

# **ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

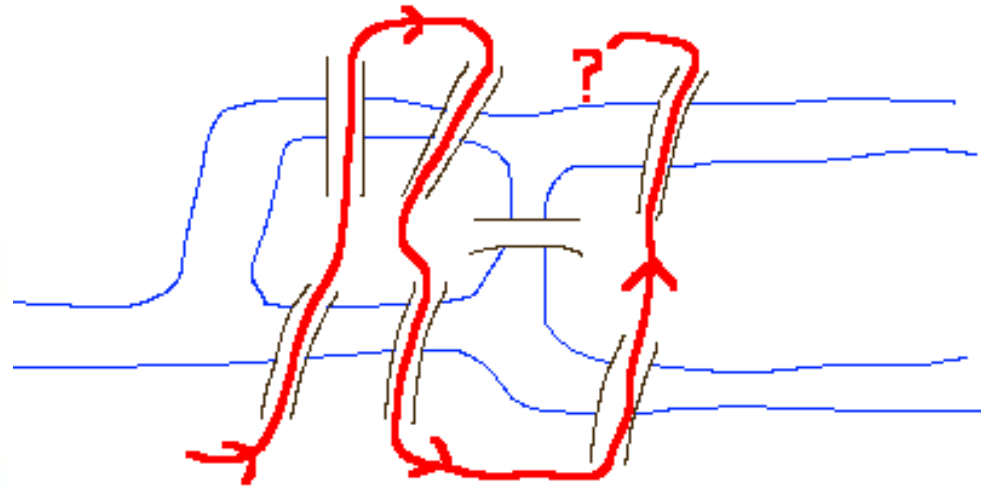
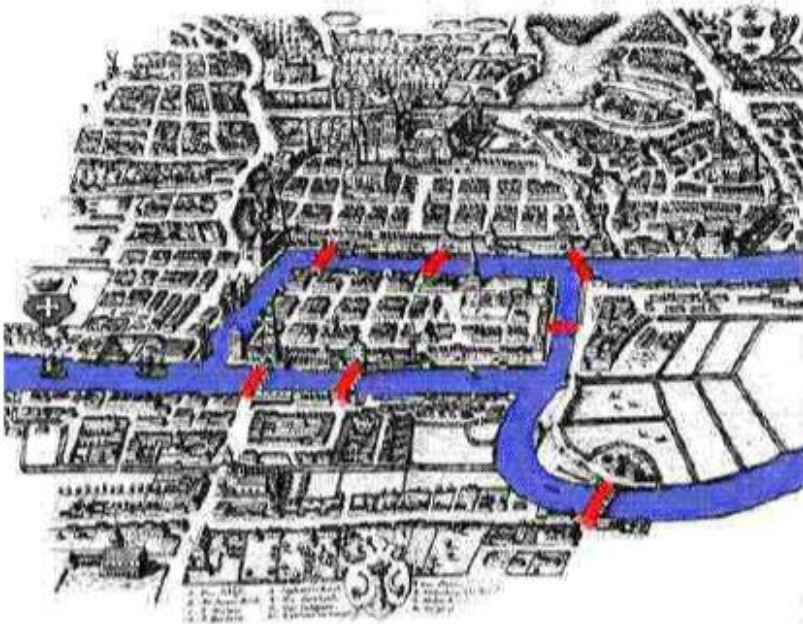
**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ**

# Εισαγωγή

- *Θεωρία γραφημάτων* (graph theory)
- Μαθηματικό εργαλείο
- Εφαρμογή σε πολλά επιστημονικά πεδία
- Χρησιμοποιούν για περιγραφή σχέσεων ανάμεσα σε αντικείμενα και οντότητες
- Θεμελίωση της Θεωρίας Γραφημάτων:
  - Ελβετός μαθηματικός Leonhard Euler (1707 - 1783)
  - Θεμελιώδης εργασία: "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*" (Η λύση ενός προβλήματος που αναφέρεται στη γεωμετρία της θέσης – 1736)

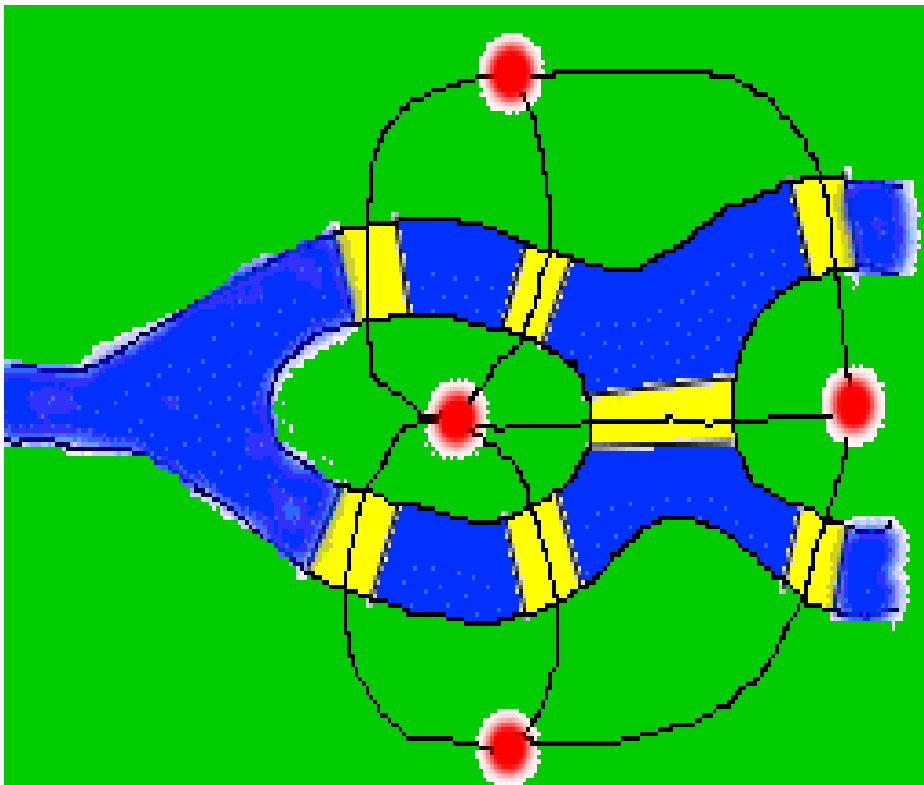


# Οι γέφυρες του Königsburg

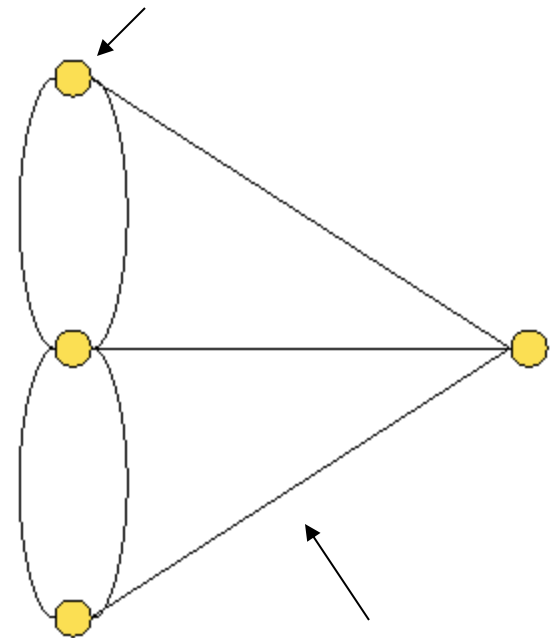


- Σημερινό Kaliningrad (στη Βαλτική μεταξύ Λιθουανίας και Πολωνίας)

# Το γράφημα



κορυφή



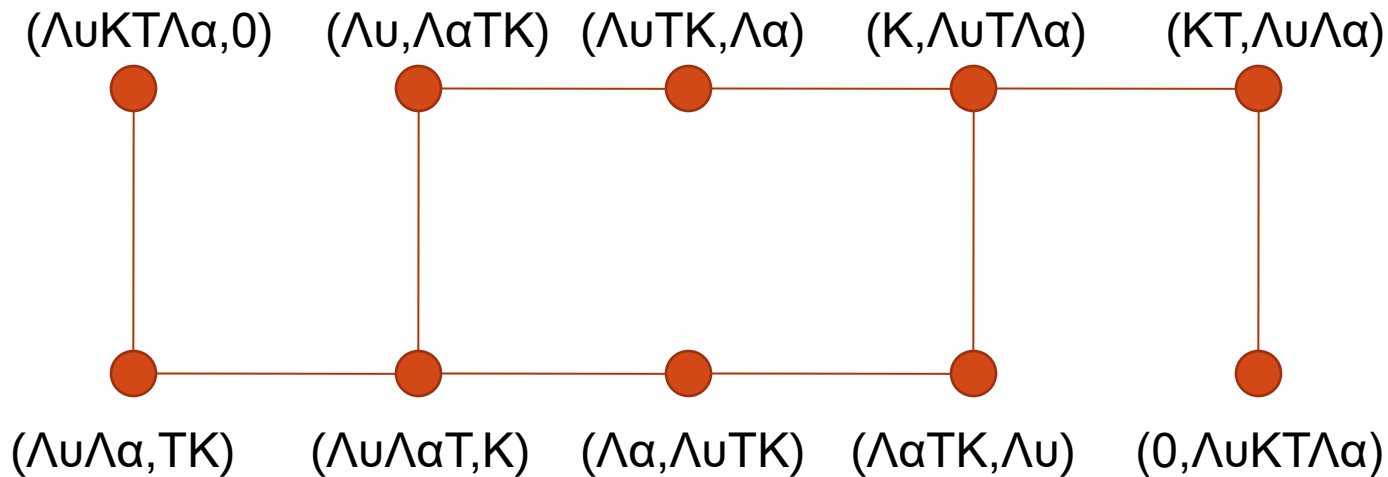
ακμή

# Ο Λύκος, η κατσίκα και το λάχανο...

- Ένας ταξιδιώτης έχει έναν λύκο, μία κατσίκα και ένα λάχανο που πρέπει να περάσει από ένα ποτάμι. Το πρόβλημα είναι ότι αν μείνουν μόνα τους, ο λύκος τρώει το κατσίκι, ή το κατσίκι τρώει το λάχανο. Η βάρκα χωράει μόνο δύο, ένας εκ των οποίων είναι ο ταξιδιώτης.

**Πώς θα τα περάσει ο ταξιδιώτης απέναντι;**

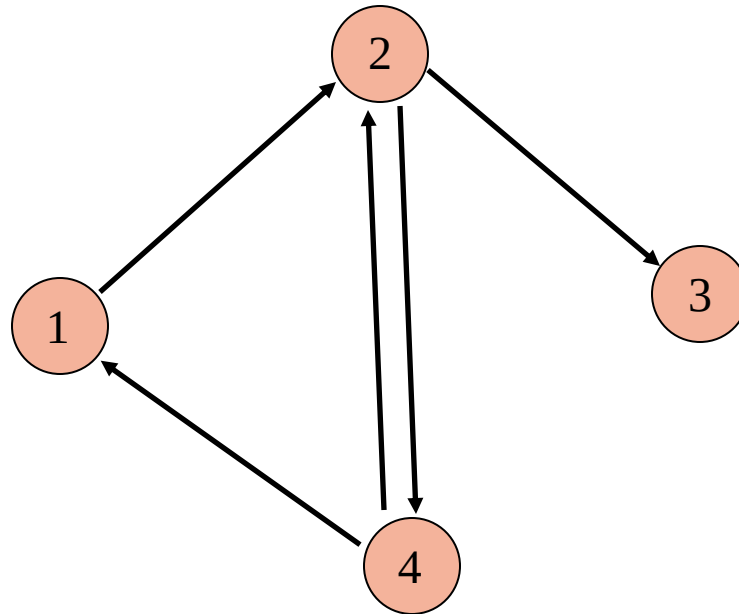
# Ο Λύκος, η κατσίκια και το λάχανο...



# Μερικές Εφαρμογές γραφημάτων

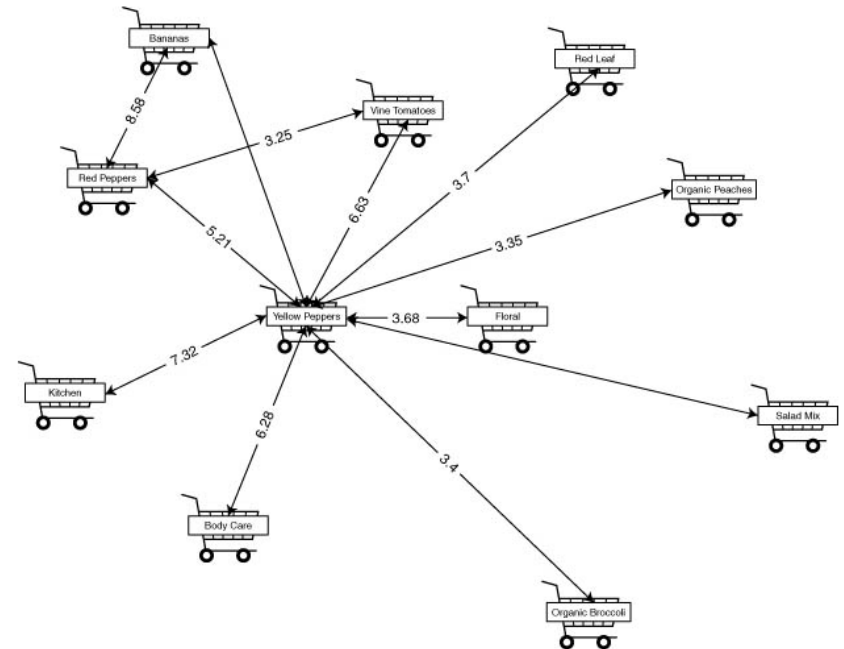
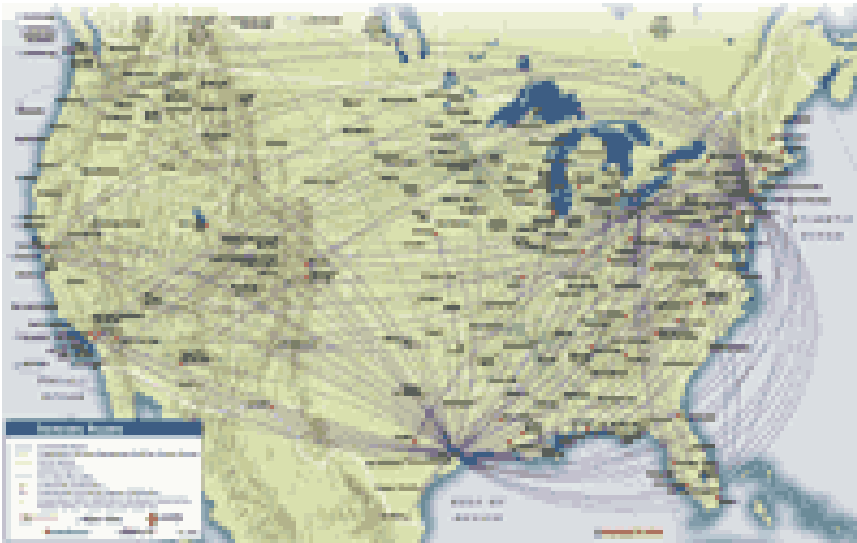
| Εφαρμογή    | Κορυφές                                         | Ακμές                                       | Ροή                             |
|-------------|-------------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------|
| Επικοινωνία | Υπολογιστές,<br>τηλεφωνικό δίκτυο,<br>δορυφόροι | Καλώδια, οπτικές<br>ίνες, ασύρματα          | Φωνή, Εικόνα,<br>πακέτα         |
| Κυκλώματα   | Πύλες, Καταχωρητές,<br>CPU                      | Καλώδια                                     | Ρεύμα                           |
| Μηχανική    | Σύνδεσμοι                                       | Δοκοί, ακτίνες,<br>ελατήρια                 | Ενέργεια,<br>Θερμότητα          |
| Υδραυλική   | Λίμνες, Ταμιευτήρες,<br>Σταθμοί άντλησης        | Σωληνώσεις                                  | Νερό,<br>Πετρέλαιο              |
| Οικονομικά  | Νόμισμα, Μετοχές                                | Συναλλαγές                                  | Κεφάλαιο                        |
| Μεταφορές   | Αεροδρόμια,<br>διασταυρώσεις,<br>σταθμοί τρένων | Αεροδιάδρομοι,<br>γραμμές τρένου,<br>δρόμοι | Φορτία,<br>οχήματα,<br>επιβάτες |

# Κατευθυνόμενο Γράφημα





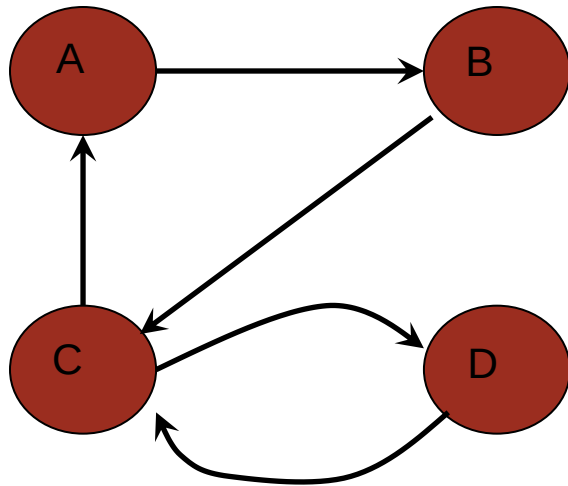
# Συνδεσιμότητα



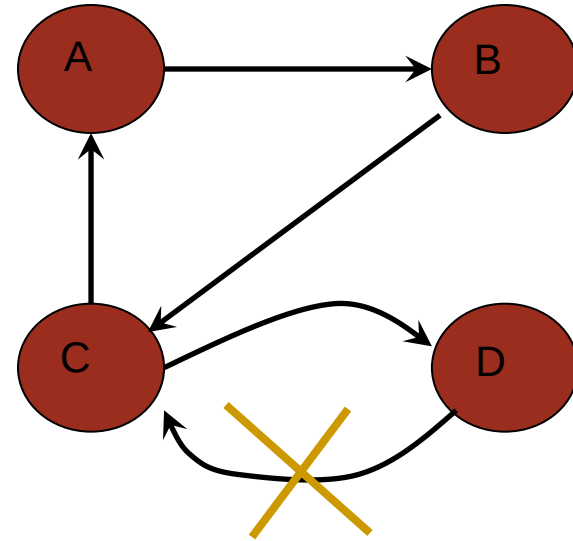
Μπορώ να πετάξω από την πόλη A στην πόλη B με την εταιρία;

Υπάρχει διαδρομή από την πόλη A στην πόλη B στο δίκτυο της;

# Λειτουργία δικτύων

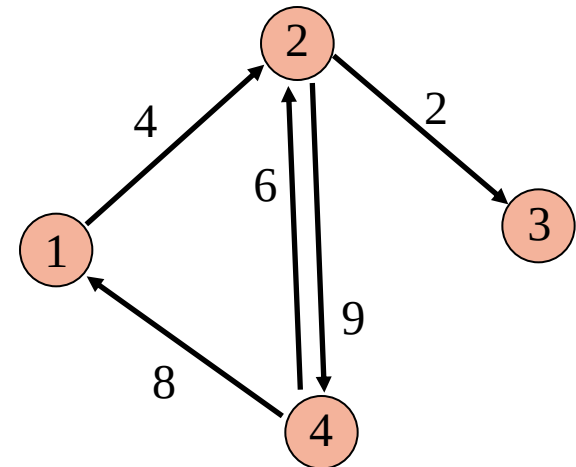
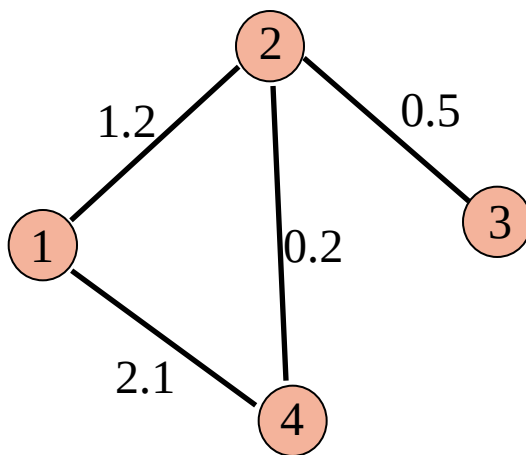


Μπορώ να πάω από κάθε κόμβο σε κάθε άλλον;

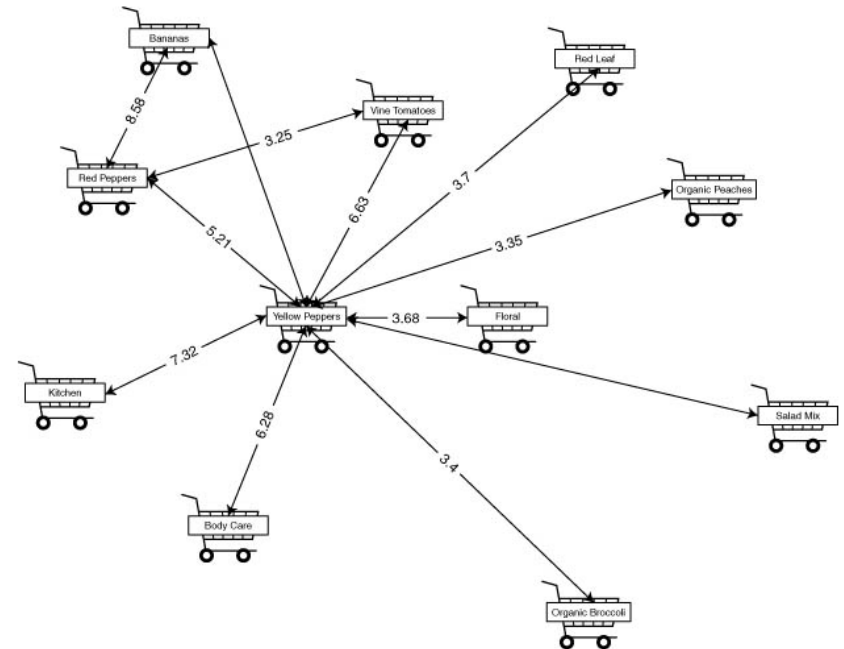
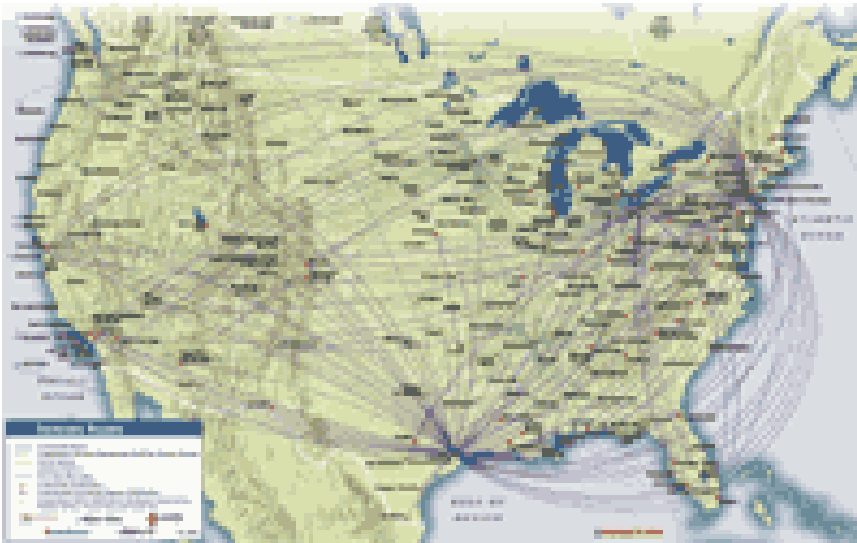


Βλάβη

# Ζυγισμένο Γράφημα (weighted)



# Συντομότερη Διαδρομή



Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή από την πόλη **A** στην πόλη **B** με την εταιρία;  
Ποια διαδρομή από την πόλη **A** στην πόλη **B** έχει το μικρότερο βάρος;

# GPS – Navigation



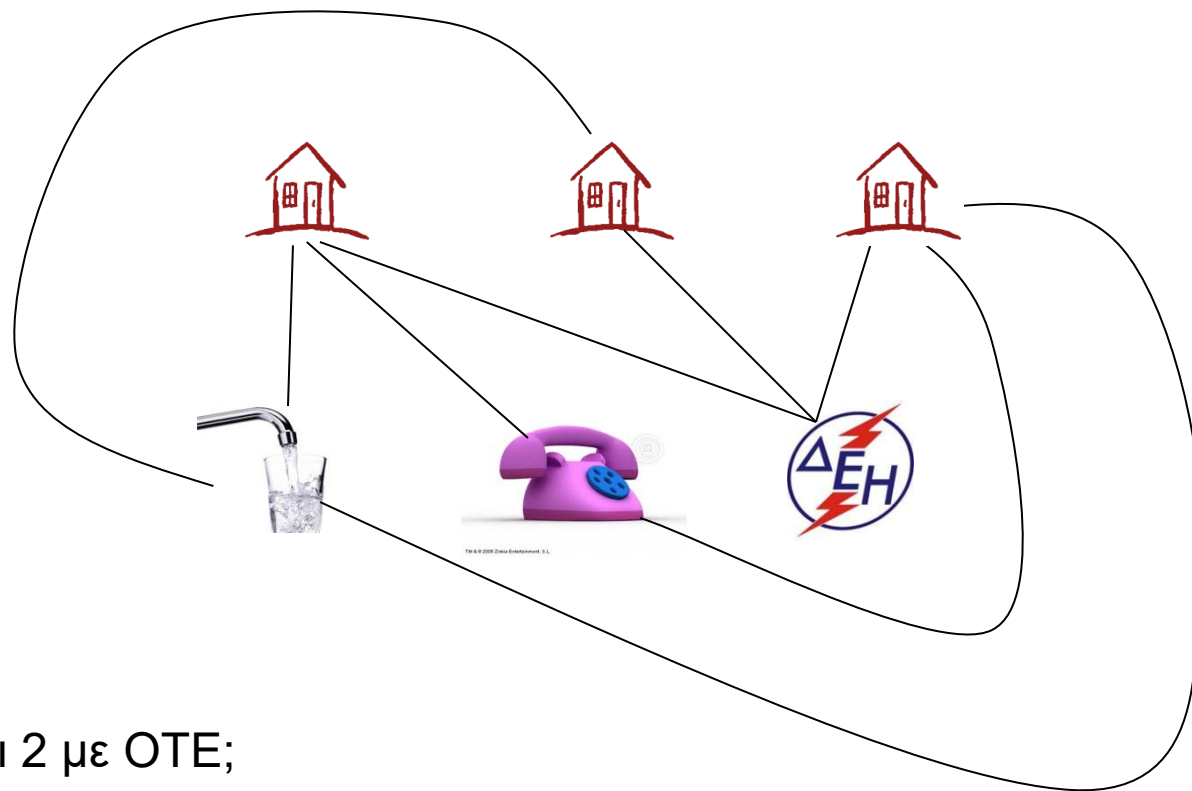
Εύρεση Ελαχίστων  
Διαδρομών...

# Το πρόβλημα των συνδέσεων

- Δοθέντων τριών σπιτιών, υπάρχει τρόπος να συνδεθούν όλα μέσω καλωδίου ή σωληνώσεων με τηλέφωνο, νερό και ηλεκτρισμό χωρίς τα καλώδια/σωλήνες να τέμνονται ή το ένα να περνά πάνω ή κάτω από το άλλο;



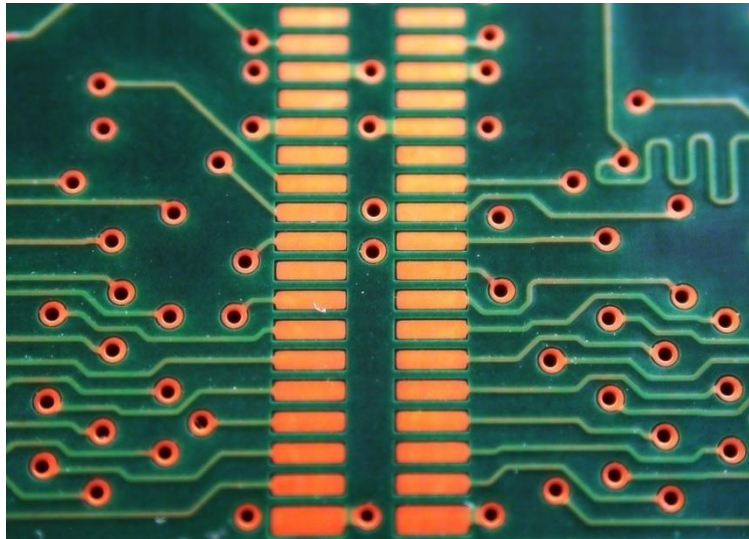
# Προσπαθήστε...



Σπίτι 2 με ΟΤΕ;

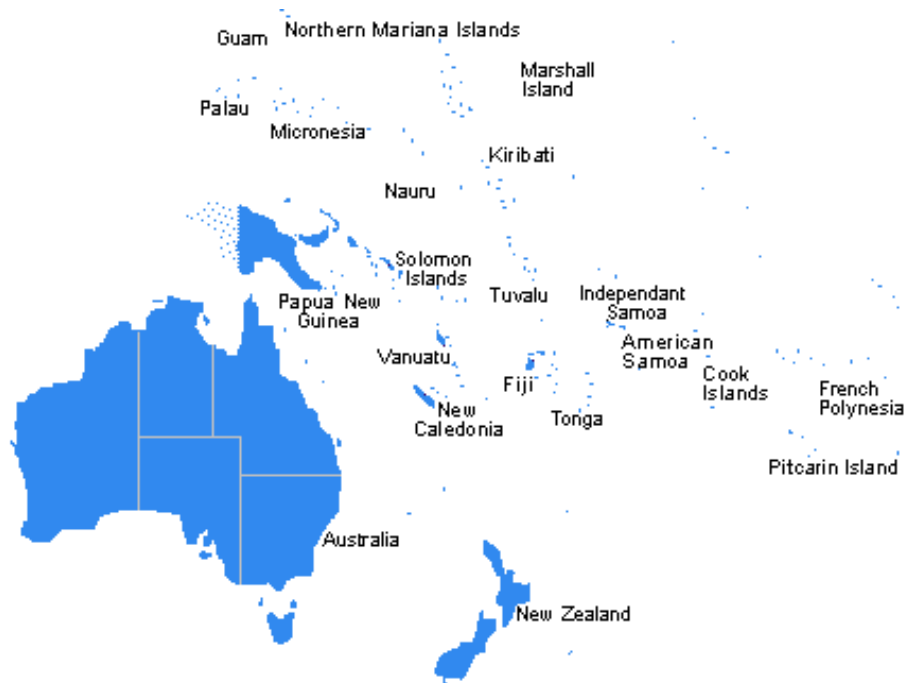
# Επιτιπεδικότητα

- Μπορεί ένα γράφημα να σχεδιαστεί ώστε να μην υπάρχουν τεμνόμενες ακμές;



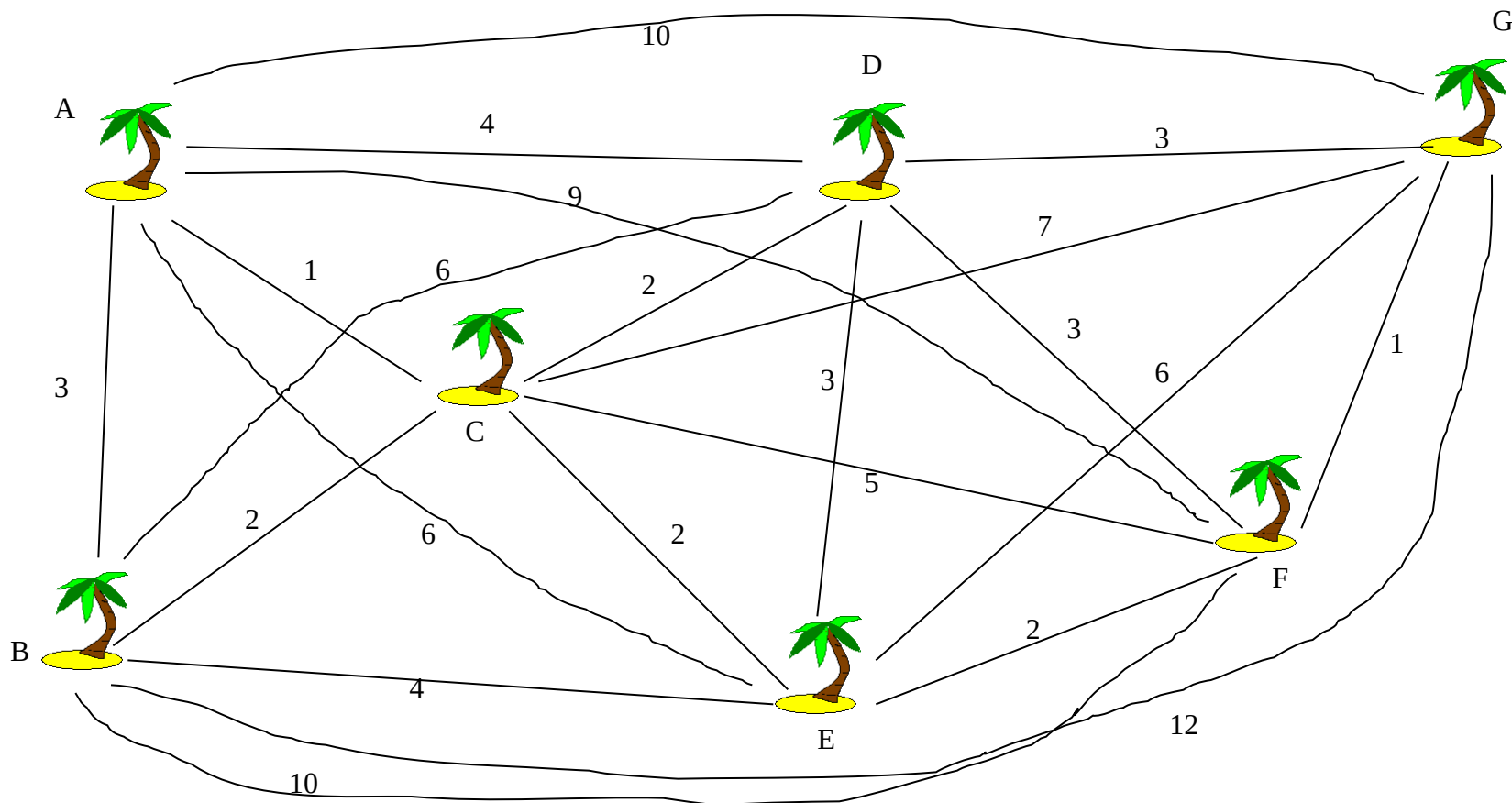


# Ωκεανία

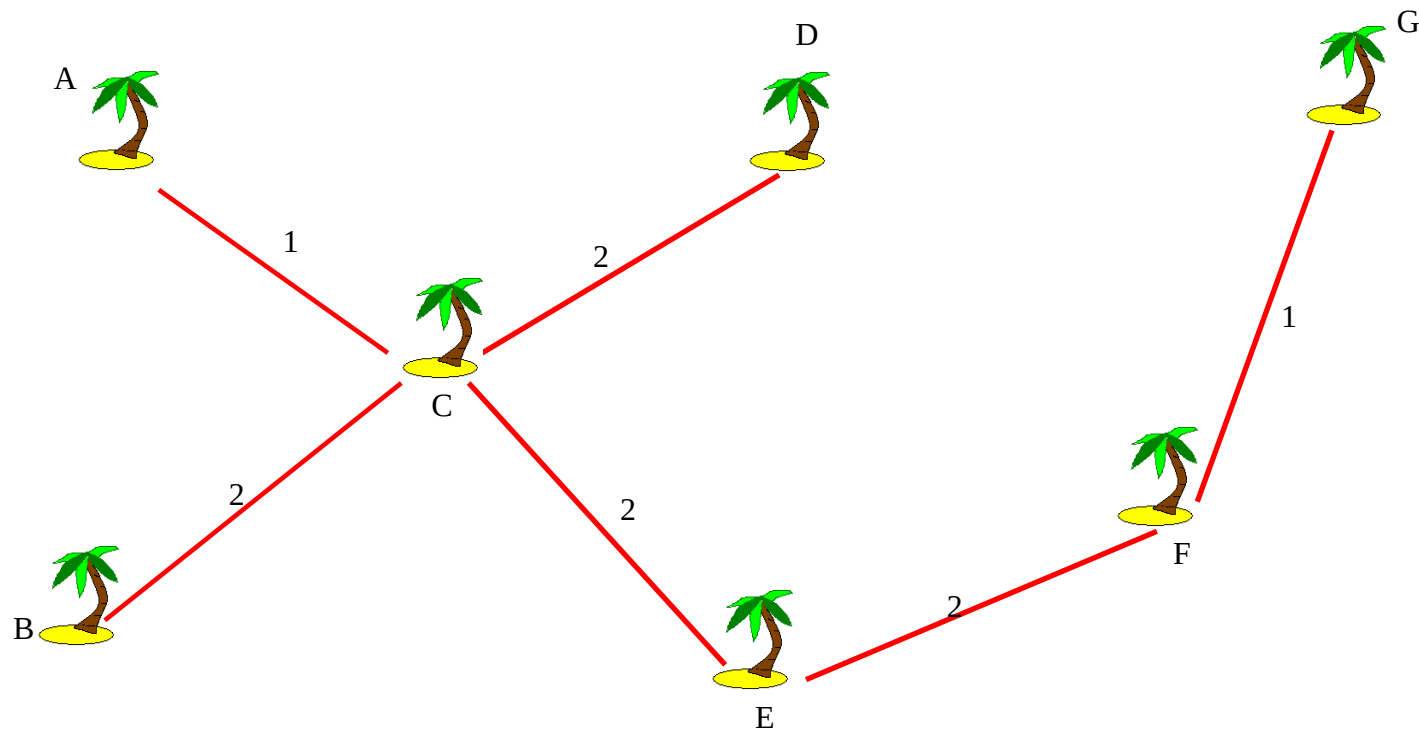


Ποιο δίκτυο διαδρομών είναι το ασφαλέστερο; (κίνδυνος από μεγάλες διαδρομές στη θάλασσα)

# Δένδρα Ελάχιστης Σύνδεσης



# Λύση



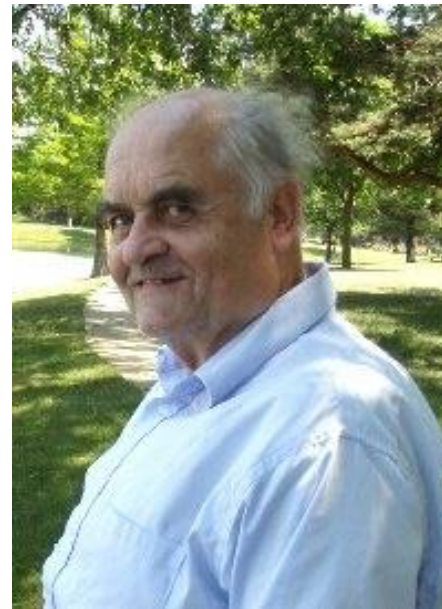
# Χάρτες (χρωματισμός)

- Πως μπορώ να χρωματίσω κάθε χώρα ώστε γειτονικές χώρες να μην έχουν ίδιο χρώμα;
- Πόσα χρώματα χρειάζονται στο ελάχιστο;

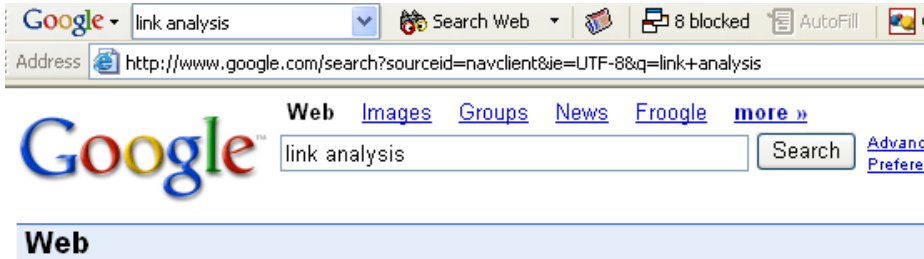


# Η Εικασία των 4 χρωμάτων

- Το 1976, οι **Kenneth Appel** και **Wolfgang Haken** ανακοίνωσαν την απόδειξη (με τη βοήθεια υπολογιστή) της Εικασίας των 4 χρωμάτων, ένα άλυτο πρόβλημα επί αιώνες.



# Ανάλυση Συνδέσμων



## How Search Engines Use Link Analysis

... How Search Engines Use **Link Analysis**. ... **Link analysis** is used by several engines as part of their ranking algorithm, most notably Google. ... [searchenginewatch.com/searchday/article.php/2158431](http://searchenginewatch.com/searchday/article.php/2158431) - 44k - Aug 7, 2004 - [Cached](#) - [Similar pages](#)

## Wireless Network Link Analysis

Wireless Network **Link Analysis**. A service of Green Bay Professional Packet Radio ®. Transmitter Specifications. Highest Transmitted Frequency, MHz. ... [my.athenet.net/~multiplx/cgi-bin/wireless.main.cgi](http://my.athenet.net/~multiplx/cgi-bin/wireless.main.cgi) - 23k - Aug 7, 2004 - [Cached](#) - [Similar pages](#)

## [link.springer.de/link/service/journals/10044/](http://link.springer.de/link/service/journals/10044/)

[Similar pages](#)

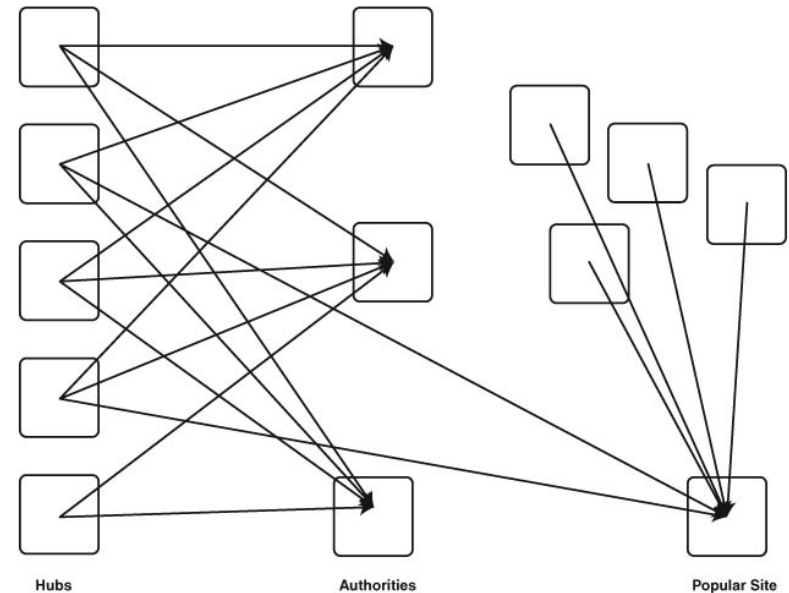
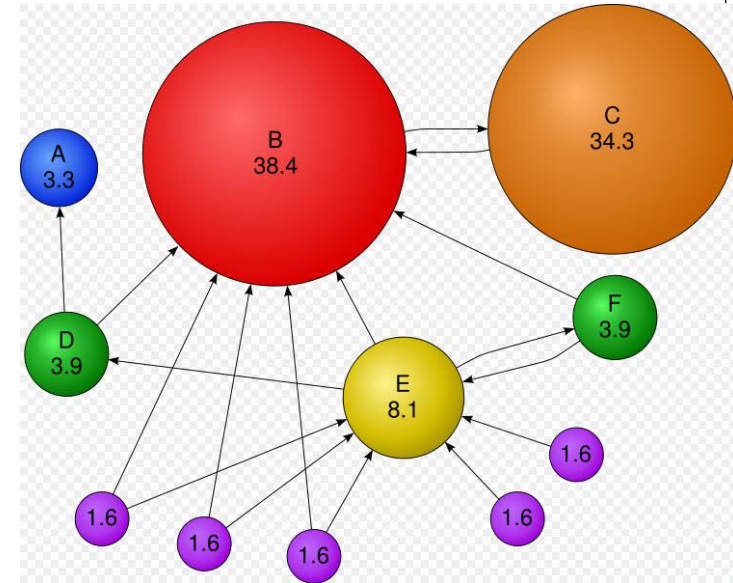
## SDM 2004 Workshop on Link Analysis

Workshop on **Link Analysis**, Counter-terrorism, and Privacy. in conjunction with ... Performance evaluation measures; Innovative applications related to **Link Analysis**; ... [www-users.cs.umn.edu/~aleks/sdm04w/](http://www-users.cs.umn.edu/~aleks/sdm04w/) - 12k - [Cached](#) - [Similar pages](#)

## Data Mining Algorithm-Link Analysis

... **Link Analysis**. The **Link Analysis** (LA) exploration engine reveals and visually represents complex patterns of correlations between ...

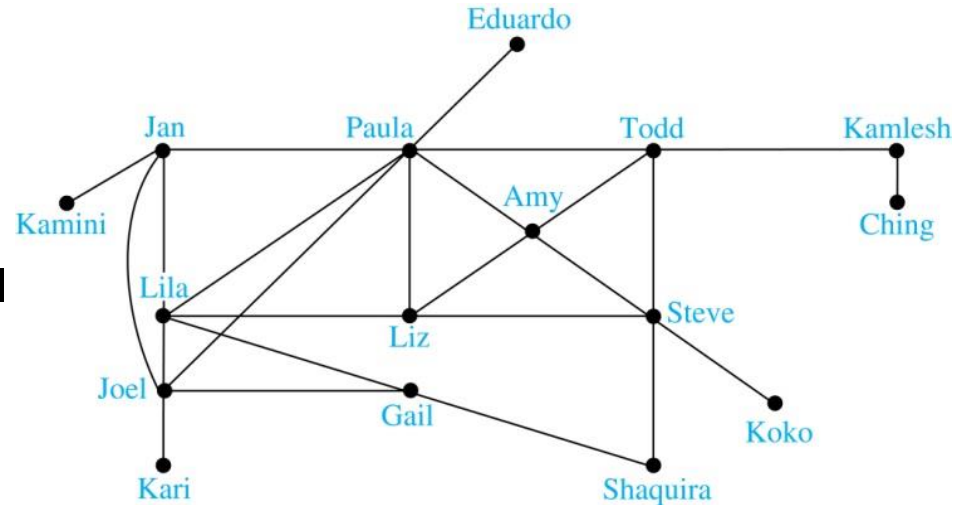
[megaputer.com/products/pa/algorithms/la.php3](http://megaputer.com/products/pa/algorithms/la.php3) - 10k - [Cached](#) - [Similar pages](#)



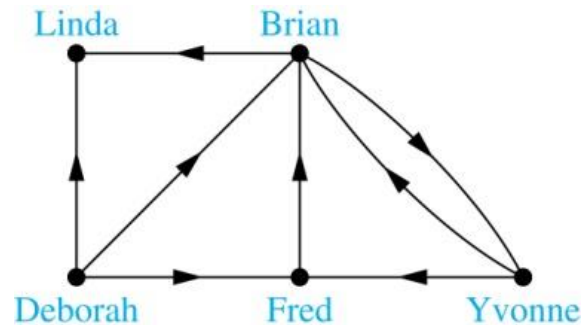
Ποιοι κόμβοι είναι *κεντρικοί*;

# Κοινωνικά Δίκτυα

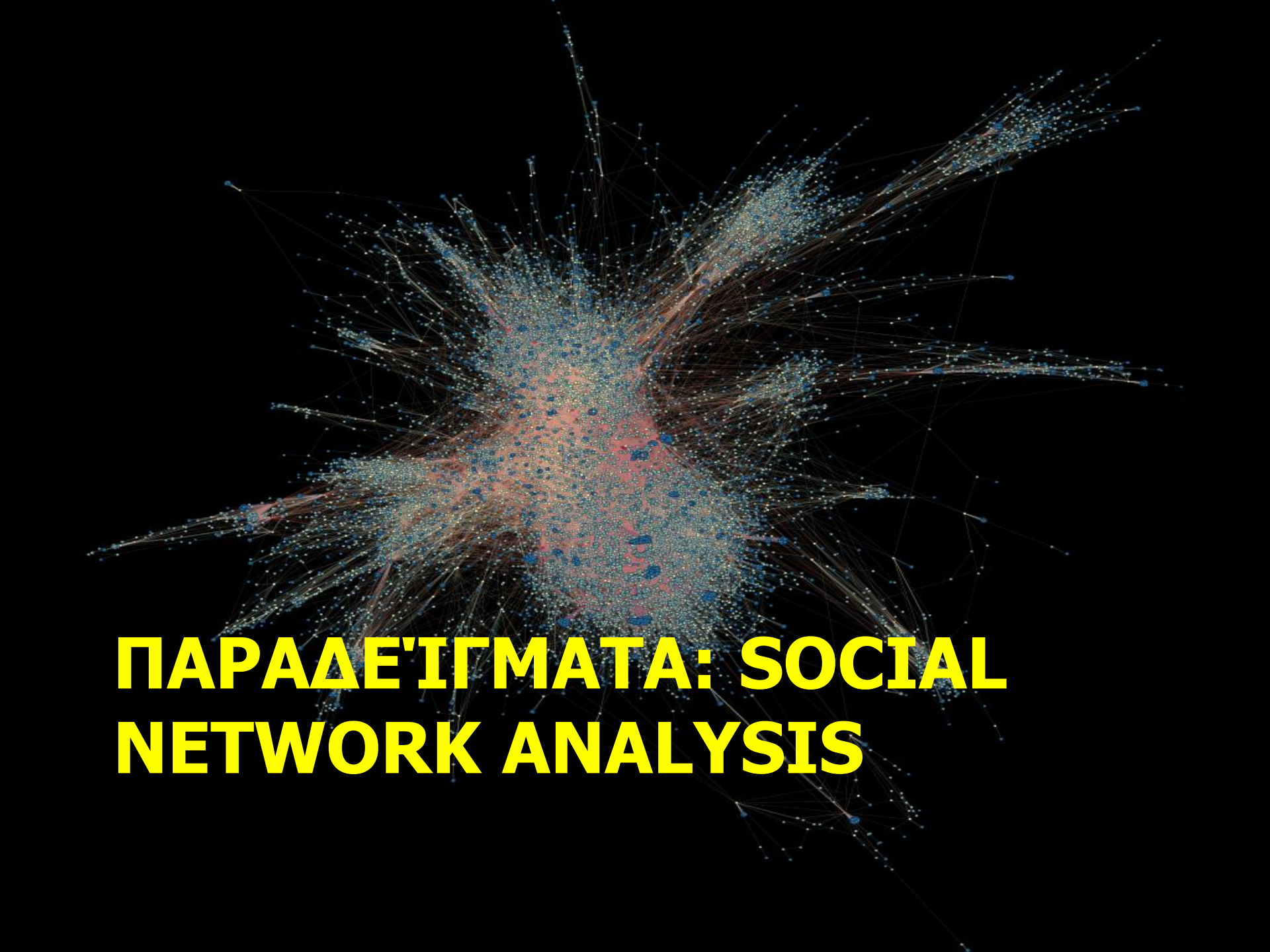
Ένα γράφημα φιλίας όπου δύο άνθρωποι συνδέονται αν είναι φίλοι στο Facebook.



Ένα γράφημα επιρροής

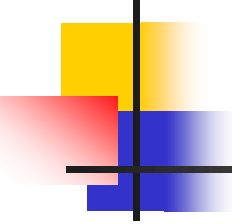






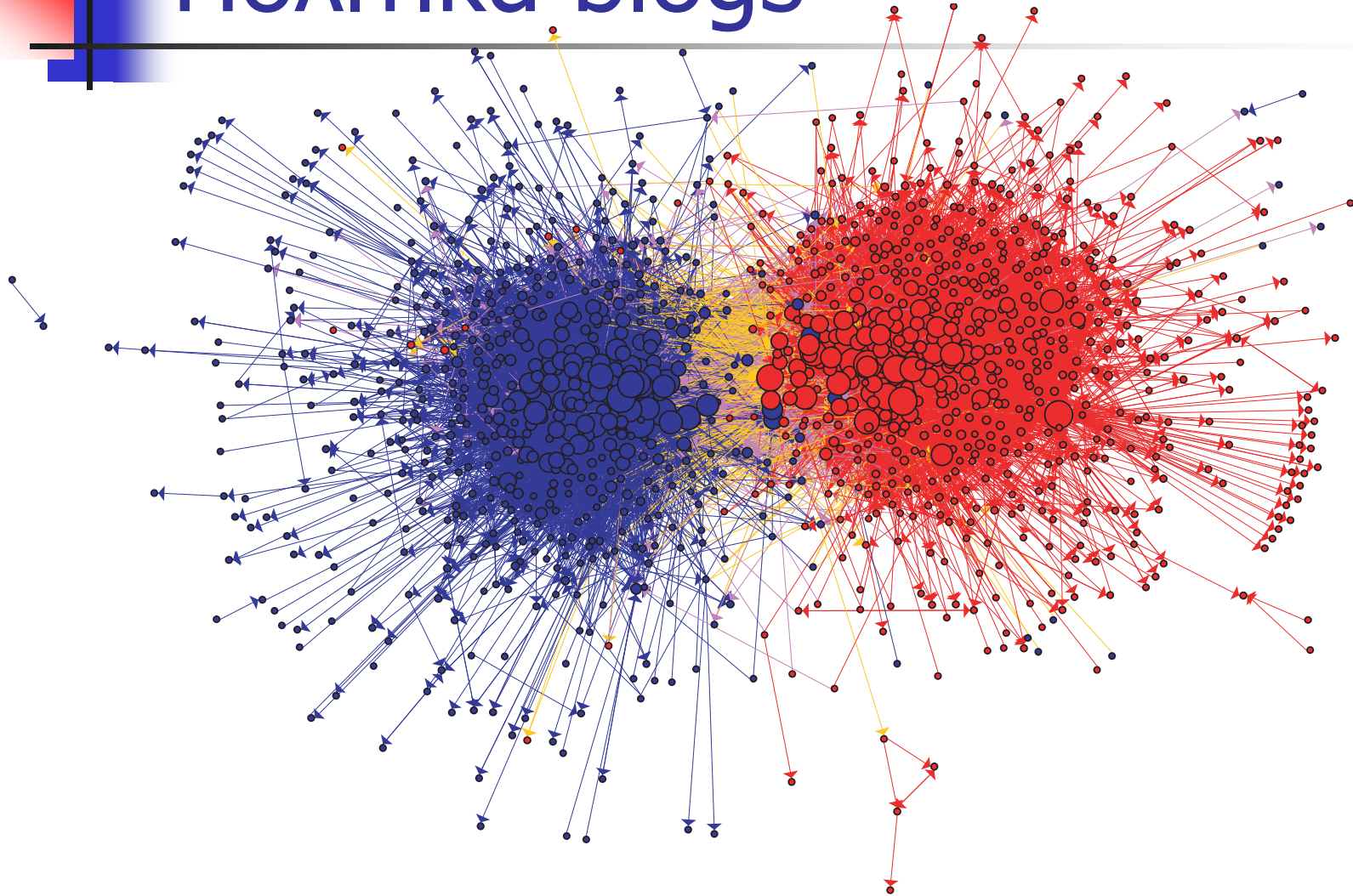
# **ΠΑΡΑΔΕΪΓΜΑΤΑ: SOCIAL NETWORK ANALYSIS**

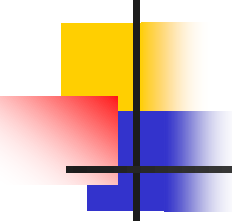




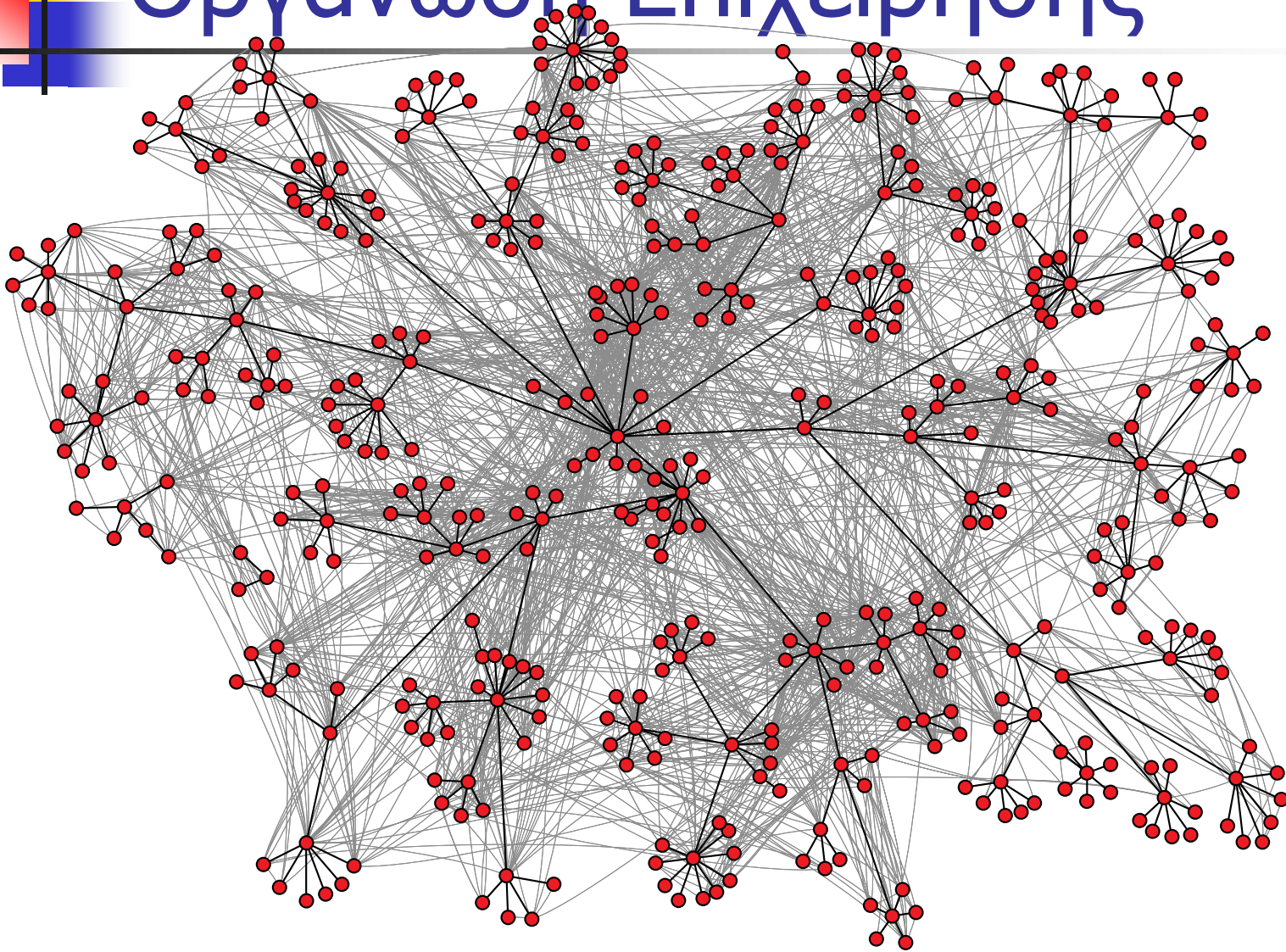
# Πολιτικά blogs

---

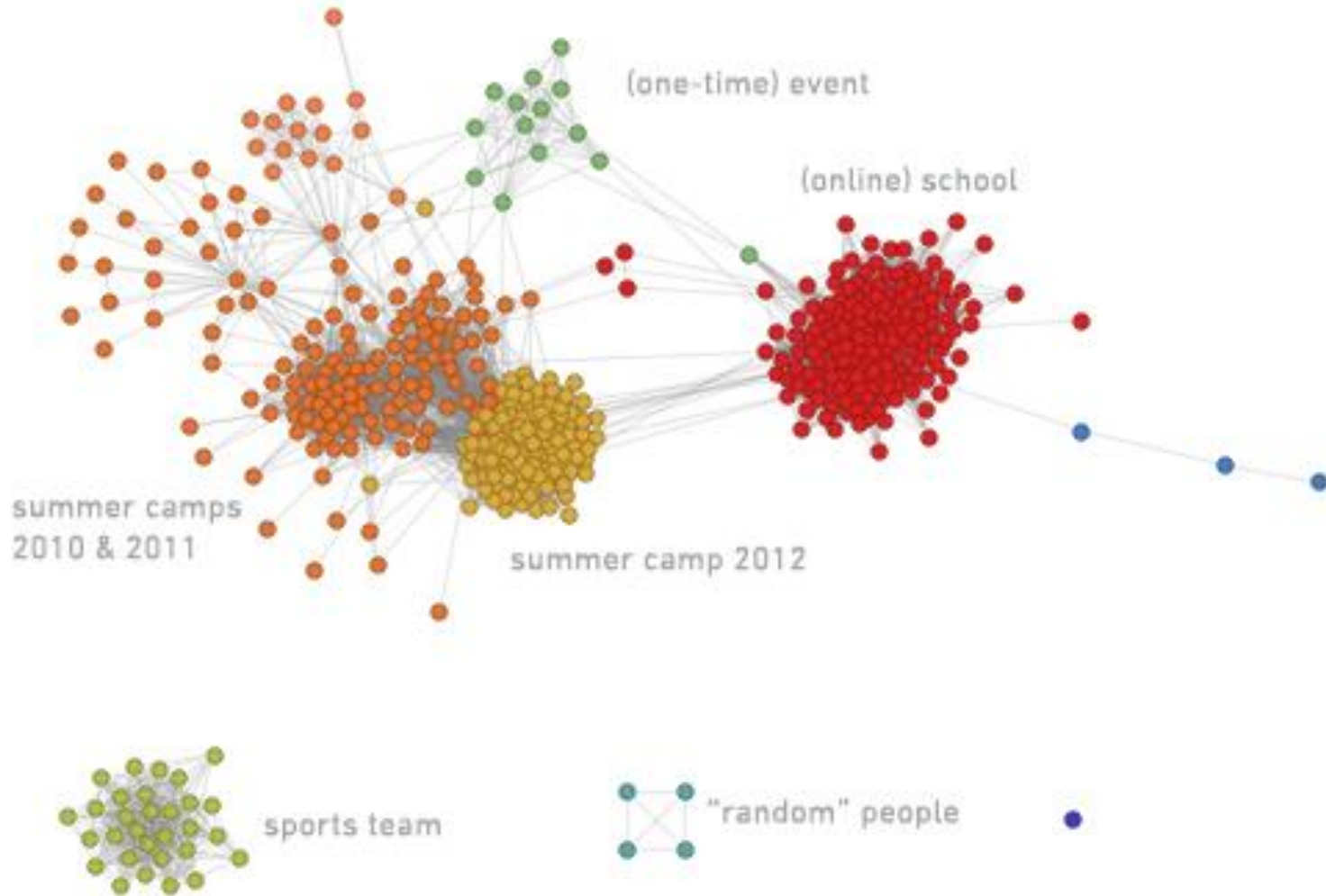




# Οργάνωση Επιχείρησης



# Facebook Δίκτυα Φιλίας (όχι πια ☹)

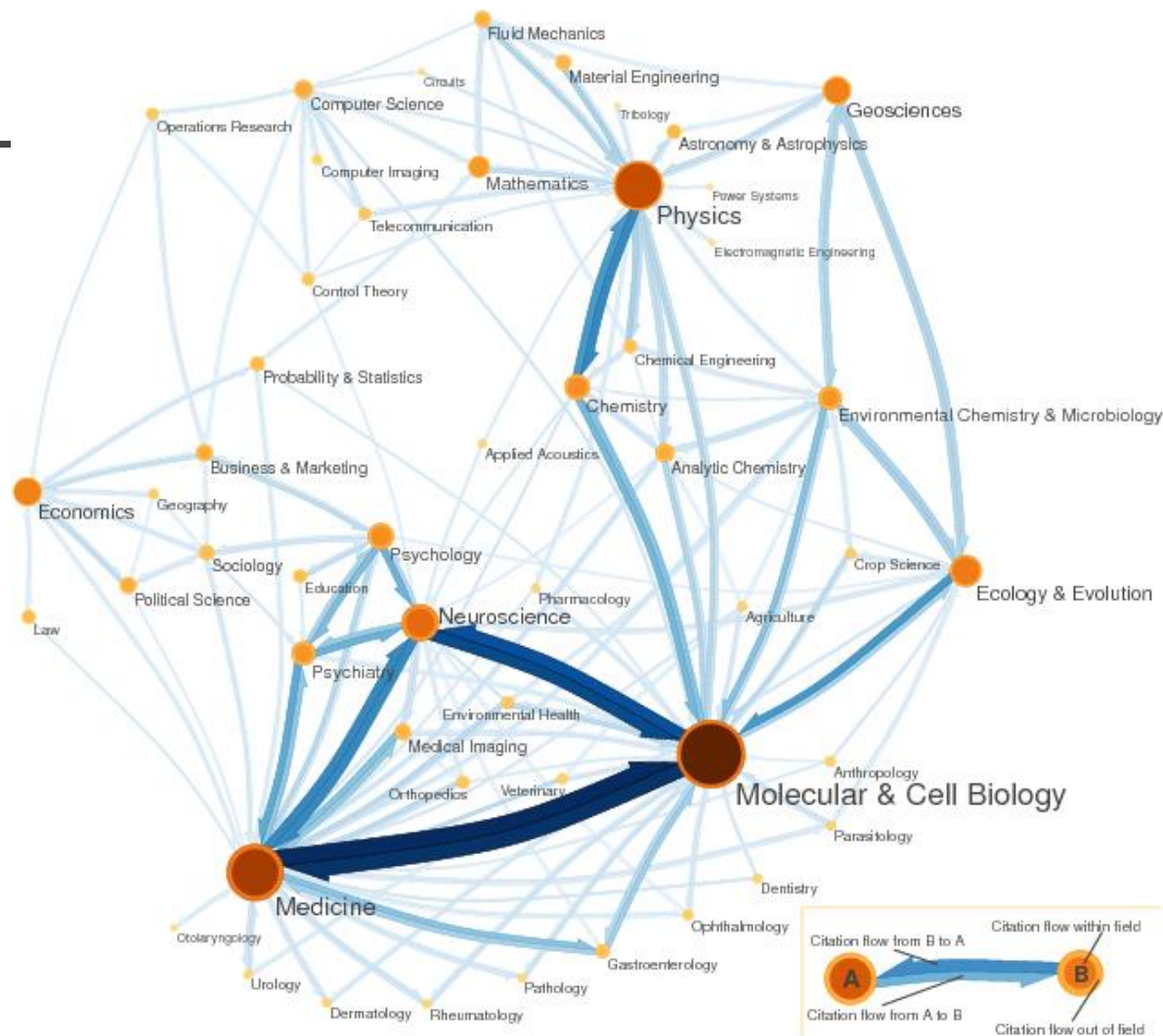




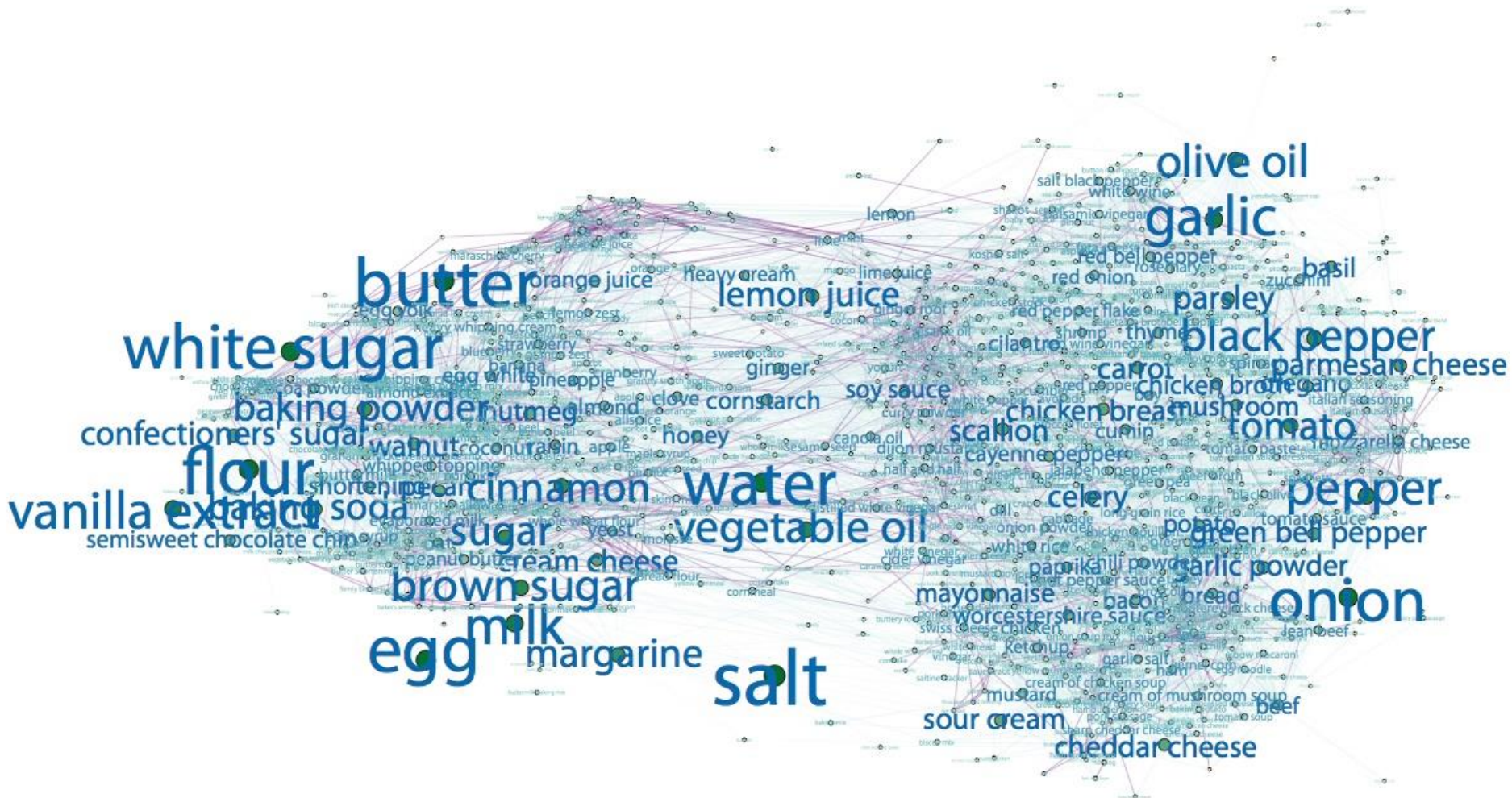
# Δίκτυο Μετρό (Tube – Λονδίνο)



# Χάρτης επιστήμης (science map)

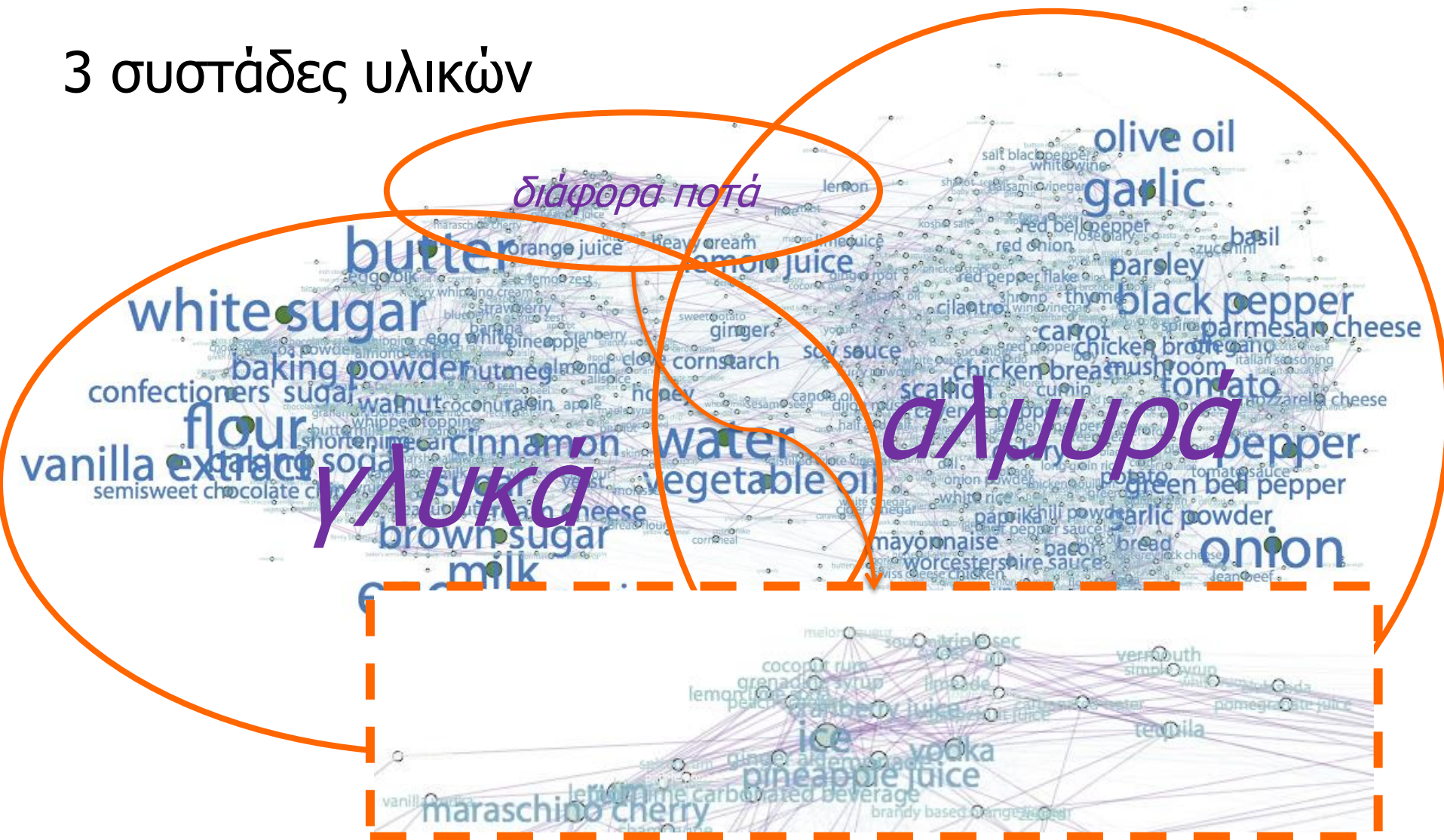


# Δίκτυο Συμπληρωματικών Συστατικών





### 3 συστάδες υλικών





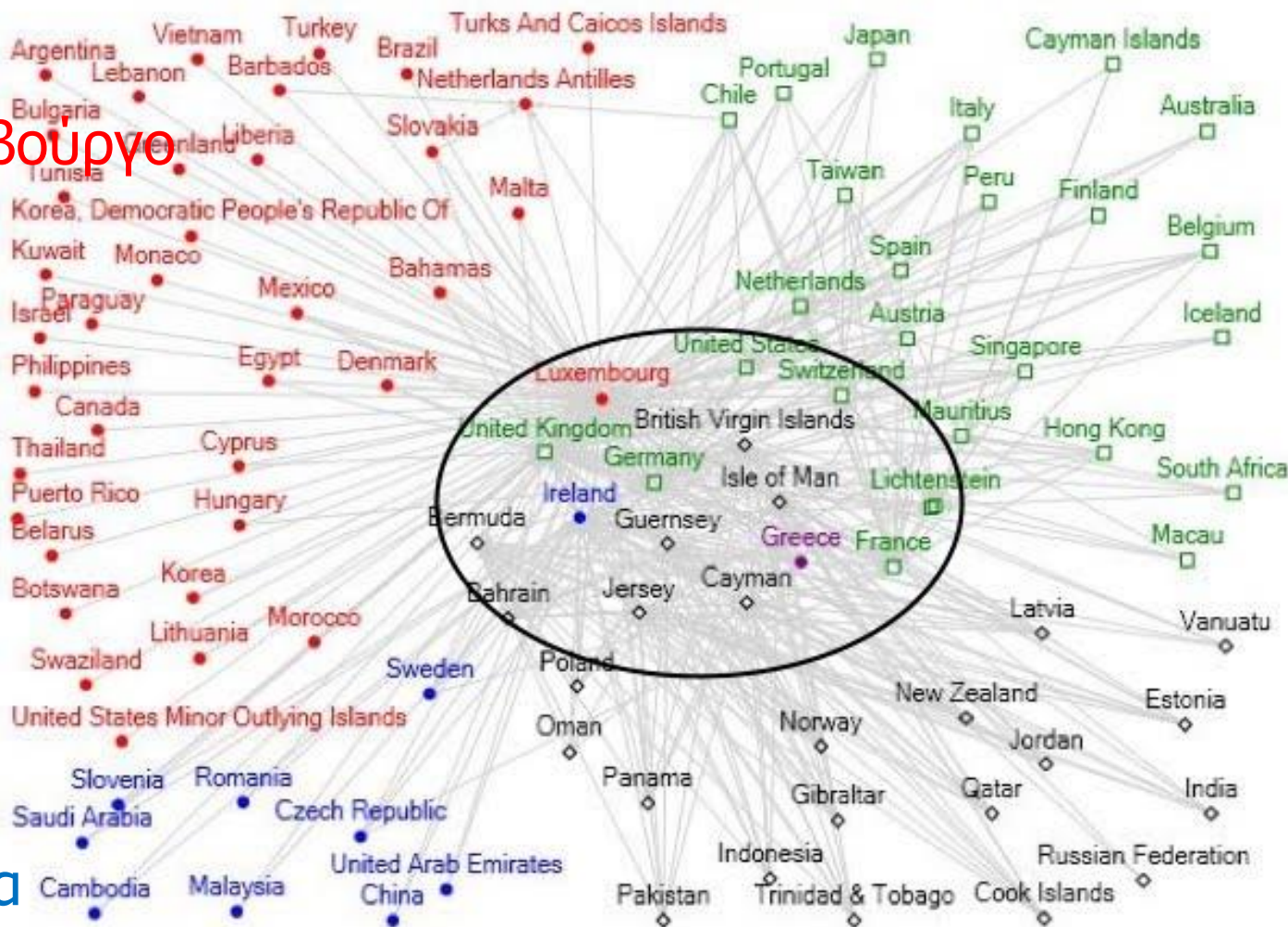


**Ο ανθρώπινος  
εγκέφαλος έχει  
10-100 δις  
νευρώνες**



# Φορολογικοί Παράδεισοι και η Ελλάδα (από IMF)

Figure 10. Cross-Border Exposures: Greece's Interconnections



ΗΠΑ

Αγγλία

Λουξεμβούργο

Ιρλανδία

# Πιο Τυπικά...

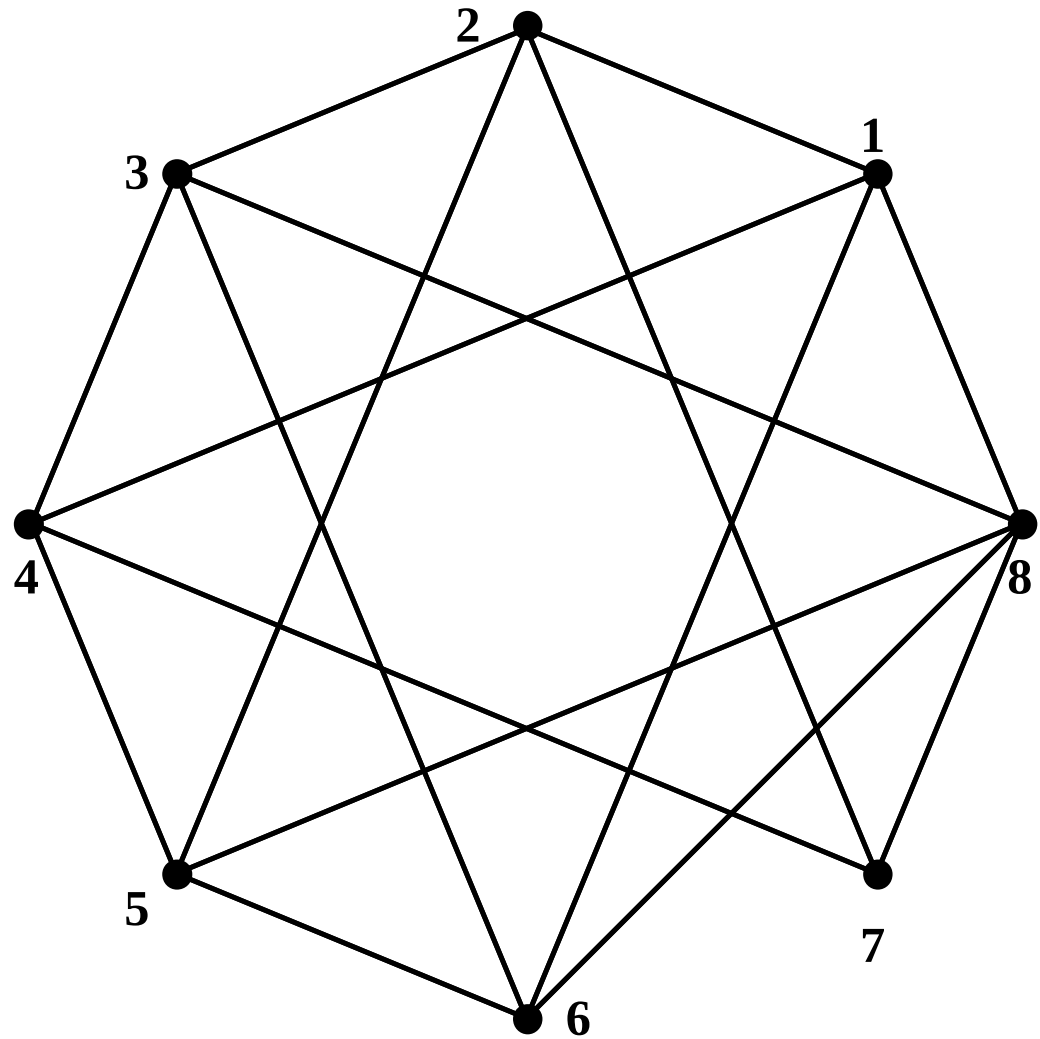
---

# Ορισμός – Μη κατευθυνόμενο

*Γράφημα* (graph): Ένα ζεύγος  $G = (V, E)$  συνόλων όπου

- Τα στοιχεία του συνόλου  $E$  είναι 2-υποσύνολα του συνόλου  $V$
- Τα στοιχεία του  $V$  ονομάζονται *κορυφές* (vertices) του γραφήματος  $G$
- Τα στοιχεία του  $E$  ονομάζονται *ακμές* (edges)

# Παράδειγμα



Γράφημα  $G = (V, E)$

Σύνολο κορυφών:

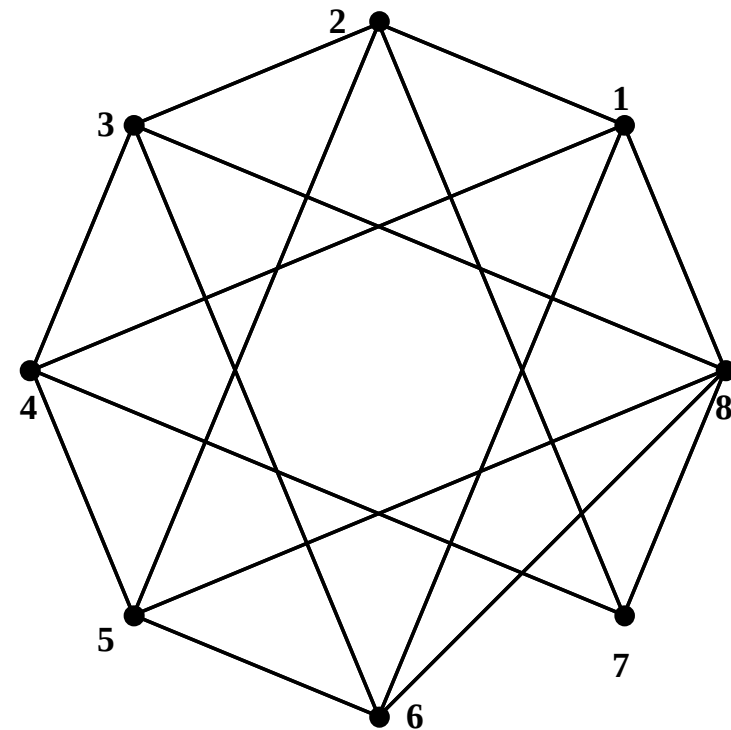
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Σύνολο ακμών:

$E = \{ \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{3, 8\},$   
 $\{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 8\}, \{6, 8\}, \{7, 8\} \}$

# Ορολογία

- Μια τελεία είναι μια **κορυφή/κόμβος**.
- Οι γραμμές ονομάζονται **ακμές**.
- Ο αριθμός των φορών που μια ακμή ακουμπά μια κορυφή ονομάζεται **βαθμός** της κορυφής.
- **Γειτονικές** (adjacent ή neighbours) κορυφές:  $a, b \in V(G)$  και  $e = \{a, b\} \in E(G)$
- Η ακμή  $e$  **συνδέει** (joins) τις  
37 κορυφές





# Αναπαράσταση Γραφημάτων: Μητρώα Γειτνίασης

Παράσταση με αριθμητική μορφή, κατάλληλη για επεξεργασία με υπολογιστές

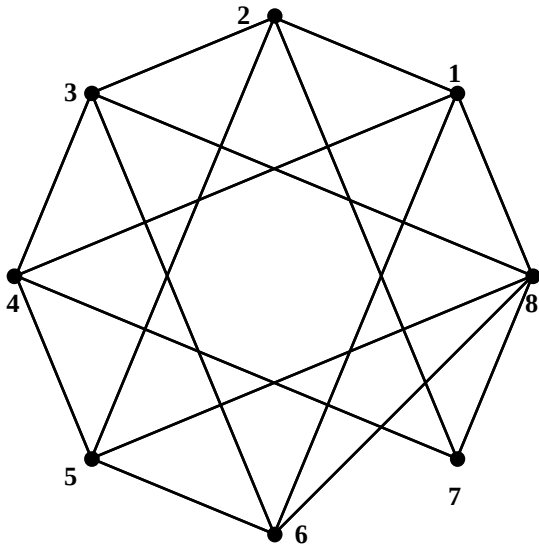
**Μητρώα γειτνίασης** (adjacency matrix) γραφήματος  $G = (V, E)$  με  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ :

Το  $n \times n$  μητρώο  $\mathbf{A}_G = [a_{ij}^{(G)}]$  με στοιχεία

$$a_{ij}^{(G)} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{αν } \{i, j\} \notin E \end{cases}, \quad i, j \in 1, 2, \dots, n$$

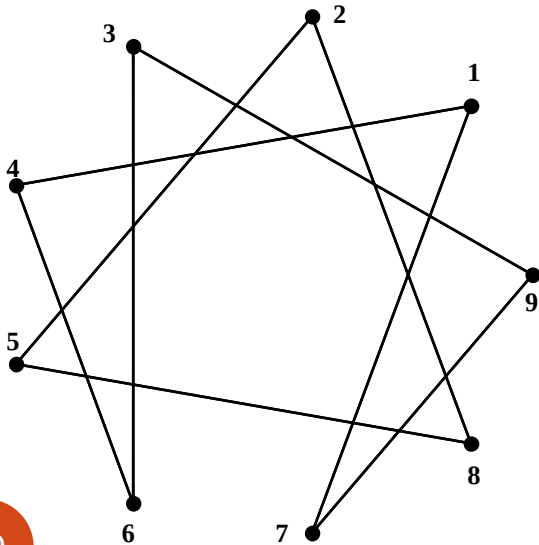
$a_{ij}^{(G)} = 1$  αν οι κορυφές  $v_i$  και  $v_j$  συνδέονται, 0 αλλιώς

# Παράδειγμα



$A_G =$

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |



$A_G =$

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

# Άθροισμα βαθμών

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

**Απόδειξη:** Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι το άθροισμα όλων των στοιχείων του μητρώου γειτνίασης και είναι το διπλάσιο από το πλήθος των ακμών το οποίο εκφράζεται από το άθροισμα των στοιχείων πάνω (ή κάτω) από τη διαγώνιο.

# Βαθμοί Κορυφών

- Πόσες ακμές έχει ένα γράφημα με 10 κορυφές βαθμού 6;
- Αν ένα γράφημα έχει 5 κορυφές, μπορεί κάθε κορυφή να έχει περιττό βαθμό;
- Να δείξετε ότι ένα γράφημα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού.

# Θέματα

Να απαντήσετε με αιτιολόγηση στις παρακάτω ερωτήσεις:

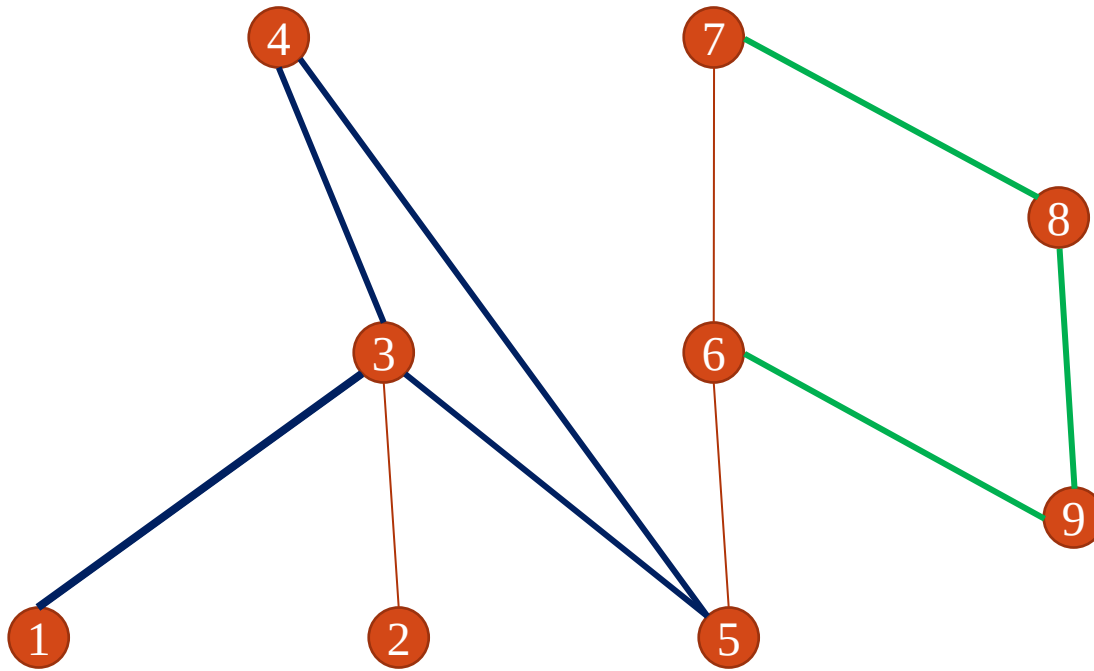
- α) Μπορεί ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα να έχει περιττό πλήθος κόμβων περιττού βαθμού;
- β) Είναι δυνατόν σε μία ομάδα 9 ατόμων κάθε άτομο να έχει φίλους 5 μόνο άλλα άτομα;
- γ) Υπάρχουν κάποιοι άνδρες και 15 γυναίκες σε ένα δωμάτιο. Κάθε άνδρας κάνει χειραψία με 6 ακριβώς γυναίκες ενώ κάθε γυναίκα με 8 ακριβώς άνδρες. Πόσοι άνδρες υπάρχουν στο δωμάτιο;

# Ορολογία Γραφημάτων

- ▣ **Διαδρομή** είναι μια ακολουθία συνεχών ακμών και κορυφών.
- ▣ **Κλειστή διαδρομή – Κύκλος** είναι μια διαδρομή που καταλήγει στην αφετηρία της.
- ▣ **Ίχνος** είναι μια διαδρομή που δεν επαναλαμβάνονται ακμές.
- ▣ **Κύκλωμα** είναι ένας κύκλος που δεν επαναλαμβάνονται ακμές.



# Παράδειγμα Διαδρομής – Ίχνους



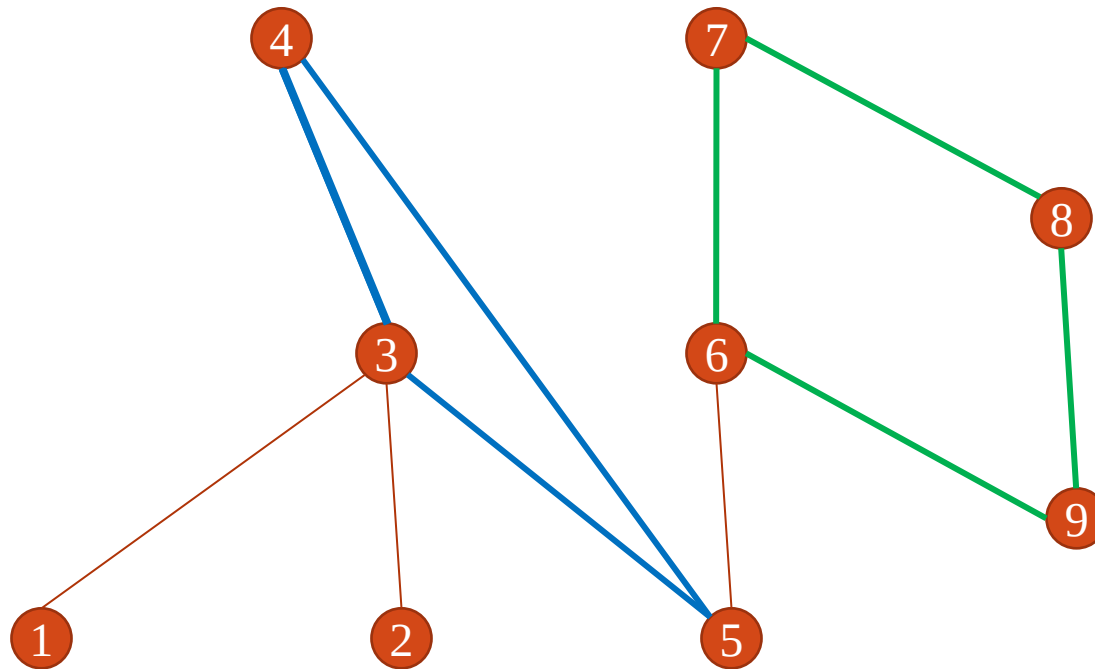
Διαδρομή:

$P_1 = 1, (1,3), 3, (3,4), 4, (4,5), 5, (5,3), 3, (3,4), 4$

Συνήθως δεν γράφουμε τις ενδιάμεσες ακμές.

Ίχνος:  $P_2 = 7,8,9,6$

# Παράδειγμα Κύκλου – Κυκλώματος

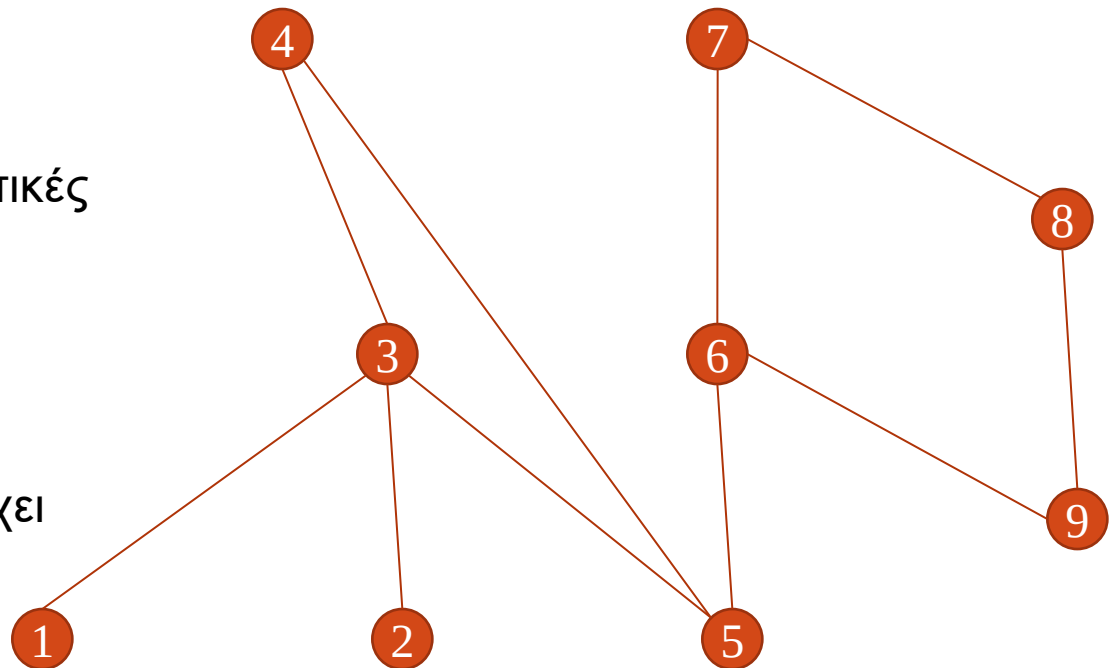


Κύκλος:  $P_1 = 3,4,5,3,4$

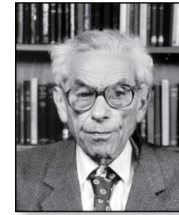
Κύκλωμα:  $P_2 = 6,7,8,9,6$

# Συνδεδεμένο γράφημα

- Συνδεδεμένο/Συνεκτικό (connected) γράφημα  $G$ : Αν οποιεσδήποτε δύο διαφορετικές κορυφές του, επικοινωνούν μέσω μίας τουλάχιστον διαδρομής.
- Στην περίπτωση που υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι κορυφών οι οποίες δεν επικοινωνούν, το γράφημα ονομάζεται μη-συνδεδεμένο (disconnected).



# Erdős numbers



Paul Erdős

## Example: *Erdős numbers*.

In a collaboration graph, two people  $a$  and  $b$  are connected by a path when there is a sequence of people starting with  $a$  and ending with  $b$  such that the endpoints of each edge in the path are people who have collaborated.

**TABLE 1** The Number of Mathematicians with a Given Erdős Number (as of early 2006).

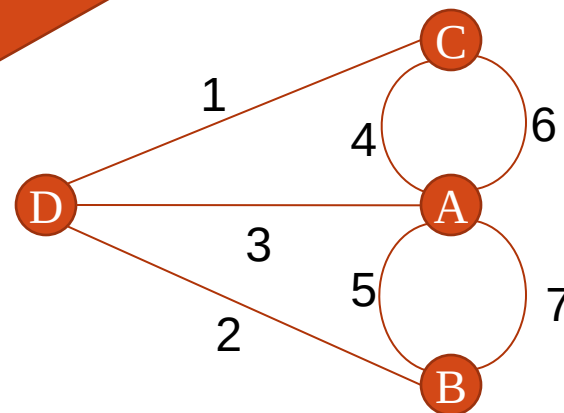
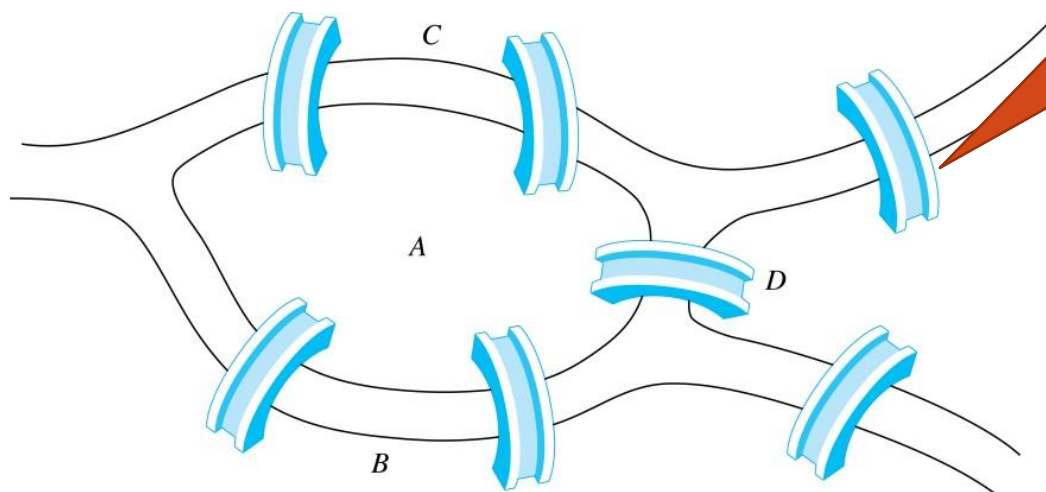
| Erdős Number | Number of People |
|--------------|------------------|
| 0            | 1                |
| 1            | 504              |
| 2            | 6,593            |
| 3            | 33,605           |
| 4            | 83,642           |
| 5            | 87,760           |
| 6            | 40,014           |
| 7            | 11,591           |
| 8            | 3,146            |
| 9            | 819              |
| 10           | 244              |
| 11           | 68               |
| 12           | 23               |
| 13           | 5                |

- In the academic collaboration graph of people who have written papers in mathematics, the *Erdős number* of a person  $m$  is the length of the shortest path between  $m$  and the prolific mathematician Paul Erdős.
- To learn more about Erdős numbers, visit

<http://www.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html>

# Οι γέφυρες του Königs

Euler ίχνος ή κύκλωμα.  
Ένα γράφημα με Euler  
κύκλωμα λέγεται Eulerian

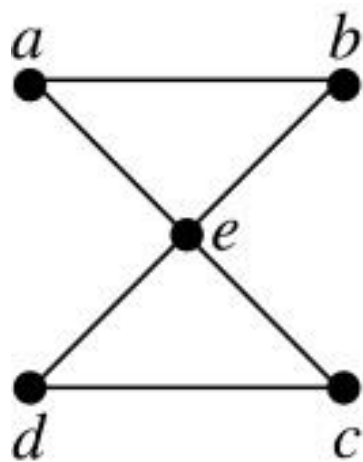


Σε κάθε γράφημα, αν ο βαθμός ενός κόμβου είναι περιττός αριθμός τότε ο κόμβος αυτός δεν μπορεί να είναι εσωτερικός κόμβος της συγκεκριμένης διαδρομής.

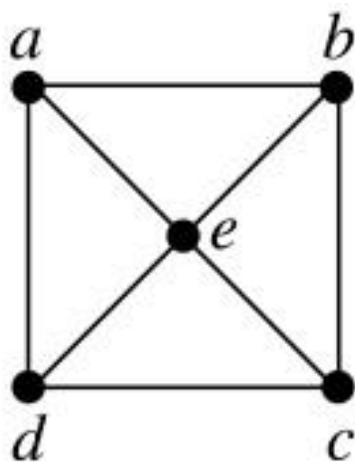
Πότε ένα γράφημα είναι Eulerian (ή μονοκονδυλιά);

# Euler Κύκλωμα

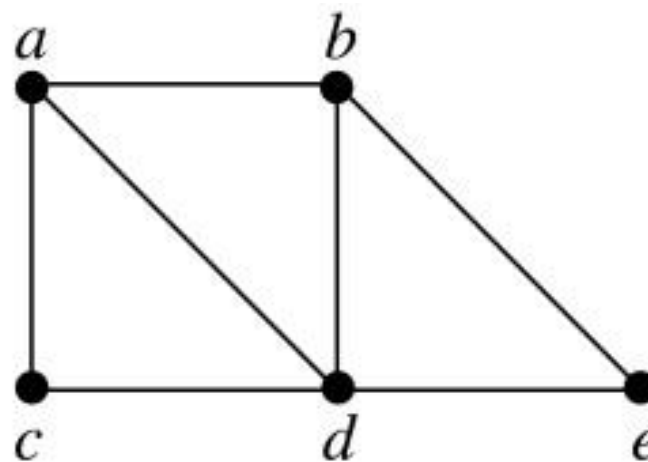
Ποια από τα παρακάτω έχει Euler κύκλωμα;



$G_1$



$G_2$

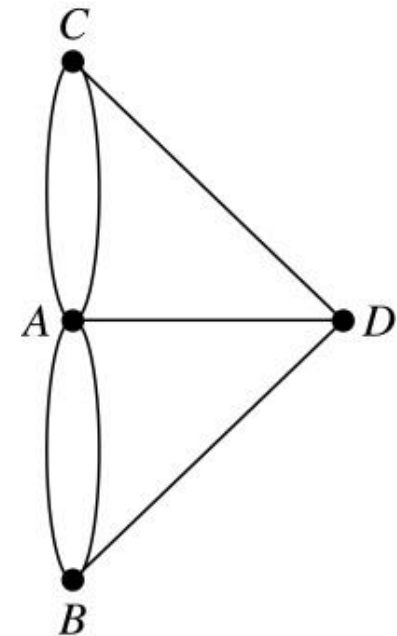
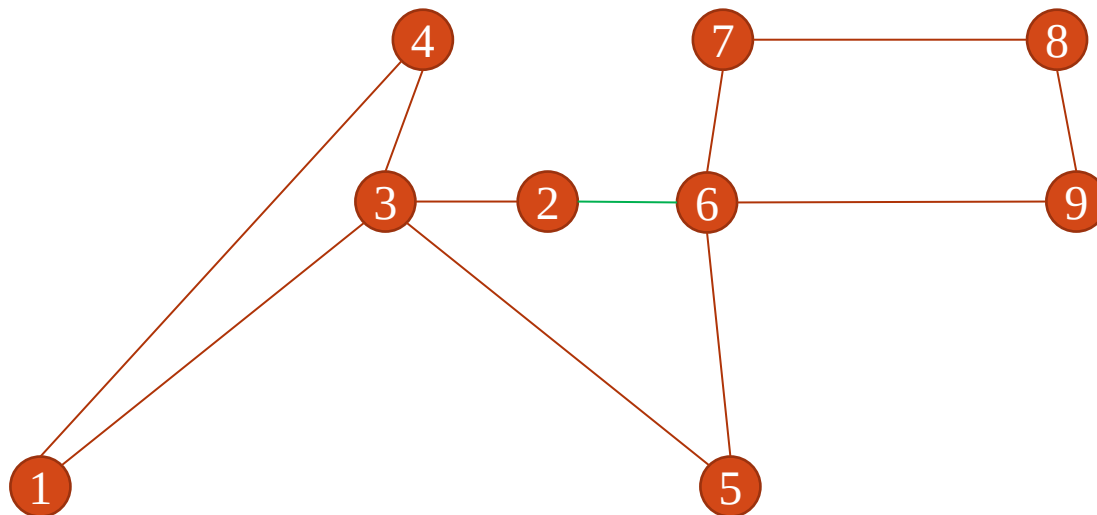


$G_3$



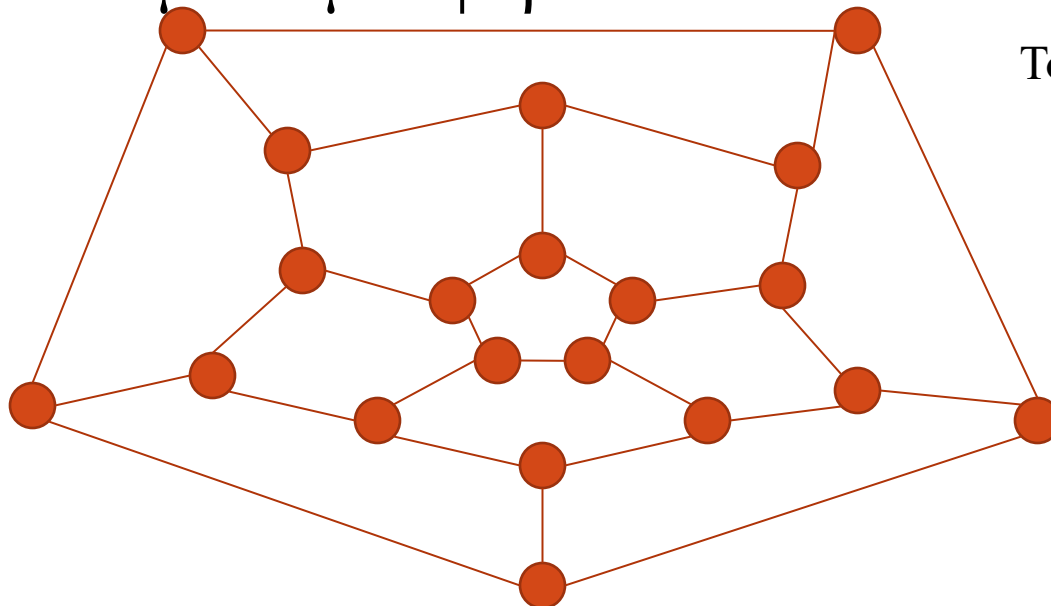
# Ικανές και Αναγκαίες Συνθήκες για Euler Κυκλώματα και Ίχνοι

**Θεώρημα:** Ένα συνδεδεμένο γράφημα με τουλάχιστον δύο κορυφές έχει Euler κύκλωμα αν και μόνο αν κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό ενώ έχει Euler ίχνος αν και μόνο αν έχει ακριβώς δύο κορυφές περιττού βαθμού.



# Hamiltonian Γραφήματα

- Ένα γράφημα λέγεται Hamiltonian αν περιέχει έναν Hamiltonian κύκλο
- Ο Hamiltonian κύκλος ενός γραφήματος είναι ένας κύκλος που περνά από κάθε κορυφή του γραφήματος μία και μόνο μία φορά



Το κούιζ του Hamilton

# Το πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή (TSP) – Ενημερωτικά ☺

- Έστω γράφημα  $G$  όπου κάθε ακμή έχει ένα βάρος.
- Ένας Hamiltonian κύκλος του  $G$  με το ελάχιστο συνολικό βάρος λύνει το TSP.
- Δυστυχώς δεν υπάρχει αντίστοιχο θεώρημα με αυτό για Euler κύκλους

# Δένδρα

---



# Δένδρα

- Ορισμός 1: Ένα γράφημα το οποίο δεν περιέχει κανέναν κύκλο και είναι συνδεδεμένο, ονομάζεται **δένδρο** (tree)
- Ορισμός 2: Ένα γράφημα που για όλα τα δυνατά ζεύγη κορυφών υπάρχει ένα και μόνο ένα ίχνος μεταξύ τους

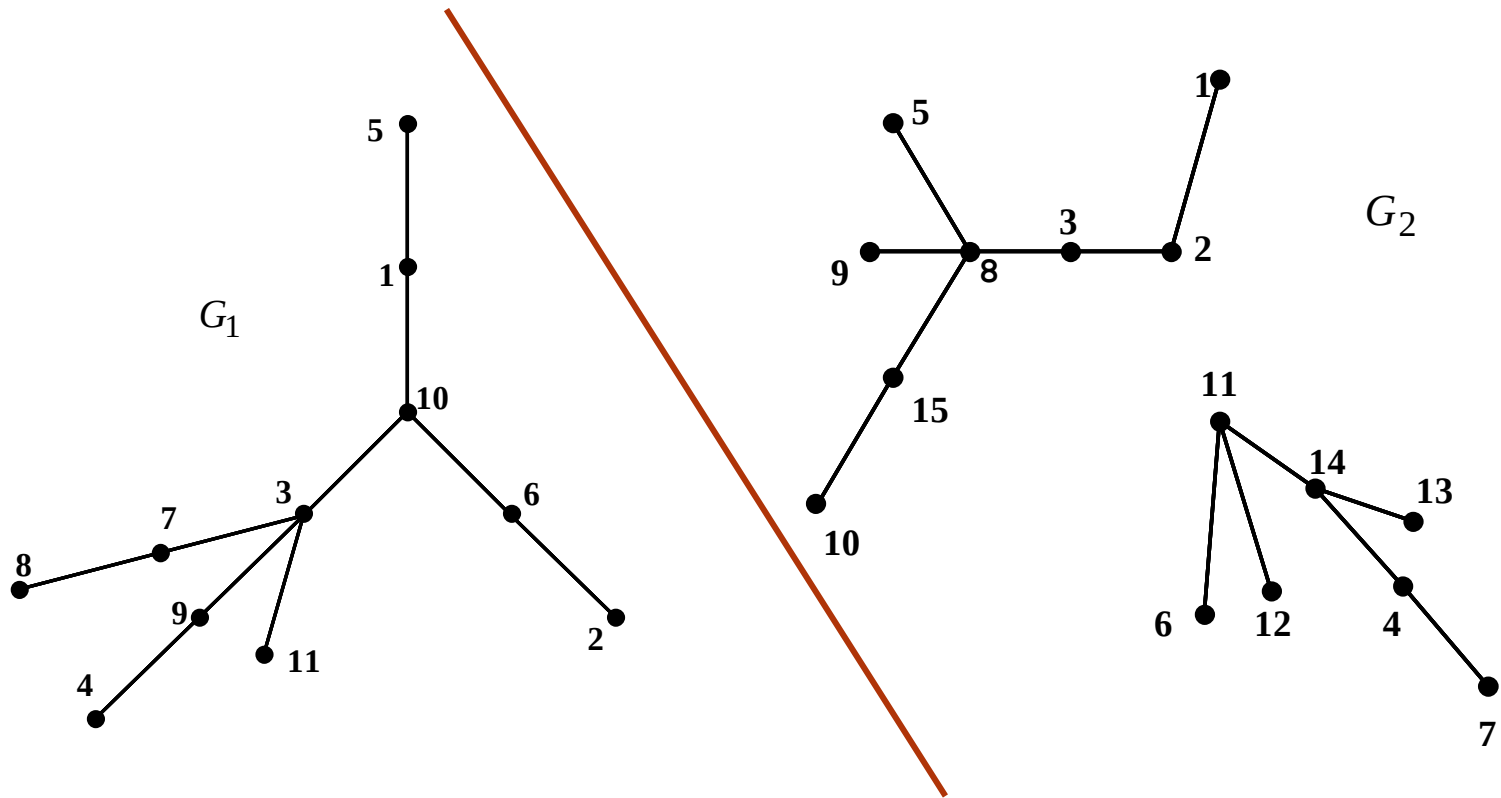
*Αποδείξτε ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.*

- Σε ένα δένδρο οι κορυφές με βαθμό 1 ονομάζονται **φύλλα** (leaves)
- Η διαγραφή ενός φύλλου από ένα δένδρο δεν επηρεάζει τη φύση του γραφήματος, δηλαδή το γράφημα που θα μείνει αν διαγράψουμε ένα φύλλο, θα είναι και πάλι δένδρο.

# Παράδειγμα δέντρου – δάσους

$G_1$  δένδρο (δεν περιέχει κύκλους – συνδεδεμένο)

$G_2$  δάσος (δεν περιέχει κύκλους – μη συνδεδεμένο)

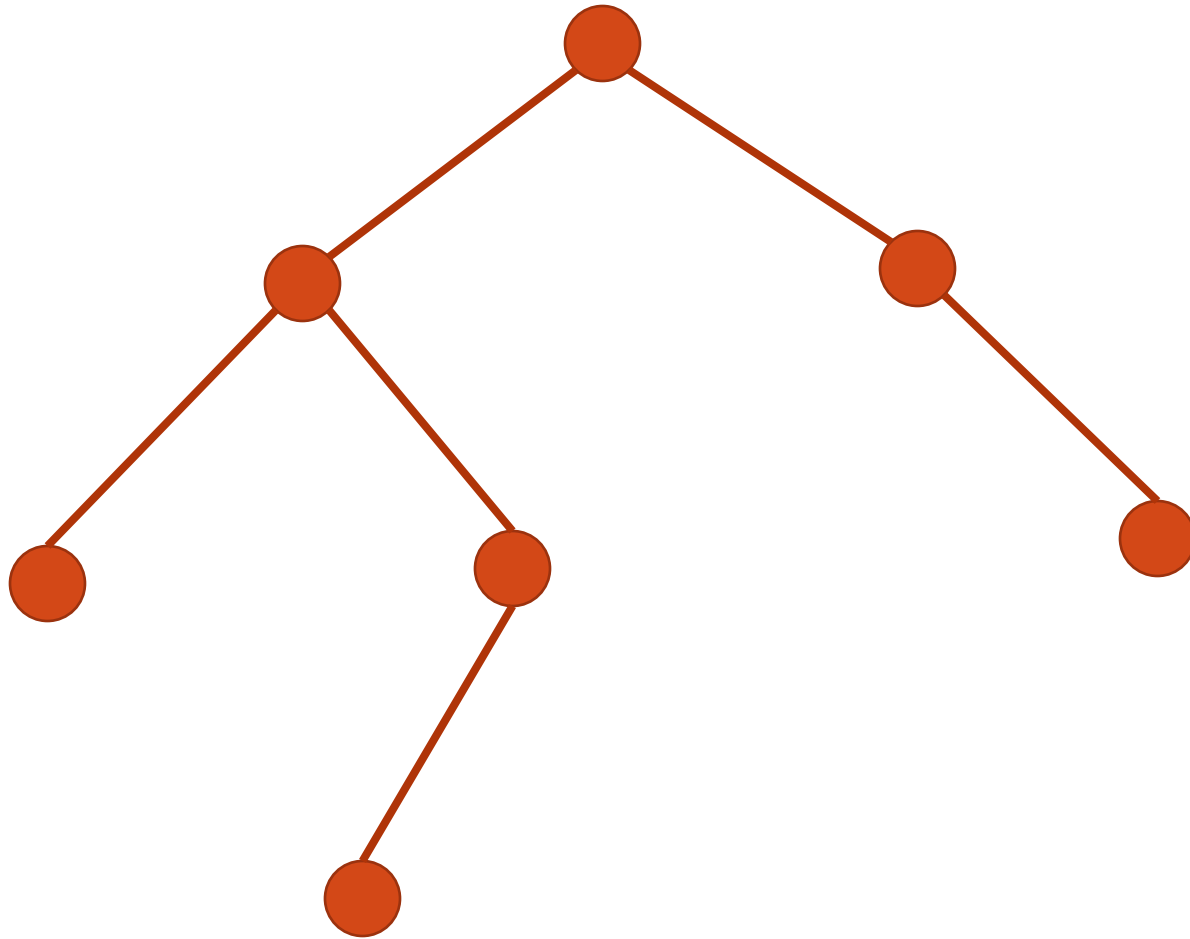


# Δένδρα

- **Δυαδικό δέντρο:** Κάθε κόμβος του δέντρου έχει βαθμό το πολύ 3 με εξαίρεση τη ρίζα που έχει το πολύ 2.
- **Ρίζα δέντρου:** ένας κόμβος επιλέγεται σαν αρχή του δέντρου
- Οι υπόλοιποι κόμβοι θα είναι είτε δεξιά της ρίζας ή αριστερά όπως το σχεδιάζουμε.

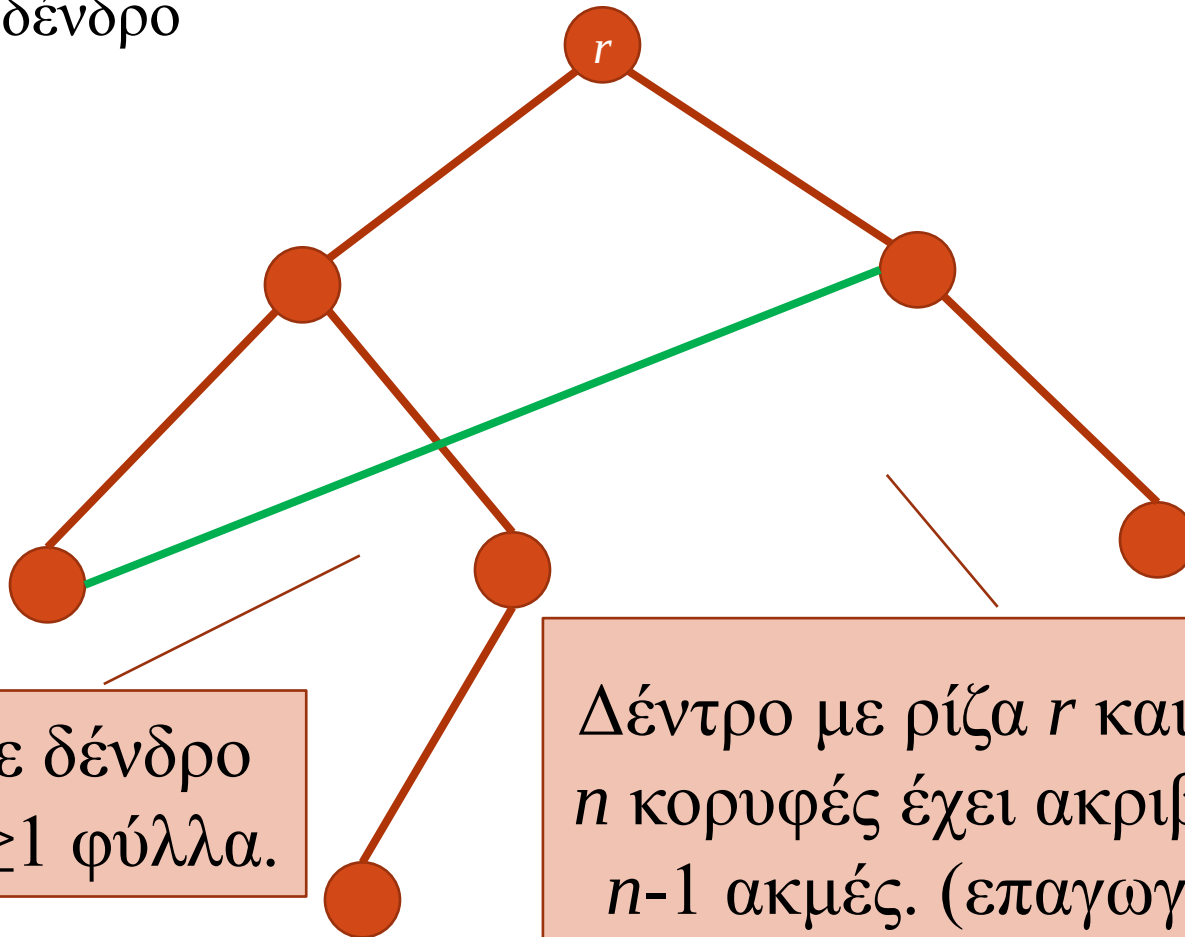


# Παράδειγμα Δυαδικού Δέντρου



# Παράδειγμα

Πρόσθεση μιας ακμής δημιουργεί κύκλο – το γράφημα δεν είναι πλέον δένδρο

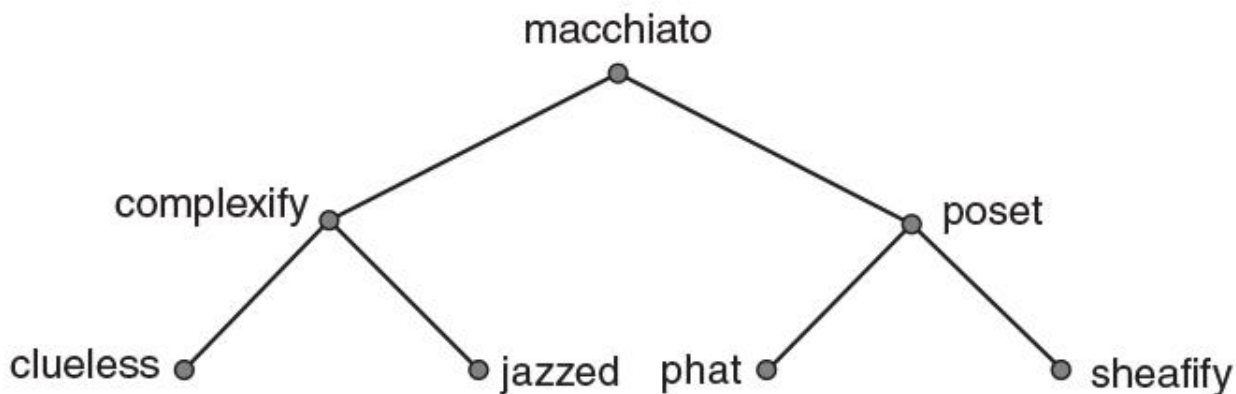


Κάθε δένδρο  
έχει  $\geq 1$  φύλλα.

Δέντρο με ρίζα  $r$  και με  
 $n$  κορυφές έχει ακριβώς  
 $n-1$  ακμές. (επαγωγή)

# Δένδρα δυαδικής αναζήτησης

- ▣ Κάθε δεξιό παιδί είναι μεγαλύτερο από τον γονέα του.
- ▣ Κάθε αριστερό παιδί είναι μικρότερο από τον γονέα του.



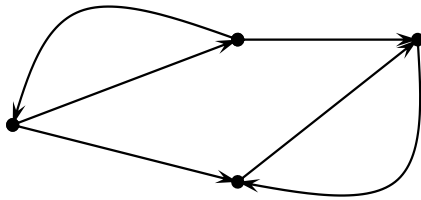
**Σχήμα 2.5** Κατασκευή δένδρου δυαδικής αναζήτησης

# Κατευθυνόμενα Γραφήματα

---

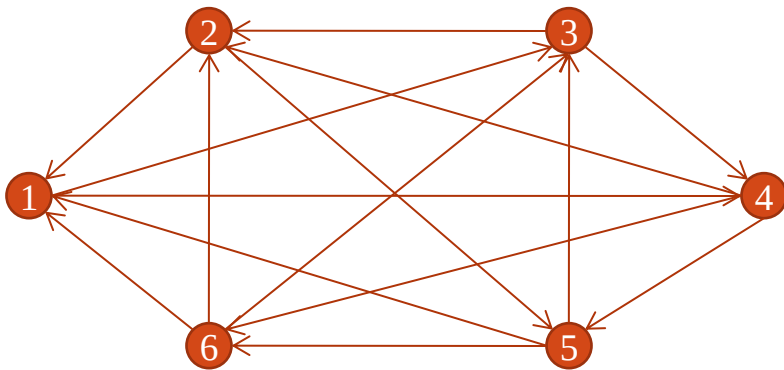
# Κατευθυνόμενα γραφήματα

Στα *κατευθυνόμενα γραφήματα* (directed graph ή digraph) η σύνδεση των κορυφών γίνεται με κατευθυνόμενες ακμές (τόξα).



Τα μητρώα γειτνίασης δεν είναι αναγκαστικά συμμετρικά.

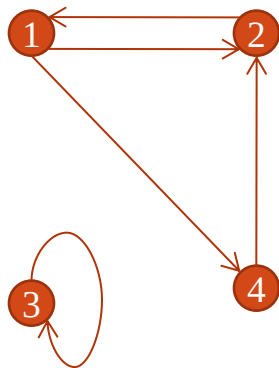
# Κατευθυνόμενα γραφήματα – Μητρώα Γειτνίασης



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Παράδειγμα

- Έστω  $A=\{1,2,3,4\}$  και  $R=\{(1,2),(1,4),(3,3),(2,1),(4,2)\}$



- Έσω βαθμός κόμβου: Πλήθος ακμών που εισέρχονται στον κόμβο.
- Εξω βαθμός: Πλήθος ακμών που εξέρχονται από τον κόμβο

Θεώρημα Χειρασιών για κατευθυνόμενα γραφήματα:

$$\sum_{v \in V(G)} d_{in}(v) = \sum_{v \in V(G)} d_{out}(v)$$



# Ένας Γρίφος από τα παλιά...



Στη χώρα του μάγου του Οζ, όλοι οι δρόμοι είναι μονόδρομοι. Επιπλέον κάθε ζευγάρι πόλεων συνδέεται από έναν μόνο δρόμο. Δείξτε ότι υπάρχει κάποια πόλη (η πρωτεύουσα μάλλον) που είναι προσβάσιμη από όλες τις άλλες πόλεις απευθείας ή μέσω άλλης μίας πόλης.

## (2 Μονάδες) (Ιούνιος 2016)

Έστω ότι  $G=(V,E)$  είναι ένα απλό γράφημα (δεν έχει βρόχους). Έστω ότι  $R$  είναι η σχέση επί του  $V$  που αποτελείται από ζεύγη κορυφών  $(u,v)$  έτσι ώστε να υπάρχει διαδρομή από το  $u$  στο  $v$  ή  $u=v$ . Να δειχτεί ότι η  $R$  είναι σχέση ισοδυναμίας.

# Θέμα 11<sup>ο</sup>: (50 μονάδες)

**α)** (10) 1. (7) Υπάρχει απλό γράφημα που να έχει  $n \geq 2$  κορυφές και κάθε κορυφή να έχει διαφορετικό βαθμό; Αποδείξτε την απάντησή σας.

2. (3) Σε μία ομάδα δύο ή περισσότερων ανθρώπων, πρέπει πάντα να υπάρχει ένα ζεύγος ανθρώπων που να γνωρίζονται με το ίδιο πλήθος ανθρώπων στην ομάδα. Γιατί;

**β)** (10) Ορίζουμε τη σχέση  $R$  πάνω στις ακμές του γραφήματος  $G=(V,E)$ , έτσι ώστε για δύο ακμές  $e, f \in E$  να ισχύει ότι  $(e,f) \in R$  αν και μόνο αν οι δύο ακμές έχουν τουλάχιστον μία κοινή κορυφή. Να δείξετε αν η σχέση  $R$  είναι σχέση ισοδυναμίας.

**δ)** (15) Έστω το κατηγορημα  $P(x,y)$  που ορίζεται πάνω στα μη-κατευθυνόμενα γραφήματα και όπου ο τομέας αναφοράς είναι οι κορυφές του γραφήματος. Το  $P(x,y)$  δηλώνει ότι «οι κορυφές  $x$  και  $y$  συνδέονται με ακμή». Σας ζητούνται τα εξής:

1. (8) Να δώσετε ένα γράφημα με τουλάχιστον 6 κορυφές και μέγιστο βαθμό κορυφής 3 που ικανοποιεί τον παρακάτω τύπο:

$$\exists x \exists y \exists z (P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x) \wedge \forall w (\neg P(w,x) \wedge \neg P(w,y) \rightarrow P(w,z)))$$

2. (7) Να δώσετε μία λογική πρόταση που χρησιμοποιεί το κατηγορημα  $P(x,y)$  που να δηλώνει ότι «υπάρχουν ακριβώς δύο κορυφές με βαθμό ίσο με 1».