ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΙΙ: Δείγματα – Συνδυασμοί – Μεταθέσεις

r-δείγματα

S σύνολο και $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ μία διατεταγμένη r-άδα στοιχείων του S όχι αναγκαστικά διαφορετικών μεταξύ τους:

$$(a_1, a_2, \dots, a_r) \in S^r$$

$(a_1, a_2, \dots, a_r)$: r-δείγμα (r-sample) του S

Πλήθος r-δειγμάτων ενός n-συνόλου: $|S^r| = |S|^r = n^r$

Εφαρμογή στη δειγματοληψία

Δειγματοληψία με επανάθεση (sampling with replacement): Από αρχικό πληθυσμό n αντικειμένων εξάγουμε δείγμα r αντικειμένων

- Παίρνουμε ένα-ένα αντικείμενο, το καταγράφουμε και το τοποθετούμε πάλι πίσω στον πληθυσμό
- Λαμβάνουμε υπόψη τη σειρά των αντικειμένων που καταγράφουμε

Υπάρχουν n^r τρόποι να πάρουμε τέτοιο δείγμα.

Παράδειγμα

Πόσες συμβολοσειρές (strings) υπάρχουν μήκους n σε ένα αλφάβητο $\Sigma = \{0,1, \dots, k-1\}$;

Είναι ένα n-δείγμα από ένα k-σύνολο.

Άρα k^n.

Τι μπορούμε να μετρήσουμε με n bits;

r-μεταθέσεις

S: n-σύνολο

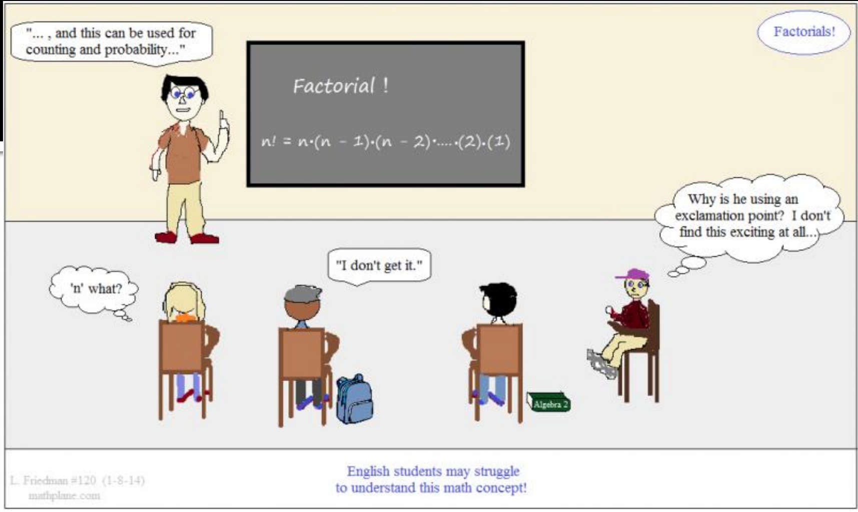
$(a_1, a_2, \dots, a_r)$: r-δείγμα του S έτσι ώστε όλα να είναι διαφορετικά μεταξύ τους ($r \leq n$):

Τότε έχουμε μία r-μετάθεση (r-permutation)

Πλήθος r-μεταθέσεων ενός n-συνόλου:

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

n-μεταθέσεις



Αν $r = n$ τότε: μετάθεση n στοιχείων

Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων:

$n!$: n-παραγοντικό (n-factorial)

$$P(n, n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{1 \leq i \leq n} i$$

Εφαρμογή στη δειγματοληψία

Δειγματοληψία χωρίς επανάθεση (sampling without replacement): Από αρχικό πληθυσμό n αντικειμένων εξάγουμε δείγμα r αντικειμένων:

- Παίρνουμε ένα-ένα αντικείμενο, το καταγράφουμε χωρίς όμως να το τοποθετούμε πάλι πίσω.
- Λαμβάνουμε υπόψη τη σειρά των αντικειμένων που καταγράφουμε

Υπάρχουν $P(n,r)$ τρόποι να πάρουμε ένα τέτοιο δείγμα.

Παράδειγμα

Αν $S=\{a,b,c,d\}$, $n=|S|=4$, τότε τα 3-δείγματα που μπορούν να σχηματιστούν είναι (γράφουμε για απλότητα $a_1a_2a_3$ αντί για (a_1,a_2,a_3)):

aaa	aca	baa	bca	caa	cca	daa	dca
aab	acb	bab	bcb	cab	ccb	dab	dcb
aac	acc	bac	bcc	cac	ccc	dac	dcc
aad	acd	bad	bcd	cad	ccd	dad	dcd
aba	ada	bba	bda	cba	cda	dba	dda
abb	adb	bbb	bdb	cbb	cdb	dbb	ddb
abc	adc	bbc	bdc	cbc	cdc	dbc	ddc
abd	add	bbd	bdd	cbd	cdd	dbd	ddd

$$4^3=64$$

Παράδειγμα (συν.)

$$P(4,3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

- 3-μεταθέσεις:

$$\begin{matrix} abc & bac & cab & dab \\ abd & bad & cad & dac \\ acb & bca & cba & dba \\ acd & bcd & cbd & dbc \\ adb & bda & cda & dca \\ adc & bdc & cdb & dcb \end{matrix}$$

r-συνδυασμοί

S: n-σύνολο

$\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$: r-επιλογή όπου το κάθε στοιχείο έχει πολλαπλότητα 1

Η συλλογή (υποσύνολο του S) ονομάζεται r-συνδυασμός (r-combination) των n στοιχείων.

Πλήθος r-συνδυασμός από ένα n-σύνολο S:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Διωνυμικοί συντελεστές

Αριθμοί της μορφής $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$0! = 1, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{0}{r} = 0, \quad \binom{0}{0} = 1$$

Συνδυαστικές Αποδείξεις

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Είναι μία απόδειξη που χρησιμοποιεί προτάσεις απαρίθμησης για να αποδείξει ότι και οι δύο πλευρές της ισότητας απαριθμούν το ίδιο πρόβλημα με διαφορετικούς τρόπους.

Ιδιότητες διωνυμικών συντελεστών

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$$

Πολυωνυμικοί συντελεστές (multinomial coefficients)

Μεταθέσεις με Επανάληψη

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!},\ r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$$

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$, συντελεστής στο $\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}\cdots\alpha_k^{r_k}$

Μεταθέσεις με Ίδια Αντικείμενα

Πόσα διαφορετικά αλφαριθμητικά μπορούν να φτιαχτούν από αναδιάταξη των γραμμάτων της λέξης ΚΑΚΑΚΙΑ.

Λύση: Υπάρχουν 7 διαφορετικές θέσεις για 3 Κ, 3 Α και 1 Ι.

- Τα 3 Κ μπορούν να τοποθετηθούν με $C(7,3)$ διαφορετικούς τρόπους.
- Τα 3 Α μπορούν να τοποθετηθούν με $C(4,3)$ τρόπους.
- Το Ι μπορεί να τοποθετηθεί με $C(1,1)$ τρόπους.

Από τον κανόνα του γινομένου το πλήθος είναι:

$$\binom{7}{3}\binom{4}{3}\binom{1}{1} = 35 \cdot 4 \cdot 1 = 140$$

r-επιλογές

S: n-σύνολο

$\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$: μη-διατεταγμένη συλλογή από r στοιχεία του S όχι αναγκαστικά διαφορετικά μεταξύ τους.

Η συλλογή ονομάζεται r-επιλογή (r-selection) του S.

Το πλήθος των εμφανίσεων ενός στοιχείου στη συλλογή είναι η πολλαπλότητά του.

Πλήθος r-επιλογών του S:

$$C(n+r-1, r) = \binom{n+r-1}{r}$$

Παράδειγμα

- Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα παίρνουμε αν ρίξουμε 6 ίδια ζάρια;
- n=6, r=6: $\binom{6+6-1}{6} = 462$
- Η παρακάτω εξίσωση πόσες λύσεις έχει; (μη αρνητικοί αριθμοί);

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6 = 6$$

Παράδειγμα

$$S = \{a,b,c,d\} \qquad n = |S| = 4$$

3-επιλογές που μπορούν να σχηματιστούν:

(γράφουμε για απλότητα $a_1 a_2 a_3$ αντί για $\{a_1, a_2, a_3\}$):

$$\begin{array}{llll} aaa & bbb & ccc & ddd \\ aab & aac & aad & \\ bba & bbc & bbd & \\ cca & ccb & ccd & \\ dda & ddb & ddc & \\ abc & abd & acd & bcd \end{array}$$

$$\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$$

Παράδειγμα (συν.)

Από τις παραπάνω επιλογές αυτές μόνο οι:

$$abc \quad abd \quad acd \quad bcd$$

αποτελούν 3-συνδυασμούς αφού τα στοιχεία τους είναι διαφορετικά και το πλήθος τους είναι

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4.$$

Με Λίγα Λόγια… (σχετικά με θεμελιώδη προβλήματα αρίθμησης)

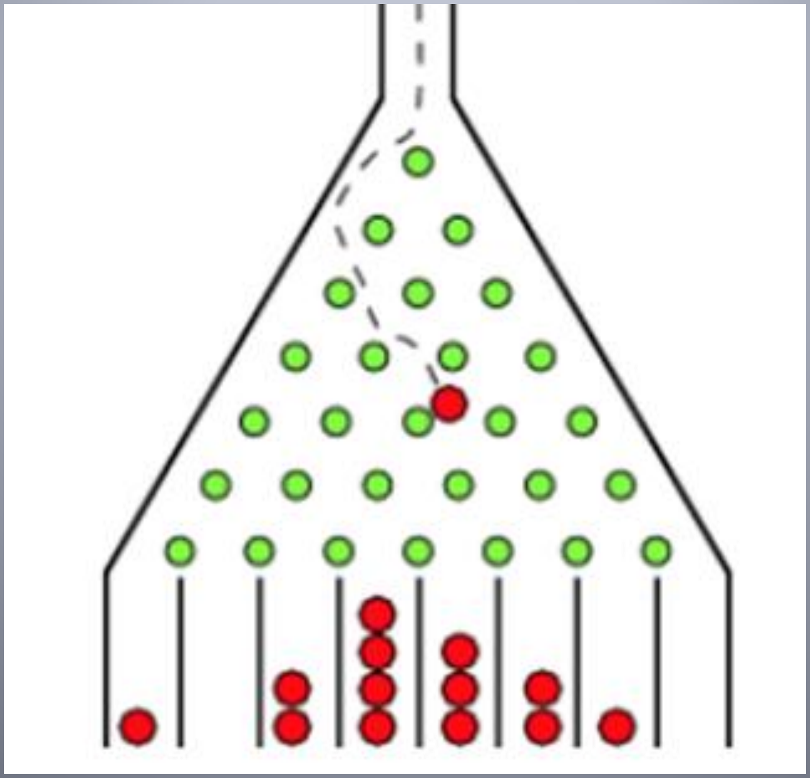
Επανατοποθέτηση;

Μετράει η σειρά;

	ΝΑΙ	**ΟΧΙ**
ΝΑΙ	*r*-δείγμα	*r*-μετάθεση
ΟΧΙ	*r*-επιλογή	*r*-συνδυασμός

Κατανομή Αντικειμένων σε Κουτιά

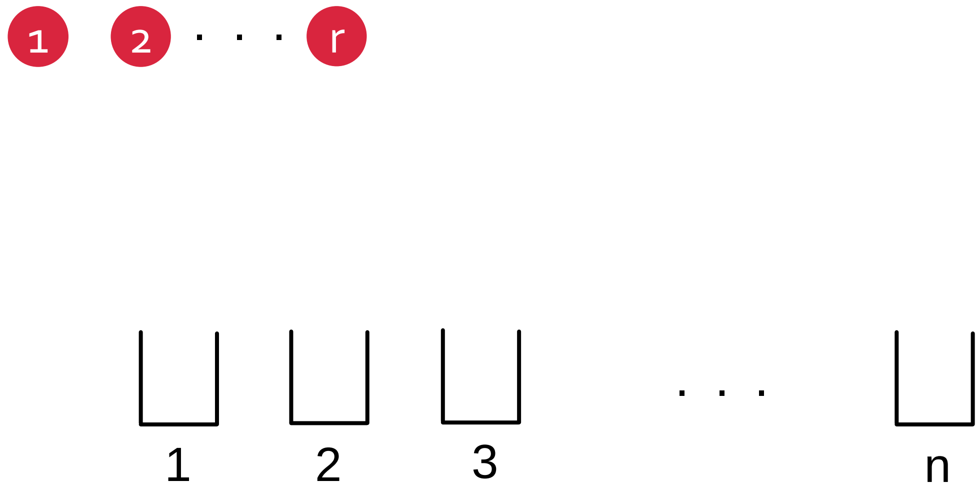
Άλλο πρόβλημα μέτρησης…



Κατανομή Αντικειμένων σε Κουτιά

- Πολλά προβλήματα αρίθμησης λύνονται με αντιστοίχηση στο πρόβλημα τοποθέτησης αντικειμένων σε κουτιά.
  - Τα αντικείμενα μπορεί να είναι διαφορετικά ή ίδια.
  - Τα κουτιά μπορεί να έχουν ετικέτες (διαφορετικά) ή να μην έχουν (ίδια).
  - Μπορεί να μας ενδιαφέρει η σειρά των σφαιρών μέσα σε κάθε κουτί ή όχι.

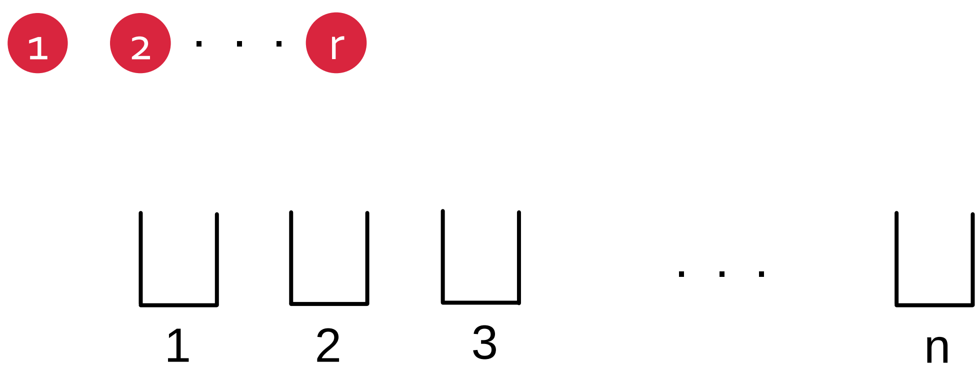
Διαφορετικά Αντικείμενα – Διαφορετικά Κουτιά – <u>*Δεν μετράει*</u> η σειρά μέσα σε κουτί



n τρόποι για την μπάλα 1, *n* τρόποι για τη μπάλα 2, ...

Από κανόνα γινομένου: n^r.

Διαφορετικά Αντικείμενα – Διαφορετικά Κουτιά – *Μετράει* η σειρά μέσα σε κουτί



n τρόποι για την μπάλα 1, $n+1$ τρόποι για τη μπάλα 2, ...,
$n+r-1$ τρόποι για τη μπάλα r

Από κανόνα γινομένου: $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$

Κατανομή Αντικειμένων σε Κουτιά

Διαφορετικά αντικείμενα σε διαφορετικά κουτιά με περιορισμό σε κάθε κουτί (δεν παίζει ρόλο η σειρά στο κουτί).

- Υπάρχουν $n!/(n_1!n_2! \cdots n_k!)$ τρόποι κατανομής n διαφορετικών αντικειμένων σε k διαφορετικά κουτιά με n_i το καθένα.
- Παράδειγμα: Υπάρχουν $52!/(5!5!5!5!32!)$ τρόποι μοιράσματος 5 φύλλων σε 4 παίκτες.

Κατανομή Αντικειμένων σε Κουτιά

Ίδια Αντικείμενα σε διαφορετικά κουτιά.

- Υπάρχουν $C(n + r - 1, r)$ τρόποι κατανομής r ίδιων αντικειμένων σε n διαφορετικά κουτιά.
- Παράδειγμα: Υπάρχουν $C(8 + 10 - 1, 10) = C(17,10) = 19{,}448$ τρόποι τοποθέτησης 10 ίδιων αντικειμένων σε 8 διαφορετικά κουτιά.

Κατανομή Αντικειμένων σε Κουτιά

Διαφορετικά αντικείμενα και ίδια κουτιά.

- Δεν υπάρχει απλός κλειστός τύπος.
- Παράδειγμα: Υπάρχουν 14 τρόποι να κατανεμηθούν 4 υπάλληλοι σε 3 ίδια γραφεία όπου κάθε γραφείο μπορεί να περιέχει αυθαίρετο πλήθος υπαλλήλων.

Κατανομή Αντικειμένων σε Κουτιά

Ίδια αντικείμενα και ίδια κουτιά.

- Δεν υπάρχει απλός κλειστός τύπος.
- Παράδειγμα: Υπάρχουν 9 τρόποι να βάλουμε 6 αντίγραφα του ίδιου βιβλίου σε 4 ίδια κουτιά.
- Αυτό είναι ίσο με το να υπολογίσουμε το $p_k(n)$, που είναι οι τρόποι το n *να γραφεί ως άθροισμα* το πολύ k θετικών ακεραίων σε αύξουσα σειρά.

Ασκήσεις

Προσοχή – Πολλά Λάθη

- Από 5 χαρτιά από μία τράπουλα με 52 χαρτιά πόσα είναι εκείνα που έχουν τουλάχιστον 3 άσους;

1. 4 τρόποι επιλογής 3 από 4 άσους
2. 48*49/2=1176 τρόποι επιλογής των άλλων δύο καρτών

Άρα 4*1176=4704 τρόποι.

Δεύτερος Τρόπος Υπολογισμού

- Πόσες πεντάδες έχουν 3 ακριβώς άσους:
  - 4 τρόποι επιλογής άσου
  - 1128 τρόποι επιλογής άλλων χαρτιών

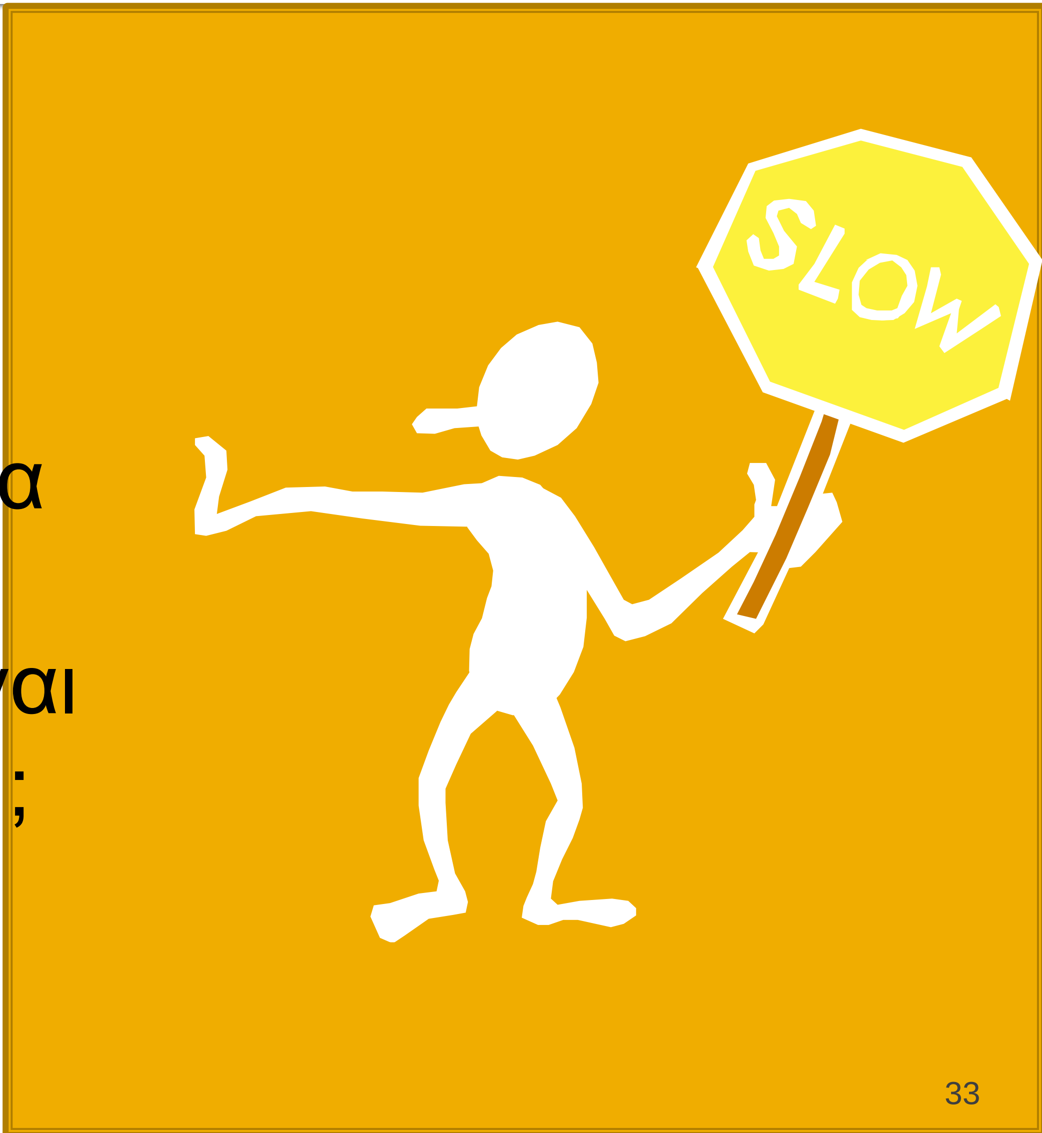
- Πόσες πεντάδες έχουν 4 ακριβώς άσους:
  - 1 τρόπος επιλογής άσου
  - 48 τρόποι επιλογής άλλων χαρτιών

Άρα 48+4*1128=4560

Λάθος

$4704 \neq 4560$

Τουλάχιστον ένα από τα δύο επιχειρήματα είναι λάθος. Ποιο;;;;;;



Το Κόλπο με την Τράπουλα...

Επί της αρχής:

1. Ο θεατής μπορεί να επιλέξει οποιονδήποτε r-συνδυασμό με $C(n,r)=\binom{52}{r}$ τρόπους
2. Ο βοηθός παρουσιάζει μία (r-1)-μετάθεση r-1 καρτών $P(n,r-1)=\dfrac{52!}{(52-r+1)!}$

Αρκεί C(n,r)≤P(n,r-1)

Το Κόλπο με την Τράπουλα...

Για r=5 $\quad C(52,5)=\binom{52}{5}=2{,}598{,}860 < P(52,4)=\frac{52!}{48!}=6{,}497{,}400$

Για r=4 $\quad C(52,4)=\binom{52}{4}=270{,}725 > P(52,3)=\frac{52!}{49!}=132{,}600$

και άρα από την αρχή του περιστερώνα δεν μπορούμε να διακρίνουμε ποιο ακριβώς φύλλο θα είναι

Το Κόλπο με την Τράπουλα…

Ο βοηθός μπορεί να επικοινωνήσει με δύο τρόπους:

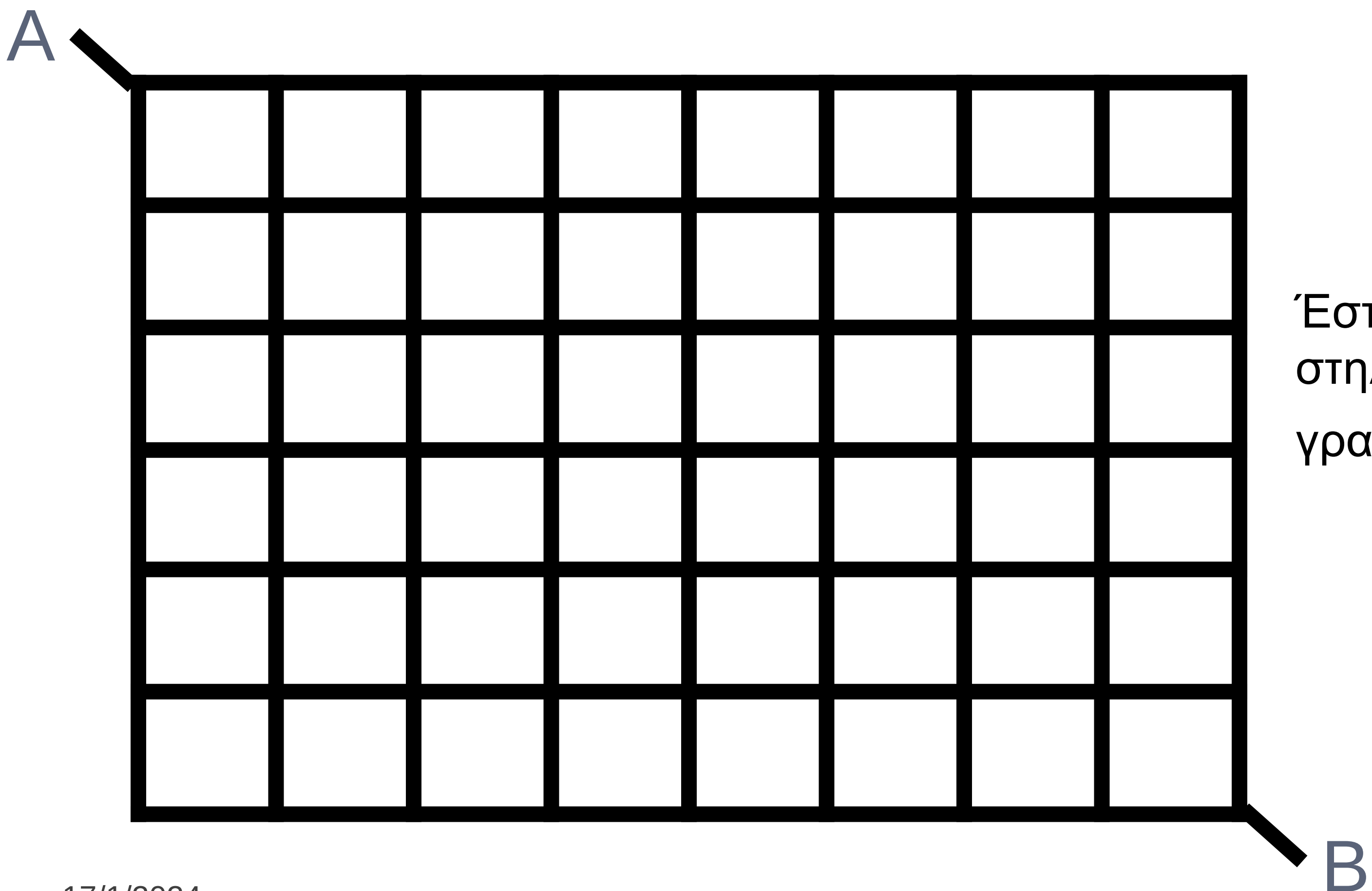
1. Να δώσει τις 4 κάρτες με οποιαδήποτε σειρά (4!=24), για να καθορίσουμε ποιο από τα υπόλοιπα 48 χαρτιά είναι η πέμπτη κάρτα.
2. Ο βοηθός καθορίζει ποια από τα 5 χαρτιά θα εμφανίσει

Το Κόλπο με την Τράπουλα…

1. Δύο φύλλα τουλάχιστον θα είναι ίδιου τύπου. Το κρυφό θα είναι ένα από τα δύο και το πρώτο κατά σειρά καθορίζει τον τύπο του κρυφού χαρτιού.
2. Επίσης, αν τα βάλω σε κύκλο τα 13 χαρτιά ίδιου τύπου, επιλέγω πάντα εκείνο να εμφανίσω που θα πρέπει να μετακινηθώ προς τα δεξιά ≤ 6 κινήσεις για να το βρω.
3. Τα υπόλοιπα τρία χαρτιά μου καθορίζουν πόσο θα πρέπει να μετακινηθώ από το πρώτο ($3!=6$ μεταθέσεις) .

Ελάχιστα Μονοπάτια

Πόσα ελάχιστα μονοπάτια υπάρχουν από το Α στο Β;



Έστω m πλήθος στηλών και n πλήθος γραμμών. Τότε: $\binom{m+n}{n}$

Ασκήσεις

1. Πόσες δυαδικές ακολουθίες υπάρχουν με 5 άσους και 3 μηδενικά;

2. Διάλεξε 5 από 8 για να βάλεις άσους και τα υπόλοιπα 3 για 0. Άρα:

   C(8,5)

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:
    1. Πόσες μη αρνητικές λύσεις υπάρχουν για την εξής εξίσωση: $a+b+c=10$
    2. Πόσες δυαδικές ακολουθίες μήκους 12 υπάρχουν που έχουν ακριβώς 2 άσους και 10 μηδενικά;

(2 Μονάδες)

Δώστε απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις με συνοπτική αιτιολόγηση:

1. Αν υπάρχουν 6 διαφορετικές γεύσεις παγωτού και 3 διαφορετικοί τύποι σιροπιού, με πόσους τρόπους μπορούμε να φτιάξουμε μία μπάλα παγωτό (μίας γεύσης) με ένα τύπο σιροπιού; 6×3
2. Αν έχετε δείπνο με 5 επιλογές για πρώτο πιάτο, 5 επιλογές για κυρίως πιάτο και 5 επιλογές για επιδόρπιο, πόσα διαφορετικού τύπου δείπνα μπορείτε να έχετε; 5^3
3. Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής 4 ατόμων από ένα δωμάτιο 10 ατόμων όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά; $\binom{10}{4}$
4. Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής 4 ατόμων από ένα δωμάτιο 10 ατόμων όταν ο πρώτος θα είναι ο αρχηγός, ο δεύτερος ο υπαρχηγός, ο τρίτος η μασκότ και ο τέταρτος ο μάνατζερ; $P(10,4)$
5. Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής 5 ατόμων από ένα δωμάτιο 13 ατόμων όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά αλλά καθορίζουμε στο τέλος εμείς ποιος από τους 5 θα είναι ο αρχηγός; $5\binom{13}{5}$
6. Το πλήθος των ομάδων με 8 κορίτσια και 2 αγόρια από 17 συνολικά κορίτσια και 10 αγόρια. $\binom{17}{8}\binom{10}{2}$
7. Το πλήθος των ομάδων με 3 ή 4 άτομα από ένα δωμάτιο με 17 άτομα συνολικά. $\binom{17}{4}+\binom{17}{3}$
8. Αν x είναι το πλήθος των τρόπων επιλογής 10 νικητών από 17 συνολικά άτομα, πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής 7 χαμένων από 17 συνολικά άτομα (βρείτε πόσο είναι το x και εκφράστε την απάντηση σε σχέση με το x); $\binom{17}{7}$

$$\binom{15+4-1}{15}=\binom{18}{15}$$

9. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 15 μολύβια από 4 διαφορετικές εταιρίες;

$$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=5+5-8=2$$

10. Έστω ότι $|A|=5$, $|B|=5$ και $|A\cup B|=8$, τότε πόσο είναι το $|A\cap B|$;

Άσκηση

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να κατανείμουμε 5 μπάλες σε 7 κάδους, αν κάθε κάδος πρέπει να περιέχει το πολύ μία μπάλα και αν:

- Οι μπάλες και οι κάδοι έχουν ετικέτα 2520
- Οι μπάλες έχουν ετικέτα αλλά οι κάδοι όχι. 1
- Οι μπάλες δεν έχουν ετικέτα αλλά οι κάδοι έχουν 21
- Οι μπάλες και οι κάδοι δεν έχουν ετικέτα 1

Λύση

Λύση:

- (α) η σειρά των μπαλών είναι σημαντική ενώ δεν έχουμε επανάληψη αφού αναγκαστικά κάθε κάδος έχει το πολύ μία μπάλα. Άρα, έχουμε μία 5-μετάθεση από σύνολο μεγέθους 7. $P(7,5)=2520$
- (β) Αφού οι κάδοι είναι ίδιοι υπάρχει μόνο ένας τρόπος να τις τοποθετήσουμε στους 7 κάδους με δεδομένο ότι κάθε κάδος έχει το πολύ μία μπάλα. Άρα 1.
- (γ) Οι τρόποι με τους οποίους θα επιλέξουμε από τους 7 κάδους τους 5 χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά αφού οι μπάλες είναι όλες ίδιες. Άρα: $C(7,5) = 21$
- (δ) Αντίστοιχα με το (β) μόνος ένας τρόπος για να συμβεί.

Άσκηση

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να κατανείμουμε 5 μπάλες σε 3 κάδους, αν κάθε κάδος πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μία μπάλα και αν:

- Οι μπάλες και οι κάδοι έχουν ετικέτα 150
- Οι μπάλες έχουν ετικέτα αλλά οι κάδοι όχι. 25
- Οι μπάλες δεν έχουν ετικέτα αλλά οι κάδοι έχουν 6
- Οι μπάλες και οι κάδοι δεν έχουν ετικέτα 2

Λύση

Χωρίζω στις εξής περιπτώσεις: 1-1-3 και 1-2-2

- (α) Οι τρόποι να γίνει το 1-1-3 είναι να επιλέξουμε με 3 τρόπους τον μεγάλο κάδο και να τον γεμίσουμε με 5 ανά 3 με 3 σφαίρες και έπειτα με 2 τρόπους να βάλουμε τις άλλες δύο. Άρα: 3*C(5, 3) *2=60
- Οι τρόποι για το 1-2-2 είναι να επιλέξουμε με 3 τρόπους τον μοναδικό μικρό κάδο, και με 5 τρόπους να τον γεμίσουμε και έπειτα με C(4,2) τρόπους να γεμίσουμε έναν ακόμα κάδο (δεν είναι επί δύο για την επιλογή κάδου που μου απομένει στο τέλος μιας και ό,τι μένει μπαίνει στον τελευταίο κάδο και άρα υπάρχει συμμετρία) και έναν τρόπο να γεμίσουμε τον τελευταίο. Άρα: 3*5*C(4,2)=3*5*6=90.
- Από κανόνα αθροίσματος έχουμε 150.
- (β) Για το 1-1-3 έχουμε C(5,3)=10 τρόπους να επιλέξουμε τις 3 σφαίρες για τον μεγάλο κάδο και υπάρχει ένας τρόπος να κατανεμηθούν οι άλλες δύο σε δύο ίδιους κάδους. Για το 1-2-2 έχουμε 5 τρόπους να επιλέξουμε τη μπάλα που πάει μόνη της επί C(4,2) για τις δύο που θα πάνε μαζί επί 1 για τις άλλες δύο αλλά διαιρούμε με το 3! μιας και οι κάδοι είναι όλοι ίδιοι. αλλά το διαιρούμε με το 2 μιας και οι κάδοι είναι ίδιοι και άρα έχουμε: 5*C(4,2)/2=5*2*3/2=15. Άρα 10+15=25
- (γ) Για το 1-1-3 έχουμε 3 τρόπους, ανάλογα με το που θα πέσουν οι 3 μπάλες. Για το 1-2-2 έχουμε πάλι τρεις τρόπους ανάλογα με το που θα διαλέξουμε τον κάδο με τη μία σφαίρα C(3,1)=3. Άρα 3+3=6.
- (δ) Για το 1-1-3 ένας τρόπος. Το ίδιο για το 1-2-2. Άρα 2 τρόποι.

(2 Μονάδες)

1. (1) Δώστε μία συνδυαστική απόδειξη ότι $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$ για όλους τους θετικούς ακεραίους n.

2. (1) Εστω S={0,1,…,9}^{90} το σύνολο όλων των ακολουθιών μήκους 90 αποτελούμενο από τα ψηφία {0,1,2,…,9}. Δύο ακολουθίες s_1 και s_2 λέγεται ότι έχουν την ίδια κατανομή ψηφίων αν και μόνο αν η s_1 έχει το ίδιο πλήθος εμφανίσεων για το ψηφίο j με την s_2 για κάθε $j \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.
(0.5) Δώστε μία αντιστοιχία μεταξύ του προβλήματος μέτρησης όλων των ακολουθιών μήκους 90 διαφορετικής κατανομής ψηφίων και όλων των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σειρά τα ψηφία 0 και 1.
(0.5) Πόσες διαφορετικές ως προς την κατανομή ψηφίων ακολουθίες μπορούμε να κατασκευάσουμε;

Άσκηση

Έχουμε 7 α, 8 β, 5 γ και 4 δ. Πόσες συμβολοσειρές μπορούμε να φτιάξουμε αν δεν πρέπει να εμφανίζεται το «γα» σε καμία από αυτές;

$$\frac{19!}{7!\,8!\,4!}\binom{13+5-1}{5}$$

Άσκηση

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 ίδια πορτοκάλια και 6 διαφορετικά μήλα σε 5 διαφορετικά κουτιά. Σε ποιο ποσοστό αυτών των τρόπων τοποθετούνται ακριβώς 2 φρούτα σε κάθε κουτί;

Συνολικά: $\binom{5+4-1}{5-1}5^6$

Με περιορισμό σε 2: $\binom{5}{2}\frac{6!}{2!2!2!}+\binom{5}{2}\binom{3}{1}\frac{6!}{2!2!1!1!}+\binom{5}{4}\frac{6!}{2!1!1!1!1!}$

Λύση

- Τα 4 ίδια πορτοκάλια μπορούμε να τα τοποθετήσουμε στα 5 διαφορετικά κουτιά με C(5+4-1,5-1)=70 τρόπους.
- Τα 6 διαφορετικά μήλα στα 5 διαφορετικά κουτιά με 5^6=15625 τρόπους
- Άρα συνολικά με 70*15625=1.093.750

Για να έχουμε ακριβώς 2 φρούτα σε κάθε κουτί θα πάρουμε περιπτώσεις ως προς τα πορτοκάλια (κανόνας αθροίσματος)

- α) Πορτοκάλια: 2+2, υπάρχουν C(5,2)=10 τρόποι να γίνει αυτό. Τα 6 μήλα χωρίζονται σε διμελής ομάδες (2+2+2) για κάθε ένα από τα υπόλοιπα τρία κουτιά: 6!/2!2!2!=90 τρόπους. Άρα συνολικά 10*90=900 τρόπους.
- β) Πορτοκάλια: 2+1+1: C(5,1) τρόποι για τη δυάδα και C(4,2) τρόποι για τη δυάδα κουτιών. Άρα συνολικά 30 τρόποι. Τα μήλα: 2+2+1+1 κατανέμονται με 6!/2!2!1!1!=180 τρόπους. Άρα 30*180=5400 τρόπους συνολικά.
- γ) Πορτοκάλια: 1+1+1+1: C(5,4)=5 τρόπους. Μήλα: 2+1+1+1+1 με 6!/2!1!1!1!1!=360 τρόπους. Άρα συνολικά 1800 τρόποι.

- Άρα ως ποσοστό είναι 0,74%

Άσκηση

Σε ένα μαγαζί τα αντικείμενα Α, Β και Γ κοστίζουν 5 ευρώ και το αντικείμενο Δ κοστίζει 20 ευρώ. Αν θέλω να ξοδέψω συνολικά 100 ευρώ, πόσες διαφορετικές αγορές μπορώ να κάνω;

$$\sum_{\Delta=0}^{5} \binom{3+20-4\Delta-1}{3-1}$$

Λύση

- Αφού το μικρότερο ποσό είναι 5 ευρώ και το 20 είναι πολλαπλάσιό του, θεωρώ το 5ευρω ως μονάδα και άρα το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων για την εξίσωση Α+Β+Γ+4Δ=20.
- Αφού το Δ έχει το συντελεστή 4 θα πρέπει να διαμερίσουμε το χώρο ως προς την επιλογή των Δ – ο ένας τρόπος θα ήταν με κανόνα αθροίσματος αλλά εμείς εδώ απλά θα παραμετροποιήσουμε. Επομένως η εξίσωση γίνεται Α+Β+Γ=20-4Δ για κάθε επιλογή του Δ.

- Άρα έχουμε να τοποθετήσουμε 20-4i ίδια αντικείμενα σε 3 διαφορετικά κουτιά. Αυτό μπορεί να γίνει με C(3+20-4i-1,3-1) τρόπους. Άρα, θέλουμε να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα από Δ=0 μέχρι 5.

Καλές γιορτές