρχουν δύο ειδών δυσκολίες (που μπορεί να οδηγήσουν σε λάθη) στην εφαρμογή της μεθόδου της αντικατάστασης. Και οι δύο έχουν να κάνουν με τη χρήση του ασυμπτωτικού συμβολισμού O.

Η πρώτη δυσκολία προέρχεται από την καθεαυτή λανθασμένη χρήση του ασυμπτωτικού συμβολισμού στην απόδειξη με επαγωγή. Στο παράδειγμα με την $T(n) = 2T(n/2) + n$ μπορούμε λανθασμένα να αποδείξουμε ότι $T(n) = O(n)$, προβλέποντας ότι $T(n) \leq cn$ και γράφοντας

$$T(n) = 2T(n/2) + n \leq 2c(n/2) + n =$$
$$cn + n = O(n) \leftarrow \text{ ΛΑΘΟΣ!}$$

επειδή c είναι μια σταθερά. Το λάθος εδώ έγκειται στο γεγονός ότι δεν αποδεικνύουμε τον ακριβή τύπο της αναδρομής.

Η δεύτερη δυσκολία έγκειται στο ότι ενώ προβλέπουμε σωστά το ασυμπτωτικό όριο, τα μαθηματικά δεν δουλεύουν ως προς τις σταθερές. Έστω για παράδειγμα η αναδρομή $T(n) = 2T(n/2) + 1$ για την οποία προβλέπουμε ότι $T(n) = O(n)$, δηλ. θέλουμε να αποδείξουμε ότι $T(n) \leq cn$, για κάποια $c > 0$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο όπως και πριν και έχουμε

$$T(n) = 2T(n/2) + 1 \leq 2c(n/2) + 1 = cn + 1$$

το οποίο σημαίνει ότι δεν υπάρχει σταθερά c για την οποία $T(n) \leq cn$.

Σε μια τέτοια περίπτωση, η πρώτη αντίδραση είναι να δοκιμάσουμε να φράξουμε την $T(n)$ με ένα πολυώνυμο μεγαλύτερης δύναμης, π.χ. $O(n \log n)$ ή $O(n^2)$. Αλλά στην πραγματικότητα η πρόβλεψή μας ότι $T(n) = O(n)$ είναι σωστή. Διαφέρει μόνο κατά τη σταθερά 1, δηλ. έναν όρο μικρότερης δύναμης ($1 = n^0$). Το πρόβλημα δημιουργείται διότι χρειαζόμαστε μια ισχυρότερη επαγωγική υπόθεση. Σε αυτές τις περιπτώσεις, μπορούμε συνήθως να ξεπεράσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα με την αφαίρεση ενός όρου μικρότερης δύναμης από την προηγούμενη πρόβλεψή μας. Η νέα πρόβλεψη γίνεται τώρα $T(n) \leq cn - b$, όπου $b > 0$ είναι μια άλλη σταθερά. Η νέα πρόβλεψη δίνει τώρα

$$T(n) = 2T(n/2) + 1 \leq 2(c(n/2) - b) + 1 = cn - 2b + 1 \leq cn - b$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει για οποιαδήποτε $b \geq 1$.

0.2.2 Μέθοδος Δένδρου Αναδρομών

Η μέθοδος του δένδρου αναδρομών συνίσταται στην ανάλυση της αναδρομής σε δενδρική μορφή, η οποία μας επιτρέπει να κάνουμε μια καλή πρόβλεψη για τη λύση της αναδρομής. Στην ουσία είναι η επαναληπτική μέθοδος (ξετύλιγμα) με γραφικό τρόπο. Η ορθότητα της πρόβλεψής μας μπορεί να επαληθευθεί με την μέθοδο της αντικατάστασης. Σε ένα δένδρο αναδρομών κάθε κορυφή αντιπροσωπεύει το κόστος ενός υποπροβλήματος που ανήκει στο σύνολο των αναδρομικών κλήσεων της συνάρτησης της αναδρομής. Για να βρούμε την επιθυμητή πρόβλεψη, αθροίζουμε πρώτα τα κόστη των κορυφών που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και στη συνέχεια αθροίζουμε τα κόστη όλων των επιπέδων.

Στη γενική περίπτωση, έχουμε μια αναδρομή της μορφής

$$T(n) = T(n_1) + T(n_2) + \cdots + T(n_k) + f(n)$$

όπου n_i, $1 \leq i \leq k$, είναι το μέγεθος του υποπροβλήματος που θα επιλυθεί αναδρομικά και $k \geq 1$ είναι ο αριθμός αυτών των υποπροβλημάτων. Το δένδρο αναδρομών σχηματίζεται σταδιακά. Στην αρχή υπάρχει μόνο μία κορυφή (ρίζα) που αντιπροσωπεύει την $T(n)$, δηλ. το αριστερό μέλος της αναδρομής. Στο επόμενο βήμα, η κορυφή αυτή ¨αντικαθίσταται' από ένα ισοδύναμο δένδρο το οποίο αντιπροσωπεύει το δεξιό μέλος της αναδρομής. Το δένδρο αυτό έχει ρίζα την $f(n)$ και παιδιά τις αναδρομικές κλήσεις $T(n_1), T(n_2), \ldots, T(n_k)$. Στη συνέχεια, το ίδιο βήμα επαναλαμβάνεται για κάθε μία κορυφή που αντιπροσωπεύει μια αναδρομική κλήση. Δηλαδή, η κορυφή που αντιπροσωπεύει τον όρο $T(n_i)$ ¨αντικαθίσταται' με ένα δένδρο που αντιπροσωπεύει το δεξιό μέλος της αναδρομής στην οποία αναλύεται η $T(n_i)$, και το οποίο αποτελεί ένα υποδένδρο του τελικού δένδρου αναδρομών. Έστω ότι $T(n_i) = T(n_i^1) + T(n_i^2) + \cdots + T(n_i^j) + f(n_i)$, για κάποιο $j \geq 1$. Τότε το (υπο)δένδρο που ¨αντικαθιστά' τον όρο $T(n_i)$ έχει ρίζα τον όρο $f(n_i)$ και παιδιά τις αναδρομικές κλήσεις $T(n_i^1), T(n_i^2), \ldots, T(n_i^j)$. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου όλες οι κορυφές αντιπροσωπεύουν είτε κάποιο γνωστό κόστος της συνάρτησης f, είτε κάποια αναδρομική κλήση σε κάποιο υποπρόβλημα πολύ μικρού μεγέθους (π.χ. $n = 1$) για το οποίο γνωρίζουμε το κόστος επίλυσής του.

Η κατασκευή του δένδρου αναδρομών θα γίνει περισσότερο κατανοητή με τη βοήθεια του παρακάτω παραδείγματος.

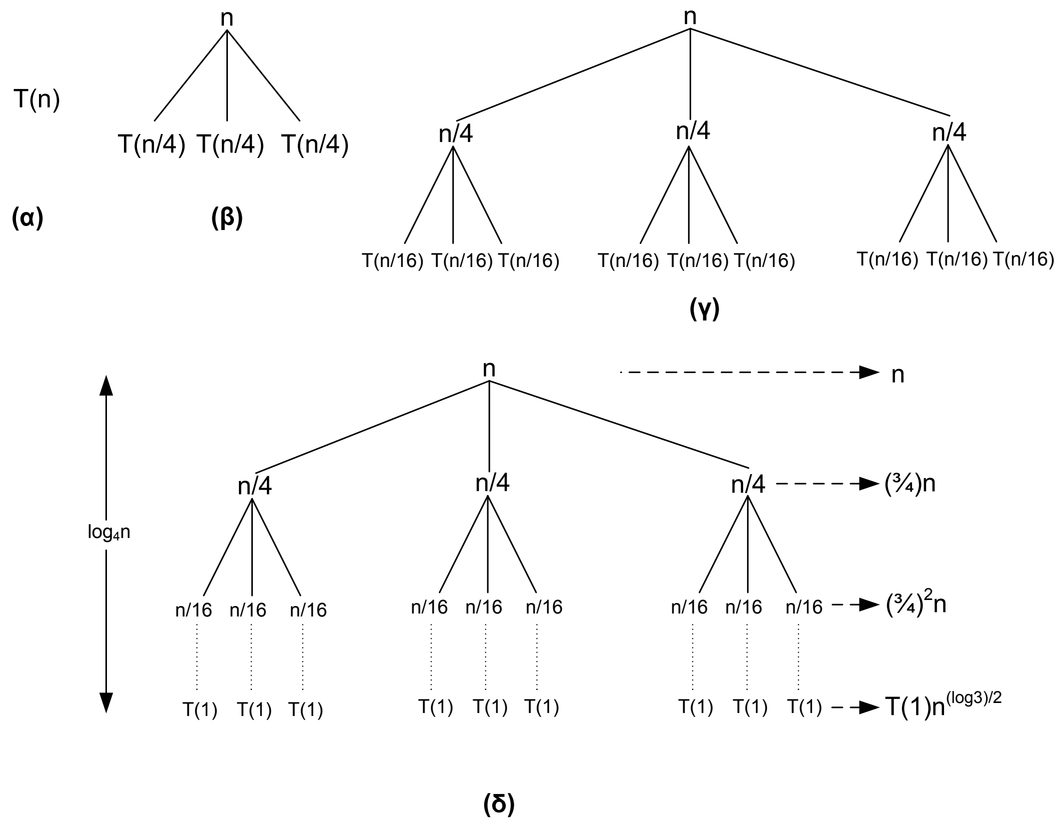
Παράδειγμα 2 *Να επιλυθεί η αναδρομική σχέση* $T(n) = 3T(n/4) + n$.

Απόδειξη. Στο Σχήμα 2 φαίνονται τα πρώτα τέσσερα στάδια ανάπτυξης του δένδρου αναδρομών. Το Σχήμα 2(α) δείχνει την $T(n)$, η οποία αναλύεται στο Σχήμα 2(α)(β) σε ένα ισοδύναμο δένδρο που αντιπροσωπεύει την αναδρομή. Ο όρος n στην ρίζα του δένδρου αντιπροσωπεύει το κόστος στο πρώτο επίπεδο της αναδρομής (επίπεδο 0), ενώ τα τρία παιδιά του αντιπροσωπεύουν το κόστος των υποπροβλημάτων μεγέθους $n = 4$. Οι τρεις αυτές κορυφές είναι ουσιαστικά ρίζες των υποδένδρων που σχετίζονται με τα τρία υποπροβλήματα και μπορούν να αναλυθούν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Η ανάλυσή τους μας δίνει το δένδρο του Σχήματος 2(γ). Τέλος, το Σχήμα 2(δ) αντιπροσωπεύει το πλήρες δένδρο αναδρομών για την συγκεκριμένη αναδρομή μαζί με τα κόστη επιπέδων και το συνολικό κόστος.

Τα φύλλα (κορυφές τελευταίου επιπέδου) αντιπροσωπεύουν την αρχική συνθήκη, δηλ. τη γνώση της λύσης για κάποια σταθερή τιμή του μεγέθους του υποπροβλήματος (συνήθως για $n = 1$) και στο οποίο μέγεθος θα φτάσουμε κάποια στιγμή, αφού η ανάπτυξη της αναδρομής οδηγεί σε συνεχώς μικρότερα υποπροβλήματα. Ποιο είναι όμως το βάθος της ανάπτυξης της αναδρομής, δηλ. το βάθος του δένδρου· Από το Σχήμα 2, είναι εύκολο να δούμε ότι το μέγεθος του υποπροβλήματος στο επίπεδο i είναι $n/4^i$. Επομένως το μέγεθος του υποπροβλήματος γίνεται 1 όταν $n/4^i = 1$, δηλ. όταν $i = \log_4 n$.

Για να υπολογίσουμε το κόστος σε κάθε επίπεδο του δένδρου, παρατηρούμε ότι κάθε επίπεδο έχει 3 φορές περισσότερες κορυφές από το προηγούμενό του. Επομένως, ο αριθμός των κορυφών στο επίπεδο i είναι 3^i (θυμηθείτε ότι για την ρίζα $i = 0$). Αφού κάθε κορυφή στο επίπεδο i έχει κόστος $n/4^i$, το συνολικό κόστος του επιπέδου i είναι $(3/4)^i n$. Το τελευταίο επίπεδο έχει $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$ κορυφές, κάθε μία από τις οποίες έχει κόστος $T(1) = O(1)$. Άρα, το συνολικό κόστος όλων των επιπέδων είναι

$$T(n) = n^{\log_4 3} T(1) + \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (3/4)^i n \Rightarrow$$



Σχήμα 2: Δέντρο Αναδρομών της Σχέσης $T(n) = 3T(n/4) + n$.

$$T(n) = T(1)n^{\log_4 3} + n \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} (3/4)^i \Rightarrow$$

$$T(n) = T(1)n^{\log_4 3} + n \frac{1 - (3/4)^{\log_4 n}}{1 - 3/4} \Rightarrow$$

$$T(n) = T(1)n^{\log_4 3} + 4n(1 - (3/4)^{\log_4 n}) \Rightarrow$$

$$T(n) = O(n)$$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή, μπορούμε να επαληθεύσουμε αν η παραπάνω πρόβλεψη είναι πραγματικά σωστή. Θέλουμε να δείξουμε δηλαδή (αν θεωρήσουμε ότι λύση είναι η ασυμπτωτική εκτίμηση) ότι $T(n) \leq dn$, για κάποια σταθερά $d > 0$. Πράγματι:

$$T(n) = 3T(n/4) + n \leq 3d(n/4) + n = n(1 + 3d/4) \leq dn$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν $1 + 3d/4 \leq d$, δηλ. αν και μόνο αν $d \geq 4$.

∎

0.2.3 Μέθοδος Αλλαγής Μεταβλητών

Η μέθοδος αυτή συνίσταται στον μετασχηματισμό μιας αναδρομικής σχέσης σε μιαν άλλη απλούστερη μέσω αλλαγής των μεταβλητών. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει πως επιτυγχάνεται αυτό:

Παράδειγμα 3 *Θέλουμε να λύσουμε την αναδρομική* $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$

Απόδειξη. Αν θέσουμε $m = \log n$ (που συνεπάγεται ότι $n = 2^m$ και $\sqrt{n} = 2^{m/2}$), τότε παίρνουμε

$$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$$

και θέτοντας $S(m) = T(2^m)$ έχουμε την αναδρομή

$$S(m) = 2S(m/2) + m$$

την οποία γνωρίζουμε ήδη πως να επιλύσουμε: $S(m) = O(m \log m)$. Επομένως, $T(n) = T(2^m) = S(m) = O(m \log m) = O(\log n \log \log n)$. ∎

0.2.4 Επαναληπτική Μέθοδος

Η επαναληπτική μέθοδος συνίσταται στην ανάλυση της αναδρομής με χρήση επαναλήψεων και έκφρασή της σαν άθροισμα όρων και αρχικών συνθηκών. Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε πως γίνεται αυτό υπολογίζοντας τον αριθμό κινήσεων για τους πύργους του Ανόι. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει πως γίνεται αυτό.

Παράδειγμα 4 *Να επιλυθεί η αναδρομή* $T(n) = 2T(n/2) + n^2$.

Απόδειξη.

Αυτό που μας δυσκολεύει στο να βρούμε κλειστό τύπο για την $T(n)$ είναι ο όρος $T(n/2)$. Τον όρο αυτό μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε από την επανάληψη της αναδρομής για την τιμή $n/2$, δηλ. $T(n/2) = 2T(n/4) + (n/2)^2$. Τώρα, το πρόβλημα μετατίθεται στον όρο $T(n/4)$, τον οποίο μπορούμε να αντικαταστήσουμε συναρτήσει του όρου $T(n = 8)$, κ.ο.κ. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε μια ακολουθία εξισώσεων

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n^2 \\
T(n/2) &= 2T(n/2^2) + (n/2)^2 \\
T(n/2^2) &= 2T(n/2^3) + (n/2^2)^2 \\
&\cdots \\
T(n/2^{k-1}) &= 2T(n/2^k) + (n/2^{k-1})^2
\end{aligned}$$

όπου η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι εκείνο το βήμα k για το οποίο $n = 2^k = 1$, δηλ. $k = \log n$ (υποθέτουμε για ευκολία ότι το n είναι δύναμη του 2). Επίσης υποθέτουμε ότι η αρχική μας συνθήκη είναι $T(1) = c$, όπου c είναι μια σταθερά. Στην παραπάνω ακολουθία των εξισώσεων παρατηρούμε ότι οι όροι της αναδρομής T, εκτός από τους $T(n)$ και $T(n/2^k)$, εμφανίζονται μία φορά στο δεξιό και μία φορά στο αριστερό μέλος των εξισώσεων. Επομένως, θα επιθυμούσαμε την απαλοιφή των όρων αυτών ώστε να μείνουν οι $T(n)$ και $T(n/2^k) = T(1)$ και οι υπόλοιποι όροι που εξαρτώνται μόνο από το n. Η απαλοιφή συνήθως επιτυγχάνεται παίρνοντας το άθροισμα ενός τέτοιου συνόλου εξισώσεων. Εδώ δεν μπορούμε απευθείας να το κάνουμε αυτό, γιατί παρατηρούμε ότι οι συντελεστές των όρων T στα δεξιά μέλη των εξισώσεων δεν είναι ίδιοι με εκείνους των αντίστοιχων όρων στα αριστερά μέλη. Π.χ. ο όρος $T(n/2^2)$ στο δεξιό μέλος της δεύτερης εξίσωσης έχει συντελεστή 2, ενώ ο αντίστοιχος όρος στο αριστερό μέλος της τρίτης εξίσωσης έχει συντελεστή 1. Μπορούμε να διορθώσουμε αυτή την ¨ασυμμετρία' πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της τρίτης εξίσωσης με το συντελεστή 2.

Γενικά, εφαρμόζουμε τον ακόλουθο κανόνα: αν στο δεξιό μέλος μιας εξίσωσης εμφανίζεται κάποιος όρος $T(m)$ με συντελεστή d, πολλαπλασιάζουμε με d και τα δύο μέλη της επόμενης εξίσωσης στην οποία ο $T(m)$ εμφανίζεται στο αριστερό μέλος. Η εφαρμογή του κανόνα μας δίνει:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n^2 \\
2T(n/2) &= 2^2T(n/2^2) + 2(n/2)^2 \\
2^2T(n/2^2) &= 2^3T(n/2^3) + 2^2(n/2^2)^2 \\
&\cdots \\
2^{k-1}T(n/2^{k-1}) &= 2^kT(n/2^k) + 2^{k-1}(n/2^{k-1})^2
\end{aligned}$$

Αθροίζοντας τώρα τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2^kT(n/2^k) + (n^2 + n^2/2 + n^2/2^2 + \cdots + n^2/2^{k-1}) = \\
&= nT(1) + n^2\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i = cn + n^2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \\
T(n) &= cn + 2n^2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)
\end{aligned}$$

∎

0.2.5 Το Βασικό Θεώρημα

Το βασικό θεώρημα μας παρέχει έναν τρόπο να φράσσουμε από πάνω αναδρομικές σχέσεις. Το δίνουμε εδώ χωρίς απόδειξη και έπειτα παραθέτουμε παραδείγματα χρήσης του.

Θεώρημα 1 *Έστω* $a, b \in \Re^+$, $b > 1$, $\gamma, \delta \in \Re_0^+$, $g : \Re^+ \to \Re^+$ *με* $g(x) = O(x^\gamma \log_b^\delta x)$ *και*

$$T(x) = \begin{cases} g(1) & x = 1 \\ \alpha T(x/b) + g(x) & x > 1 \end{cases}$$

Τότε:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b \alpha} \log_b^{\delta} n) & a > b^{\gamma} \\ O(n^{\gamma} \log_b^{\delta+1} n & a = b^{\gamma} \\ O(n^{\gamma} \log_b^{\delta} n) & \alpha < b^{\gamma}, \gamma > 0 \text{ ή } \delta \geq 1 \\ O(log_b n) & \alpha < 1, \gamma = 0, \delta < 1 \end{cases}$$

για $n = b^k$.

Θα δώσουμε τώρα μερικά παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος 1.

Παράδειγμα 5 $T(n) = 16T(n/8) + n^{2/3}$

Απόδειξη.
Έχουμε ότι $\alpha = 16$, $b = 8$, $g(n) = n^{2/3} \log_8^0 n \Rightarrow \gamma = 2/3$, $\delta = 0$. Επίσης έχουμε ότι $\alpha/b^{\gamma} = 16/8^{2/3} > 1$ και επομένως είμαστε στην πρώτη περίπτωση. Άρα

$$T(n) = O(n^{\log_8 16} \log_8^0 n) \Rightarrow T(n) = O(n^{4/3})$$

∎

Παράδειγμα 6 $T(n) = T(2n/3) + 1$

Απόδειξη. Έχουμε $\alpha = 1$, $b = 3/2$, $g(n) = 1 = n^0 \log_{3/2}^0 n \Rightarrow \gamma = 0$, $\delta = 0$. Επίσης έχουμε ότι $\alpha/b^{\gamma} = 1/(3/2)^0 = 1$ και επομένως είμαστε στην δεύτερη περίπτωση. Άρα

$$T(n) = O(n^0 \log_{3/2}^{0+1} n) = O(\log n)$$

∎

Παράδειγμα 7 $T(n^2) = 3T(n^2/3) + n$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αλλαγής μεταβλητών για να φέρουμε την αναδρομή αυτή στην μορφή που θέλουμε. Θέτουμε $n^2 = m$, άρα $n = \sqrt{m}$, και παίρνουμε την ισοδύναμη σχέση $T(m) = 3T(m/3) + \sqrt{m}$. Η τελευταία αυτή σχέση είναι στη μορφή που απαιτεί το Θεώρημα 2. Έχουμε ότι $a = 3$, $b = 3$, $g(m) = \sqrt{m} = m^{1/2} \log_3^0 m \Rightarrow \gamma 1/2$, $\delta = 0$. Επίσης $a/b^{\gamma} = 3/3^{1/2} < 1$, άρα είμαστε στην πρώτη περίπτωση και έχουμε ότι $T(m) = O(m^{\log_3 3} \log_3^0 m = O(m)$. Επομένως, $T(n^2) = T(m) = O(m) = O(n^2)$. ∎

0.3 Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Οι γραμμικές αναδρομικές σχέσεις έχουν την μορφή

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \cdots + a_d f(n-d)$$

Σε αυτή τη περίπτωση θα λέμε ότι η σχέση έχει τάξη d. Για παράδειγμα η Fibonacci αναδρομική σχέση

$$T(0) = 0, T(1) = 1$$
$$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$

είναι τάξης 2, με συντελεστές $a_1 = a_2 = 1$. Παρακάτω θα βρούμε ένα κλειστό τύπο για την ακολουθία Fibonacci

0.3.1 Fibonacci

Θα κάνουμε μία πρόβλεψη ως προς την λύση της αναδρομικής σχέσης. Γενικά είναι κανόνας σε γραμμικές σχέσεις οι λύσεις να είναι εκθετικές. Έστω λοιπόν $T(n) = cx^n$, όπου c και x είναι παράμετροι που αυξάνουν τις πιθανότητες να έχουμε μία σωστή πρόβλεψη. Αυτές τις παραμέτρους θα τις καθορίσουμε μετά έτσι ώστε η λύση μας να είναι σωστή. Επίσης, προσωρινά θα παραβλέψουμε τις αρχικές συνθήκες $T(0) = 0$ και $T(1) = 1$.

Επαλήθευση: Βάζουμε την πρόβλεψή μας στον τύπο της αναδρομής και έχουμε:

$$cx^n = cx^{n-1} + cx^{n-2} \Rightarrow x^2 = x + 1 \Rightarrow$$
$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Η σταθερά c μπορεί να είναι οτιδήποτε, αλλά το x πρέπει να είναι $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Επομένως, υπάρχουν δύο λύσεις στην αναδρομή:

$$T(n) = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ ή } T(n) = c\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Στην πραγματικότητα κάθε γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων είναι λύση. Το επόμενο θεώρημα αναφέρει ότι αυτό ισχύει γενικά για γραμμικές αναδρομικές σχέσεις.

Θεώρημα 2 *Αν $f(n)$ και $g(n)$ είναι λύσεις σε μία γραμμική αναδρομική σχέση (χωρίς αρχικές συνθήκες) τότε η $cf(n) + dg(n)$ είναι επίσης μία λύση, για c, d τυχαίες σταθερές.*

Απόδειξη. Αφήνεται στον αναγνώστη. ∎

Με βάση το Θεώρημα 2 η

$$T(n) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

είναι λύση για την αναδρομική σχέση Fibonacci όταν δεν λαμβάνουμε υπόψη τις αρχικές συνθήκες, για κάθε σταθερά c_1, c_2. Στην περίπτωση που έχουμε αρχικές συνθήκες τότε βρίσκουμε τις τιμές σε αυτές τις σταθερές με βάση αυτές τις συνθήκες. Άρα:

$$T(0) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 = 0$$

και

$$T(1) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 = 1$$

Τώρα έχουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Υπάρχει μία λύση και αυτή είναι η $c_1 = 1/\sqrt{5}$ και $c_2 = -1/\sqrt{5}$. Επομένως έχουμε μία λύση για την γραμμική αναδρομική σχέση Fibonacci:

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Αυτή η λύση μοιάζει τελείως λάθος αφού όλοι οι αριθμοί Fibonacci είναι ακέραιοι ενώ ο κλειστός τύπος περιέχει άρρητους αριθμούς. Παρόλα αυτά για οποιοδήποτε n αυτοί οι άρρητοι αριθμοί απλοποιούνται και πάντα δίνουν έναν ακέραιο αριθμό. (Για αυτό ακριβώς το λόγο χρειάστηκαν 6 αιώνες για να βρεθεί αυτή η λύση).

0.3.2 Γενικές Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε για να λύσουμε την αναδρομική σχέση Fibonacci μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λυθεί οποιαδήποτε γραμμική αναδρομή της μορφής:

$$T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \cdots + a_d T(n-d)$$

Αντικαθιστώντας την πρόβλεψη $T(n) = x^n$ παίρνουμε:

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_d x^{n-d}$$

από την οποία αν διαρέσουμε με x^{n-d} παίρνουμε:

$$x^d = a_1 x^{d-1} + a_2 x^{d-2} + \cdots + a_{d-1} x + a_d$$

Αυτή η εξίσωση λέγεται *χαρακτηριστική εξίσωση* της αναδρομικής σχέσης. Η λύση της γραμμικής αναδρομικής σχέσης ορίζεται από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Μην λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

- Αν η r δεν είναι πολλαπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε η r^n είναι λύση της αναδρομής.
- Αν η r είναι πολλαπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης με πολλαπλότητα k, τότε $r^n, nr^n, n^2r^n, \ldots, n^{k-1}r^n$ είναι λύσεις της αναδρομής.

Επίσης από το Θεώρημα 2 όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί τους είναι λύσεις στην αναδρομή.

Για παράδειγμα, έστω ότι η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες r_1, r_2 και την r_3 δύο φορές. Έχουμε άρα 4 λύσεις:

$$T(n) = r_1^n$$
$$T(n) = r_2^n$$
$$T(n) = r_3^n$$
$$T(n) = nr_3^n$$

Άρα κάθε γραμμικός συνδυασμός $T(n) = ar_1^n + br_2^n + cr_3^n + dnr_3^n$ είναι λύση.

Το μόνο που απομένει είναι χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες να πάρουμε ένα γραμμικό σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους και να καθορίσουμε τις σταθερές ώστε να βρούμε την ακριβής λύση.

Παράδειγμα 8 *Να βρεθεί η λύση της αναδρομής $T(n) = 2T(n-1) - T(n-2)$, με αρχικές συνθήκες $T(0) = 0$ και $T(1) = 1$.*

Απόδειξη. Το χαρακτηριστικό πουλώνυμο είναι $x^2 - 2x + 1 = 0$, που έχει μία διπλή ρίζα $x = 1$. Άρα, η λύση έχει τη μορφή :

$$T(n) = c_1(1)^n + c_2 n(1)^n = c_1 + c_2 n$$

Οι αρχικές συνθήκες δίνουν το εξής σύστημα:

$$T(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2(0) = 0$$

$$T(1) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2(1) = 1$$

και οι λύσεις είναι $c_1 = 0, c_2 = 1$. Άρα η λύση στην αναδρομή είναι:

$$T(n) = n$$

∎

0.3.3 Μη Ομογενείς Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Μέχρι τώρα μπορούμε να λύσουμε όλες τις αναδρομικές σχέσεις της μορφής:

$$T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-1) + \cdots + a_d T(n-d)$$

Αυτή ορίζει την οικογένεια των ομογενών γραμμικών αναδρομικών σχέσεων. Η πρόσθεση μίας συνάρτησης $g(n)$ δίνει τη γενική μορφή των μη-ομογενών γραμμικών αναδρομικών σχέσεων:

$$T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-1) + \cdots + a_d T(n-d) + g(n)$$

Η επίλυση αυτών των εξισώσεων μπορεί να αναλυθεί σε τρία βήματα:

1. Αντικαθιστούμε την $g(n)$ με το 0 και επιλύουμε την ομογενής αναδρομική σχέση αγνοώντας τις αρχικές συνθήκες. Η λύση αυτή ονομάζεται *ομογενής λύση*.

2. Έπειτα επαναφέρουμε την $g(n)$ και βρίσκουμε μία λύση για την αναδρομή, αγνοώντας τις αρχικές συνθήκες. Αυτή η λύση λέγεται *συγκεκριμένη λύση*. Υπάρχουν γενικές μέθοδοι για την εύρεση συγκεκριμένων λύσεων αλλά εμείς θα προτιμήσουμε την πρόβλεψη και επαλήθευση. Σε λίγο θα αναφέρουμε πως μπορείτε να προβλέψετε τη μορφή της λύσης.

3. Προσθέτουμε τις ομογενείς και συγκεκριμένες λύσεις για να πάρουμε μία γενική λύση. Τώρα χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες για να βρούμε τις σταθερές καταλήγοντας σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων.

Το πιο δύσκολο μέρος των μη-ομογενών αναδρομών είναι η εύρεση συγκεκριμένων λύσεων. Μερικοί κανόνες μπορούν να μας βοηθήσουν στην πρόβλεψη των λύσεων αυτών:

- Γενικά βρίσκουμε μία λύση με την ίδια μορφή όπως η συνάρτηση $g(n)$.
- Αν η $g(n)$ είναι σταθερά, τότε προβλέπουμε μία λύση της μορφής $T(n) = c$. Αν αυτό δεν δουλέψει προσπαθούμε με $T(n) = bn + c$, $T(n) = an^2 + bn + c$, κοκ.
- Αν η $g(n)$ είναι πολυώνυμο, προσπαθούμε με ένα πολυώνυμο ίδιου βαθμού, αλλιώς με ένα πολυώνυμο βαθμού κατά 1 μεγαλύτερο, κοκ. Για παράδειγμα, αν $g(n) = 6n + 5$, τότε $T(n) = bn + c$, αλλιώς, $T(n) = an^2 + bn + c$, κοκ.
- Αν η $g(n)$ είναι εκθετική, όπως 3^n, τότε μαντεύουμε $T(n) = c3^n$. Αν αποτύχει τότε $T(n) = bn3^n + c3^n$, αλλιώς $T(n) = an^2 3^n + bn3^n + c3^n$, κοκ.

Παράδειγμα 9 *Να βρεθεί κλειστός τύπος για την αναδρομή* $T(n) = 4T(n-1) + 3^n$, *όπου* $T(1) = 1$.

Απόδειξη.

Βήμα 1: Βρισκουμε τις Ομογενείς Λύσεις Η ομογενής αναδρομή είναι η $T(n) = 4T(n-1)$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $x - 4 = 0$ και άρα η μόνη ρίζα είναι η $x = 4$. Επομένως, η ομογενής λύση είναι $T(n) = c4^n$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τις Συγκεκριμένες Λύσεις Τώρα θα πρέπει να βρούμε μία συγκεκριμένη λύση στην $T(n) = 4T(n-1) + 3^n$. Μαντεύουμε ότι η λύση έχει τη μορφή $d3^n$, όπου d είναι μία σταθερά. Αντικαθιστούμε και παίρνουμε:

$$d3^n = 4d3^{n-1} + 3^n \Rightarrow 3d = 4d + 3 \Rightarrow d = -3$$

Άρα $T(n) = -3 \cdot 3^n = -3^{n+1}$ είναι μία συγκεκριμένη λύση.

Βήμα 3: Προσθέτουμε τις Λύσεις και Βρίσκουμε τις Σταθερές Η γενική λύση είναι:

$$T(n) = c4^n - 3^{n+1}$$

Η αρχική συνθήκη μας δίνει την τιμή της σταθεράς c:

$$T(1) = 1 \Rightarrow c4^1 - 3^{1+1} = 1 \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

Άρα η λύση είναι $T(n) = \frac{5}{2}4^n - 3^{n+1}$. Για να σιγουρευτούμε ότι δεν έχουμε κανένα λάθος ελέγχουμε για $n = 2$. Από την αναδρομή $T(2) = 4T(1) + 3^2 = 13$. Από τον κλειστό τύπο έχουμε $T(2) = \frac{5}{2}4^2 - 3^3 = 40 - 27 = 13$. Μάλλον είμαστε σωστοί! ∎

Βιβλιογραφία

[1] Χ. Ζαρολιάγκης. Σημειώσεις για την Επίλυση Αναδρομικών Σχέσεων. Εισαγωγή στους Αλγορίθμους.

[2] T.H. Cormen, C.E. Leiserson and R.L. Rivest. *Introduction to Algorithms.* (1st edition) MIT Press. 1990.

[3] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley. 1988.

[4] http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-042JMathematics-for-Computer-ScienceFall2002/CourseHome/index.htm. Περιέχει εξαιρετικό υλικό για μαθηματικά στην επιστήμη των υπολογιστών.