1. Αναδρομικός Ορισμός

Έστω ότι σήμερα (έτος 0) το αυτοκίνητό σας κοστίζει 15000 ευρώ. Κάθε έτος η αξία του μειώνεται κατά 10% αλλά στο τέλος κάθε έτους κάνετε κάποιες αναβαθμίσεις στο αυτοκίνητό σας που αυξάνουν την αξία του κατά 100 ευρώ. Γράψτε μία αναδρομική σχέση που περιγράφει αυτή την κατάσταση.

Λύση:

Έστω ότι $T(n)$ είναι η αξία του τον χρόνο n. Τότε η αξία του σε σχέση με τον χρόνο $n-1$ είναι μειωμένη κατά 10% και αυξημένη στο τέλος του κατά 100 ευρώ. Αυτό μας οδηγεί στην εξής αναδρομή:

$$T(n) = 0.9T(n-1) + 100$$

Η αρχική συνθήκη προκύπτει από την αρχική αξία του αυτοκινήτου που είναι 15000 ευρώ. Άρα:

$$T(0) = 15000$$

2. Αναδρομικός Ορισμός

Δώστε έναν αναδρομικό ορισμό για το σύνολο X όλων των φυσικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από κάποιο πολλαπλάσιο του 10 κατά 1 ή 2 μονάδες. Δηλαδή, δώστε έναν αναδρομικό ορισμό για το σύνολο $\{1,2,11,12,21,22,31,32,\dots\}$.

Λύση:

Βάση: $1 \in X$ και $2 \in X$

Αναδρομικό βήμα: Αν $x \in X$ τότε και $x + 10 \in X$

3. Δομική Επαγωγή

Έστω S ένα υποσύνολο των ακεραίων που ορίζεται ως εξής:

Βάση: $5 \in S$

Αναδρομικό βήμα: Για δεδομένο ακέραιο $n \in S$, ο ακέραιος $n + 4 \in S$.

Το σύνολο S περιέχει μόνο τους ακέραιους που καθορίζονται από τους παραπάνω κανόνες.

Να δείξετε ότι για κάθε ακέραιο $n \in S$ ισχύει ότι $n \bmod 2 = 1$ (δηλαδή όλοι είναι περιττοί).

Λύση:

Βάση: ο 5 είναι ο μοναδικός ακέραιος στη βάση του S. Ισχύει ότι είναι περιττός αφού $5 \bmod 2 = 1$.

Αναδρομικό βήμα: Έστω οποιοσδήποτε ακέραιος $n \in S$ που έχει την ιδιότητα ότι είναι περιττός. Θα δείξουμε ότι και μετά την εφαρμογή του μοναδικού κανόνα ο νέος αριθμός θα είναι επίσης περιττός. Αφού n περιττός ισχύει $n \; mod \; 2 = 1$, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει ακέραιος k έτσι ώστε:

$$n = 2k + 1$$

Αφού ο μοναδικός κανόνας λέει ότι και ο $n + 4$ θα ανήκει στο S, έχουμε:

$$n + 4 = 2k + 1 + 4 = 2(k + 2) + 1$$

το οποίο δείχνει ότι και ο $n + 4$ είναι περιττός. Άρα αποδείχτηκε το ζητούμενο.

4. Επαναληπτική Μέθοδος

Να λυθεί η $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n$. Θεωρούμε ότι η αρχική συνθήκη είναι $T(1) = c$.

Λύση:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$3T\left(\frac{n}{4}\right) = 3^2 T\left(\frac{n}{4^2}\right) + \frac{3n}{4}$$

$$3^2 T\left(\frac{n}{4^2}\right) = 3^3 T\left(\frac{n}{4^3}\right) + \frac{3^2 n}{4^2}$$

$$\vdots$$

$$3^{k-1} T\left(\frac{n}{4^{k-1}}\right) = 3^k T\left(\frac{n}{4^k}\right) + \frac{3^{k-1} n}{4^{k-1}}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη έχουμε

$$T(n) = 3^k T\left(\frac{n}{4^k}\right) + \left(n + \frac{3n}{4} + \frac{3^2 n}{4^2} + \frac{3^3 n}{4^3} + \cdots + \frac{3^{k-1} n}{4^{k-1}}\right) =$$

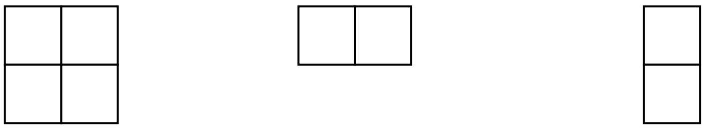
$$3^{log_4 n} T(1) + n \sum_{i=0}^{k-1} \frac{3^i}{4^i} =$$

$$c3^{log_4 n} + n \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k}{\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

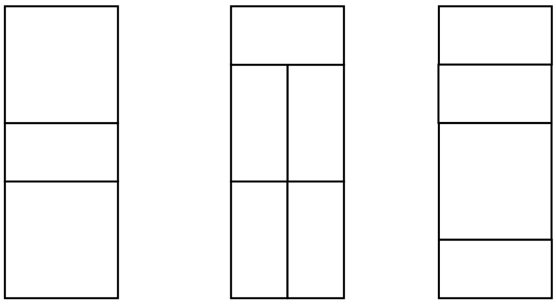
$$T(n) = c3^{log_4 n} + 4n\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$

5. Ομογενής αναδρομική σχέση – Mini-Tetris

Στο Mini-Tetris κερδίζουμε όταν σε ένα πλέγμα $2 \times n$, χρησιμοποιώντας τα παρακάτω σχήματα καταφέρνουμε να το γεμίσουμε χωρίς κανένα κενό.



Για παράδειγμα σε ένα πλέγμα 2×5 μπορούμε να έχουμε:



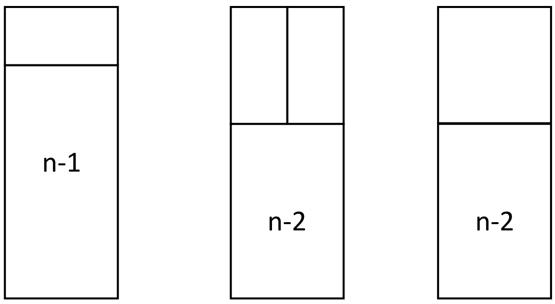
Το ζητούμενο είναι να βρούμε μία αναδρομική διαδικασία $T(n)$ ως προς το πλήθος των διαφορετικών λύσεων για ένα πλέγμα $2 \times n$ και έπειτα να βρούμε το κλειστό της τύπο.

Ποιες είναι οι τιμές των $T(1), T(2), T(3)$;

<u>Λύση:</u>

$$T(1) = 1, T(2) = 3, T(3) = 5$$

Θα βρούμε μία αναδρομή του $T(n)$ ως προς $T(n-1)$ και $T(n-2)$.



Υπάρχουν $T(n-1)$ λύσεις πρώτου τύπου και $T(n-2)$ δεύτερου και τρίτου τύπου.

$$T(n) = T(n-1) + 2T(n-2)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω αναδρομικής είναι η $x^2 - x + 2 = (x+1)(x-2) = 0$, έχει τις ρίζες 2 και -1. Άρα η λύση θα είναι της μορφής $T(n) = \alpha 2^n + b(-1)^n$.

Από $T(1) = 1, T(2) = 3$ παίρνουμε το εξής σύστημα εξισώσεων:

$$2\alpha - b = 1$$

$$4\alpha + b = 3$$

από όπου προκύπτει ότι $\alpha = \frac{2}{3}$ και $b = \frac{1}{3}$. Άρα:

$$T(n) = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$$

6. Μη ομογενής αναδρομική σχέση

Έστω η επόμενη ακολουθία από λογικές προτάσεις:

$$Q_1(x_1) = x_1$$
$$Q_2(x_1, x_2) = x_1 \Rightarrow x_2$$
$$Q_3(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow x_3$$
$$Q_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \big((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow x_3\big) \Rightarrow x_4$$
$$Q_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \Big(\big((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow x_3\big) \Rightarrow x_4\Big) \Rightarrow x_5$$
$$\ldots$$

Έστω T_n το πλήθος των διαφορετικών ΑΛΗΘΗΣ(Α)/ΨΕΥΔΗΣ(Ψ) τιμοδοσιών στις μεταβλητές $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ για τις οποίες η $Q_n(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ είναι ΑΛΗΘΗΣ. Για παράδειγμα, T_2=3 αφού η $Q_2(x_1, x_2)$ είναι ΑΛΗΘΗΣ για 3 διαφορετικές τιμοδοσίες στις μεταβλητές x_1, x_2: (Α,Α), (Ψ,Α), (Ψ,Ψ) ενώ για την τιμοδοσία (Α,Ψ) είναι Ψευδής.

1. Να εκφράσετε το T_{n+1} σε σχέση με το T_n.
2. Χρησιμοποιείστε επαγωγή για να δείξετε ότι $T_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$, για $n \geq 1$ (μπορείτε να υποθέσετε την απάντηση στην προηγούμενη ερώτηση χωρίς απόδειξη)

Λύση:

1. Έχουμε:

$$Q_{n+1}(x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}) = Q_n(x_1, x_2 \ldots, x_n) \Rightarrow x_{n+1}$$

Αν η x_{n+1} είναι Α, τότε η Q_{n+1} είναι Α για όλες τις 2^n δυνατές περιπτώσεις των μεταβλητών $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Αν η x_{n+1} είναι Ψ, τότε η Q_{n+1} είναι Α για όλες τις περιπτώσεις των μεταβλητών $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ με εξαίρεση εκείνες τις T_n τιμοδοσίες που κάνουν την Q_n Α. Άρα έχουμε:

$$T_{n+1} = 2^n + 2^n - T_n$$

2. Έστω $\Pi(n)$ η πρόταση ότι $T_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$.

$\Pi(1)$: $T_1 = \frac{1}{3}(2^2 + (-1)^1) = 1$, Άρα ισχύει αφού για την Q_1 μόνο μία τιμοδοσία υπάρχει

Έστω ότι ισχύει η $\Pi(n)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και η $\Pi(n+1)$:

$$T_{n+1} = 2^{n+1} - T_n = 2^{n+1} - \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n) = \frac{1}{3}(2^{n+2} + (-1)^{n+1})$$

Άρα ισχύει και επομένως η $\Pi(n)$ ισχύει για $n \geq 1$.

Άλυτες Ασκήσεις

1. Ένα φυτό μπορεί να ζήσει για πάντα αλλά αναπαράγεται μία φορά. Συγκεκριμένα αναπαράγεται κατά τη διάρκεια του πρώτου έτους ζωής του. Να βρείτε μία αναδρομική σχέση που να περιγράφει τον αριθμό των φυτών στο χρόνο n και έπειτα να βρείτε έναν κλειστό τύπο για την αναδρομή.

2. Να βρείτε κλειστό τύπο για $T(0) = 0, T(1) = 1, T(n) = 6T(n-1) - 9T(n-2)$

3. (Bradley 6.1.8 ex) Υποθέστε ότι τα ελάφια αναπαράγονται μία φορά το χρόνο (την άνοιξη) και ότι κάθε θηλυκό ενός χρόνου και άνω γεννάει 2 ελαφάκια. Υποθέστε ότι μισά είναι αρσενικά και μισά θηλυκά. Επίσης, κάθε ελάφι πεθαίνει μετά το 2^{ο} χρόνο ζωής του. Επίσης, μόνο ένα ποσοστό k_1 επιζούν από τα νεογνά. Επίσης υποθέστε ότι μόνο ένα ποσοστό k_2 επιζεί από τα ελάφια που είναι ενός χρόνου. Μοντελοποιείστε τον πληθυσμό των ελαφιών χρησιμοποιώντας αναδρομικές σχέσεις. Να βρείτε κλειστό τύπο για αυτή τη σχέση.

4. Η εύρεση με παρεμβολή είναι μία τεχνική που μας επιτρέπει να ψάξουμε έναν διατεταγμένο πίνακα σε αριθμό βημάτων που περιγράφονται από την εξής αναδρομή: $T(1) = 1, T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$. Να βρείτε κλειστό τύπο για τον αριθμό των βημάτων της εύρεσης με παρεμβολή.

5. (Concrete 1.2) Πόσες κομμάτια πίτσας μπορούμε να κόψουμε κάνοντας n ευθείες με ένα μαχαίρι; Πιο μαθηματικά: Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός περιοχών στο επίπεδο που ορίζονται από n ευθείες;
   Βρείτε την αναδρομική σχέση και έπειτα βρείτε τον κλειστό της τύπο.