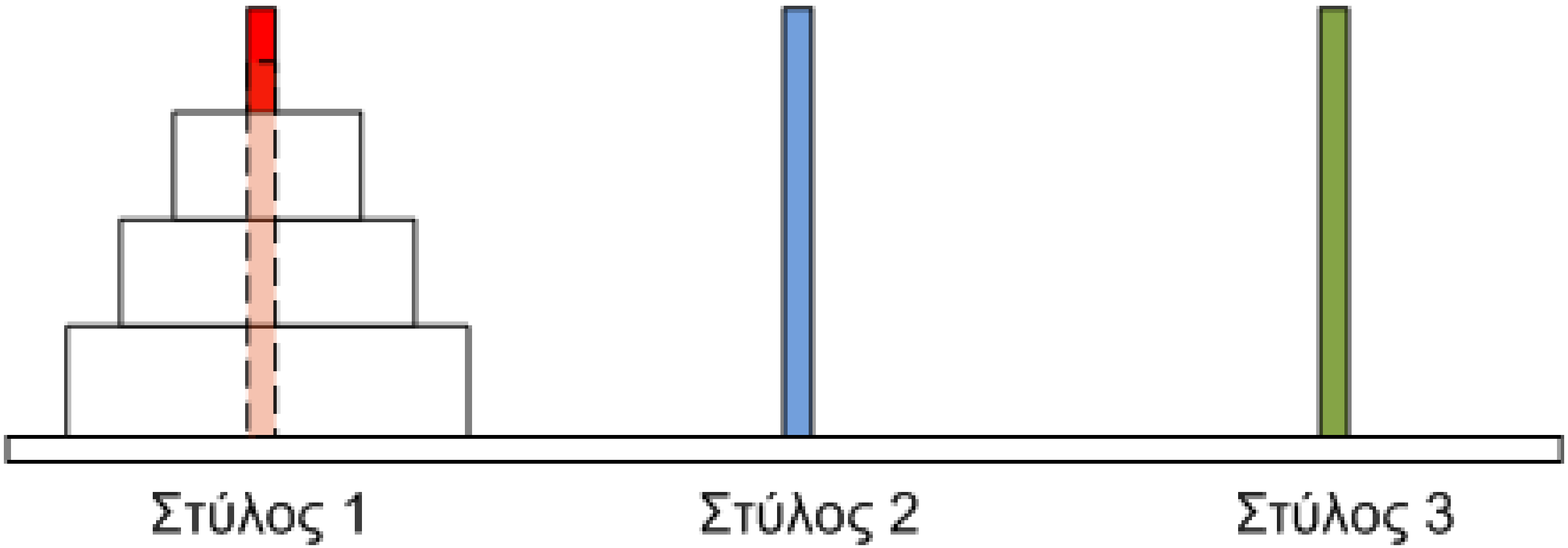
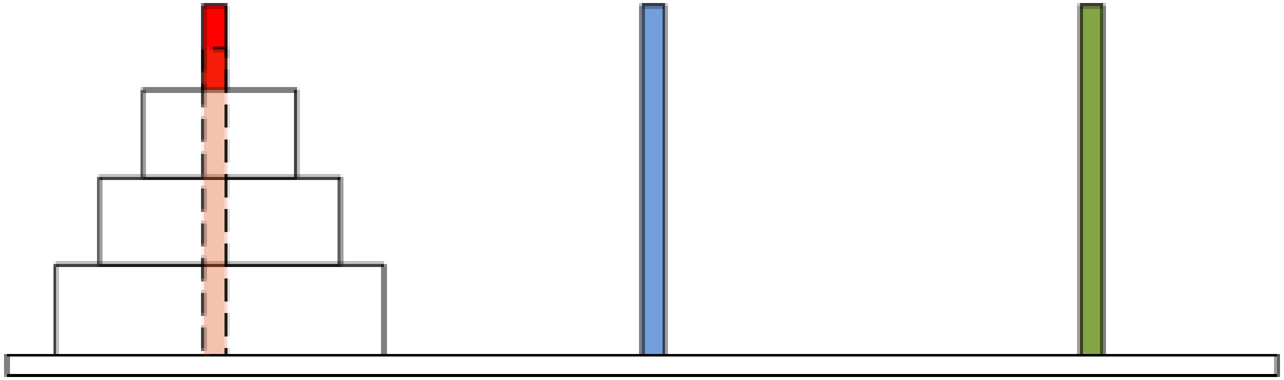
Αναδρομική Σκέψη

Οι Πύργοι του Ανόι



- Πόσες κινήσεις πρέπει να γίνουν για να μεταφέρουμε τους δίσκους από τον Στύλο 1 στον Στύλο 3;

Στρατηγική



- Μεταφέρουμε τον μικρό στον στύλο 3. Τον μεσαίο στο στύλο 2 και έπειτα τον μικρό στο στύλο 2. Τον μεγάλο τον πάμε στην τελική του θέση στο στύλο 3 και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για τους άλλους δύο.

Πόσες κινήσεις;

Αν $T(n)$ ο χρόνος για n δίσκους τότε $T(n\text{-}1)$ για να μεταφέρουμε τους n-1 στον στύλο 2, 1 για την μεταφορά του μεγαλύτερου στον στύλο 3 και $T(n\text{-}1)$ για τους εναπομείναντες n-1.

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

Αρχική Συνθήκη: $T(0) = 0$

Κλειστός Τύπος

- Ξετυλίγουμε την αναδρομή:

$$
\begin{aligned}
&T(n) = 2T(n-1) + 1 \Rightarrow \\
&T(n) = 2(2T(n-2) + 1) + 1 \Rightarrow \\
&T(n) = 2^2T(n-2) + 2^1 + 1 \Rightarrow \\
&T(n) = 2^3T(n-3) + 2^2 + 2^1 + 1 \Rightarrow \\
&\vdots \\
&T(n) = 2^nT(0) + 2^{n-1} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1 \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$T(n) = 2^n - 1$$

Ας το πιάσουμε από την αρχή: Αναδρομικός Ορισμός Συνάρτησης

Ο αναδρομικός ορισμός μίας συνάρτησης αποτελείται από δύο βήματα:

- Βάση Αναδρομής: Καθορίστε την έξοδο της συνάρτησης για κάποια αρχική τιμή (π.χ., το 0).
- Αναδρομικό βήμα: Δώστε ένα κανόνα για την εύρεση της εξόδου της συνάρτησης από τις εξόδους της σε μικρότερες εισόδους.

<u>Παράδειγμα:</u>

$$f(0) = 3$$
$$f(n) = 2f(n-1) + 3$$

$$f(5) =;$$

Άλλο Παράδειγμα

Δώστε αναδρομικό ορισμό του:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k$$

Βάση αναδρομής:

$$\sum_{k=0}^{0} a_k = 0$$

Αναδρομικό βήμα:

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$$

Διαφορετικά: Αν $\mathrm{S}_{\alpha}(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ τότε το παραπάνω γράφεται ως:

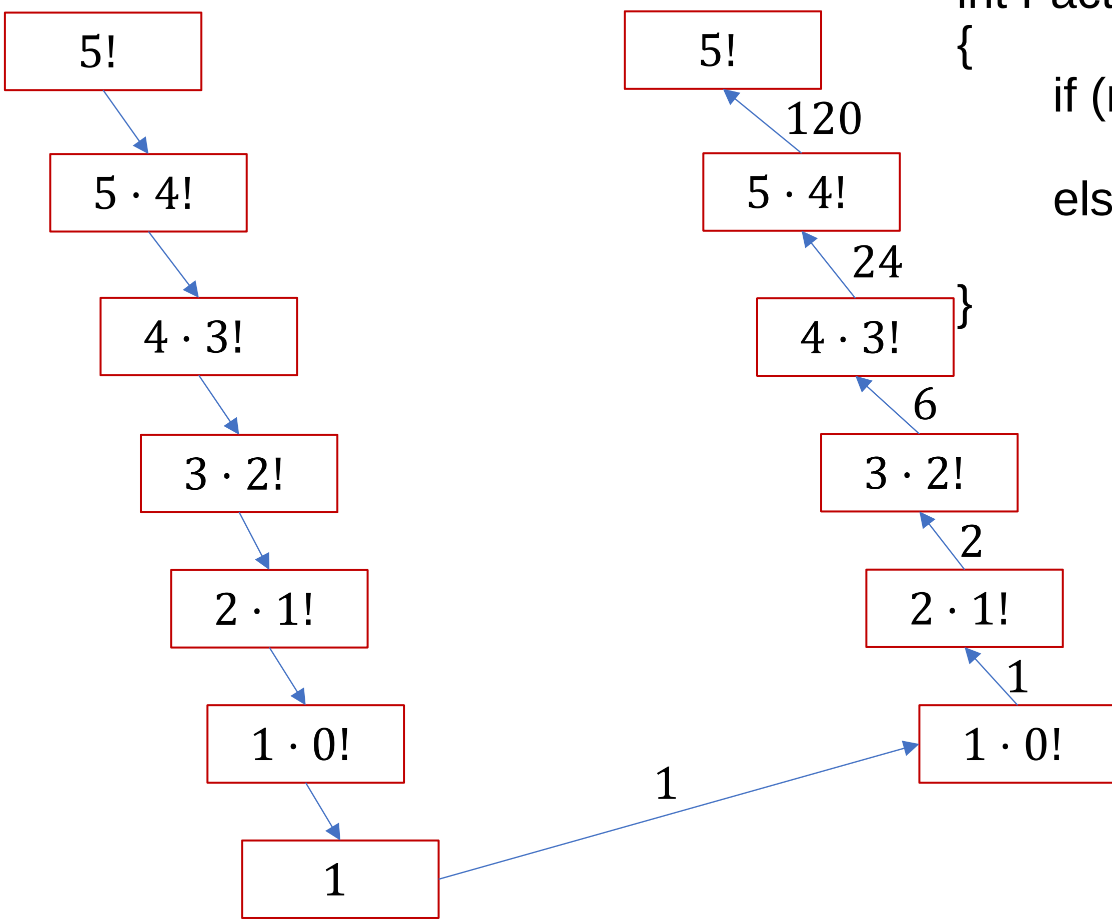
$$\mathrm{S}_{\alpha}(n+1) = S_a(n) + a_{n+1}$$

Παραγοντικό: Αναδρομή!!!!!!

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)! & n > 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

```
int Factorial(int n)
{
  if (n==0)  // base case
             return 1;
  else
             return n * Factorial(n-1);
}
```

Ιχνηλάτιση (Tracing)




```
int Factorial(int n)
{
      if (n==0)  // base case
          return 1;
      else
          return n * Factorial(n-1);
}
```

5!

Παραγοντικό: Επανάληψη!!!!!

```
int Factorial(int n)
{
   int fact = 1;

   for(int count = 2; count <= n; count++)
               fact = fact * count;

   return fact;
}
```

Αναδρομή έναντι Επανάληψης

λίγο από αλγόριθμους…

- Η επανάληψη μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη θέση της αναδρομής
  - Ένας επαναληπτικός αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια κατασκευή βρόχου
  - Ένας αναδρομικός αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια δομή διακλάδωσης

- Οι αναδρομικές λύσεις είναι συχνά λιγότερο αποτελεσματικές, τόσο από άποψη χρόνου όσο και χώρου, από τις επαναληπτικές λύσεις

- Η αναδρομή μπορεί να απλοποιήσει τη λύση ενός προβλήματος, συχνά καταλήγοντας σε συντομότερο, πιο εύκολα κατανοητό πηγαίο κώδικα

Περιττοί Αριθμοί

- $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$
- Ο πρώτος περιττός φυσικός αριθμός είναι ο 1.
- Ο επόμενος περιττός φυσικός αριθμός είναι κατά 2 μεγαλύτερος από τον προηγούμενο.
- Έστω $P(n)$ ο n-οστός περιττός αριθμός
  - $P(1) = 1$
  - $P(n) = P(n-1) + 2$

$$P(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ P(n-1) + 2 & n > 1 \end{cases}$$

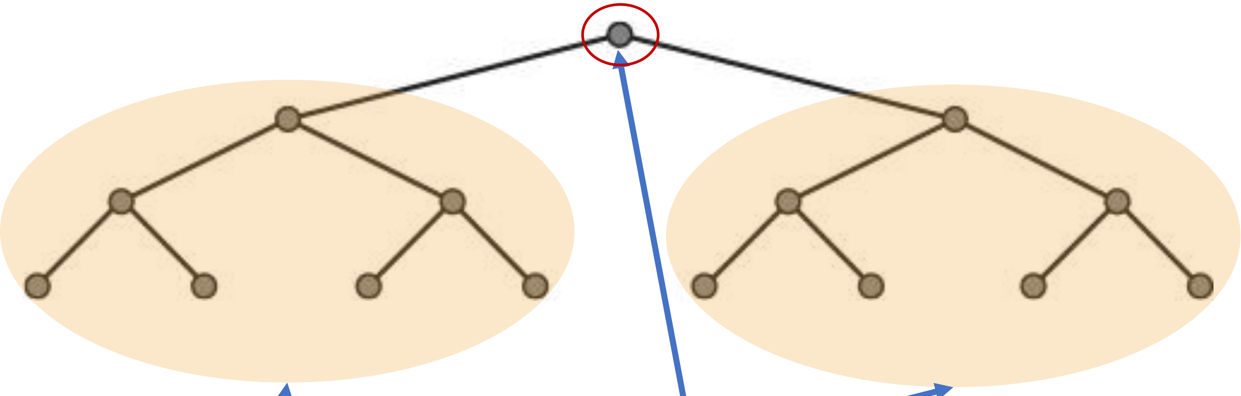
Αποτίμηση

$$P(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ P(n-1) + 2 & n > 1 \end{cases}$$

- Από κάτω προς πάνω:
  - $P(1) = 1$
  - $P(2) = P(1) + 2 = 1 + 2 = 3$
  - $P(3) = P(2) + 2 = 3 + 2 = 5$
- Από πάνω προς τα κάτω:
  - $P(3) = P(2) + 2 = P(1) + 2 + 2 = 1 + 2 + 2 = 5$
- Χρησιμοποιήστε την αποτίμηση από κάτω προς τα πάνω αν θέλετε να καταλάβετε την ακολουθία.
- Χρησιμοποιήστε την αποτίμηση από πάνω προς τα κάτω αν θέλετε να καταλάβετε τη δομή της αναδρομής.

Δυαδικά Δένδρα

Ένα δυαδικό δένδρο είναι *τέλειο* αν κάθε φύλλο έχει βάθος *n* και κάθε κόμβος που δεν είναι φύλλο έχει δύο παιδιά

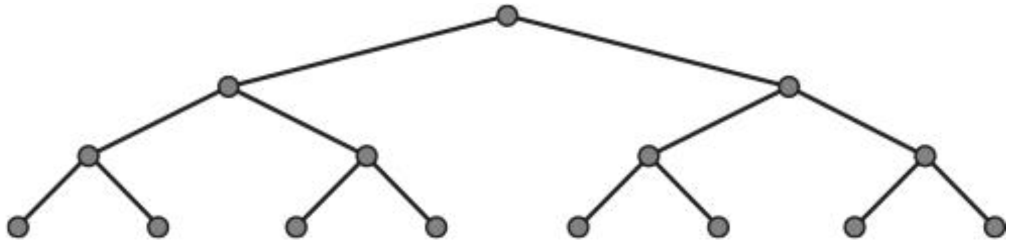


Ένα τέλειο δένδρο έχει **1 κορυφή-ρίζα** που ενώνει **δύο μικρότερα τέλεια δένδρα**.

Κόμβων Τέλειων Δυαδικών Δένδρων

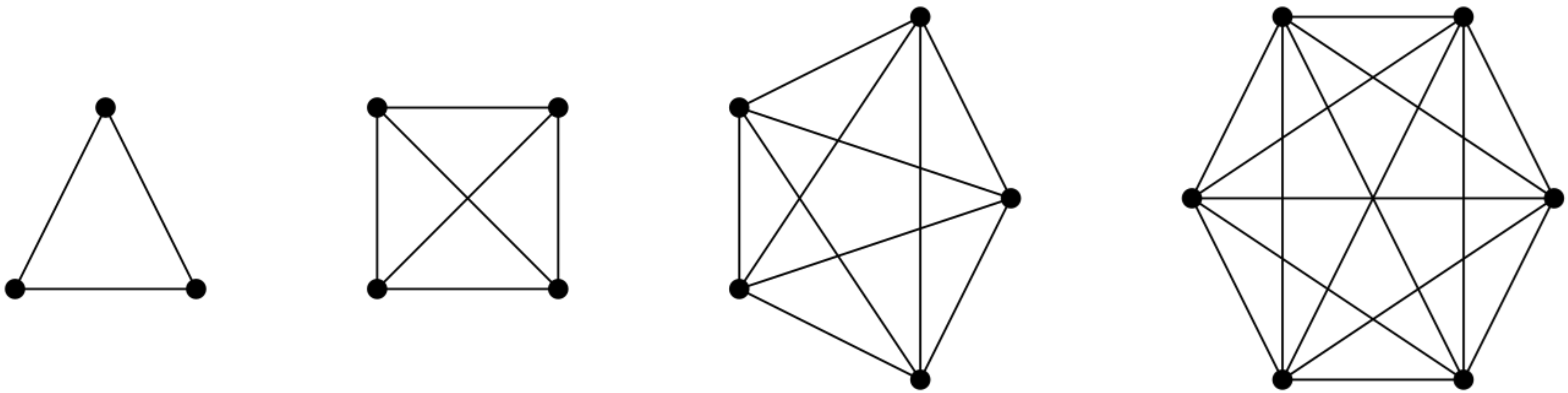
Πόσες κορυφές $V(n)$ έχει ένα δένδρο με n επίπεδα;

$$V(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2V(n-1) + 1 & n > 1 \end{cases}$$



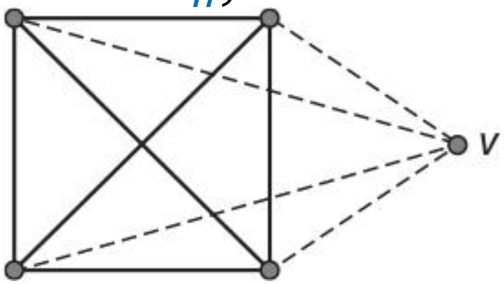
Πλήρη Γραφήματα

Το πλήρες γράφημα K_n σε n κορυφές είναι το ακατεύθυντο γράφημα που έχει ακριβώς μία ακμή μεταξύ κάθε ζεύγος κορυφών.



Αναδρομικός Ορισμός

Το K_n προκύπτει από το K_{n-1} προσθέτοντας μια κορυφή v και συνδέοντας όλες τις ακμές με το v. Ποιο είναι το πλήθος των ακμών $E(n)$ του K_n;



$$E(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ E(n-1) + n - 1 & n > 1 \end{cases}$$

Αναδρομικοί Ορισμοί

Αυτοί εφαρμόζονται και σε αντικείμενα εκτός από αριθμούς:

Βάση αναδρομής: ορίζει το απλούστερο δυνατό τέτοιο αντικείμενο

Αναδρομικό βήμα: ορίζει ένα πιο περίπλοκο αντικείμενο χρησιμοποιώντας όρους ενός απλούστερου

Αναδρομικά Ορισμένα Σύνολα

Υποσύνολο των ακεραίων S:

Βάση αναδρομής: $3 \in S$.

Αναδρομικό βήμα: Αν $x \in S$ and $y \in S$, τότε $x + y$ είναι στο S.

- Αρχικά το 3 είναι στο S, και άρα το $3 + 3 = 6$, το $3 + 6 = 9$, κοκ.

- Αποδείξτε ότι όλα τα στοιχεία του S είναι πολλαπλάσια του 3.
- Για να το κάνουμε χρειαζόμαστε κάτι επιπλέον…

Δομική Επαγωγή

Για να αποδείξουμε μία ιδιότητα στοιχείων ενός αναδρομικά ορισμένου συνόλου κάνουμε *δομική επαγωγή*:

Βασική περίπτωση: Δείξτε ότι η ιδιότητα ισχύει για όλα τα στοιχεία στη βάση της αναδρομής.

Αναδρομικό βήμα: Δείξτε ότι αν η ιδιότητα είναι αληθής για τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται στον αναδρομικό ορισμό τότε και τα καινούργια στοιχεία έχουν επίσης την ιδιότητα.

Αναδρομικά Ορισμένα Σύνολα

Υποσύνολο των ακεραίων S:

Βάση αναδρομής: $3 \in S$.

Αναδρομικό βήμα: Αν $x \in S$ and $y \in S$, τότε $x + y$ είναι στο S.

- Αποδείξτε ότι όλα τα στοιχεία του S είναι πολλαπλάσια του 3.

Βασική περίπτωση: Το $3 \in S$ διαιρείται από το 3

Αναδρομικό βήμα: Έστω ότι τα $x \in S$ και $y \in S$ διαιρούνται από το 3. Άρα, υπάρχουν ακέραιοι k, l έτσι ώστε $x = 3k$ και $y = 3l$. Θα δείξουμε ότι το $x + y$ επίσης διαιρείται από το 3. Πράγματι:

$$x + y = 3k + 3l = 3(k + l)$$

Αποδείχτηκε.

Άλλο ένα Παράδειγμα

Έστω H το σύνολο των ηθοποιών και X το σύνολο που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

Βάση αναδρομής: Βέγγος $\in X$

Αναδρομικό βήμα: Έστω $x \in \mathrm{H}$ κάποιος ηθοποιός. Αν υπάρχει ένας ηθοποιός $y \in X$ έτσι ώστε σε μία ταινία να εμφανίζονται μαζί οι x και y τότε $x \in X$.

Τέλεια Δυαδικά Δένδρα: Αναδρομικός Ορισμός

Βάση Αναδρομής: Ένας κόμβος r αποτελεί ένα τέλειο δυαδικό δένδρο.

Αναδρομικό βήμα: Αν T_1 και T_2 είναι τέλεια δυαδικά δένδρα, υπάρχει ένα τέλειο δυαδικό δένδρο $T_1 \cdot T_2$, που αποτελείται από μία ρίζα r με ακμές που συνδέουν αυτή με τις ρίζες του αριστερού υποδένδρου T_1 και του δεξιού υποδένδρου T_2.

Δομική Επαγωγή σε Τέλεια Δυαδικά Δένδρα

Θεώρημα: Αν το T είναι ένα τέτοιο δένδρο και $n(T)$ είναι το πλήθος των κόμβων του τότε $n(T) \leq 2^{h(T)+1} - 1$, όπου $h(T)$ είναι το ύψος του δένδρου (το πλήθος των επιπέδων του χωρίς τα φύλλα).

Αναδρομικός ορισμός του ύψους:

$$h(T) = \begin{cases} 0 & n(T) = 1 \\ 1 + \max\{h(T_l), h(T_r)\} & n(T) > 1 \end{cases}$$

Απόδειξη:
Βάση αναδρομής: Το αποτέλεσμα ισχύει για ένα τέλειο δυαδικό δένδρο T που αποτελείται από τη ρίζα, $n(T) = 1$ και $h(T) = 0$. Άρα: $n(T) = 1 \leq 2^{0+1} - 1 = 1$. Ισχύει.
Αναδρομικό βήμα: Έστω ότι $n(T_1) \leq 2^{h(T_1)+1} - 1$ και $n(T_2) \leq 2^{h(T_2)+1} - 1$ όπου τα T_1, T_2 είναι τέλεια δυαδικά δένδρα. Τότε:

$$n(T) = 1 + n(T_1) + n(T_2) \leq$$
$$\leq 1 + 2^{h(T_1)+1} - 1 + 2^{h(T_2)+1} - 1 \leq$$
$$\leq 2 \cdot \max\{2^{h(T_1)+1}, 2^{h(T_2)+1}\} - 1 =$$
$$= 2 \cdot 2^{\max\{h(T_1), h(T_2)\}+1} - 1 =$$
$$= 2 \cdot 2^{h(T)} - 1 = 2^{h(T)+1} - 1$$

Τρόποι Επίλυσης

Θέλουμε να βρούμε κλειστούς τύπους

- Επαναληπτική Μέθοδος
- Πρόβλεψη και Επαγωγή
- Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Επαναληπτική Μέθοδος
(Ξετύλιγμα)

- Ξετυλίγουμε την αναδρομή μέχρι να φτάσουμε στην αρχική συνθήκη

- Θα μας προκύψει ένα *άθροισμα*.

- Και μία ποσότητα που εμπεριέχει την αρχική συνθήκη

Παράδειγμα

$$T(n) = 2T(n/2) + n^2$$

$$2T(n/2) = 2^2T(n/2^2) + 2(n/2)^2$$

$$2^2T(n/2^2) = 2^3T(n/2^3) + 2^2(n/2^2)^2$$

$$2^{k-1}T(n/2^{k-1}) = 2^kT(n/2^k) + 2^{k-1}(n/2^{k-1})^2$$

- Αν η βάση της αναδρομής είναι η $T(1)$ τότε θέτουμε $k = \log n$ και προκύπτει:

$$T(n) = nT(1) + n^2 \sum_{i=0}^{\log n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Πρόβλεψη και Επαγωγή

- Μαντεύουμε τη λύση
- Αποδεικνύουμε με επαγωγή

Παράδειγμα: $T(n) = 2T(n-1) + 1, T(0) = 0$

Πρόβλεψη: $T(n) = 2^n - 1$

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Η ομογενής γραμμική αναδρομική σχέση τάξης d έχει την εξής μορφή (με d αρχικές συνθήκες):

$$T(n) = a_1 T(n-1) + a_2 T(n-2) + \cdots a_d T(n-d)$$

- Παράδειγμα η Fibonacci ακολουθία:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$
$$T(0) = 0$$
$$T(1) = 1$$

Fibonacci

Κάποιος άνδρας έβαλε ένα ζεύγος κουνέλια σε κλειστό χώρο. Πόσα ζεύγη κουνέλια θα υπάρχουν σε αυτόν τον χώρο μετά από ένα έτος αν υποθέσουμε ότι κάθε μήνα, κάθε ζεύγος γεννά ένα νέο ζεύγος, το οποίο μετά το δεύτερο μήνα της ζωής του είναι έτοιμο για ανα

Πόσα ζεύγη ήδη υπάρχουν

Πόσα ζεύγη γεννιούνται από ώριμα ζεύγη

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$

$$T(0) = 0$$
$$T(1) = 1$$

Είναι γραμμική τάξης 2 και απαιτούνται 2 αρχικές συνθήκες

Fibonacci

- Συνήθως οι γραμμικές έχουν λύσεις εκθετικής μορφής.

$$T(n) = cx^n$$

- Επαλήθευση:

$$cx^n = cx^{n-1} + cx^{n-2} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

- Λύση:

$$T(n) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Παρατηρήσεις

- Αν δεν λάβουμε υπόψη τις αρχικές συνθήκες ο γραμμικός συνδυασμός των λύσεων είναι και αυτός λύση
- Τις σταθερές c_1 και c_2 τις καθορίζουμε από τις αρχικές συνθήκες με ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Γενικές Γραμμικές Αναδρομικές: Μεθοδολογία

- Ότι κάναμε και στην Fibonacci
- Από τις ρίζες της Χαρακτηριστικής Εξίσωσης με πρόβλεψη $\mathrm{T}(n) = x^n$

$$x^d = a_1 x^{d-1} + a_2 x^{d-2} + \cdots + a_d x^0$$

- Η λύση προκύπτει από τις ρίζες της Χ.Α.
  - Αν r ρίζα με πολλαπλότητα 1 τότε ο όρος r^n θα συμμετέχει στη λύση
  - Αν r ρίζα με πολλαπλότητα k τότε οι όροι $r^n, nr^n, n^2r^n, \dots, n^{k-1}r^n$ θα συμμετέχουν στη λύση

Παράδειγμα

$$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2), T(0) = 0, T(1) = 1$$

- Χ.Ε.: $x^2 - 2x + 1 = 0$ με διπλή ρίζα το $x = 1$

$$T(n) = c_1(1)^n + c_2 n(1)^n = c_1 + c_2 n$$

Από αρχικές συνθήκες $c_1 = 0$ $c_2 = 1$

$$T(n) = n$$