ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Αθροίσματα και Γινόμενα

Ο Εισοδηματίας

- Στο τηλεπαιχνίδι «Ο Εισοδηματίας» (2008) ο Αρναούτογλου για πρώτη φορά δίνει δύο επιλογές:
  - Να πάρεις 50.000 Ευρώ κάθε χρόνο για 20 χρόνια ή
  - Να πάρεις 750.000 Ευρώ εφάπαξ.

- Τι πρέπει να επιλέξει ο παίκτης αν γνωρίζει ότι ο πληθωρισμός (η απώλεια αξίας των χρημάτων) είναι 3% και είναι ίσος με το επιτόκιο της τράπεζας;

Ο Εισοδηματίας

Για να μπορούμε να συγκρίνουμε τις αξίες θα υπολογίσουμε τη σημερινή αξία (με πληθωρισμό *p*) όλων των χρημάτων που θα πάρουμε στα επόμενα 20 χρόνια:

- Την 2η χρονιά: $\dfrac{50.000}{1+p}$
- …
- Την 20η χρονιά: $\dfrac{50.000}{(1+p)^{19}}$
- Άρα η συνολική αξία είναι: $\displaystyle\sum_{i=0}^{19} \frac{50.000}{(1+p)^i}$

Ο Εισοδηματίας (συνέχεια)

- Τι θα πρέπει να επιλέξει ο παίκτης αν του προτείνουν 50.000 ευρώ επ'άπειρον ή 2.000.000 ευρώ εφάπαξ;

  - Η συνολική αξία θα είναι:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{50.000}{(1+p)^i}$$

Υπολογισμός Αθροίσματος

- Μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα απλά κάνοντας τις πράξεις (όχι στην περίπτωση απείρου αθροίσματος). Είναι όμως ασύμφορο (όχι μόνο για τον υπολογιστή αλλά και για εμάς)…

- Ο κλειστός τύπος ενός αθροίσματος μας επιτρέπει να βρίσκουμε άμεσα (σε ένα βήμα) την τιμή του αθροίσματος για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής άθροισης. Υπολογιστικά είναι καλύτερος αυτός ο τρόπος

Άθροισμα Γεωμετρικής Σειράς

$$S(k) = x^0 + x^1 + \cdots + x^k$$

$$-xS(k) = -x^1 - x^2 - \cdots - x^{k+1}$$

Πρόσθεση κατά μέλη:

$$S(k) - xS(k) = 1 - x^{k+1} \Rightarrow S(k) = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

Άθροισμα Απείρων Όρων Γεωμετρικής Σειράς

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}, x < 1$$

Ο Εισοδηματίας

- Αν του δίνουν 50.000 Ευρώ για 20 χρόνια ή 750.000, τότε:
  - Σε σημερινή αξία θα είναι 766.190. Άρα καλύτερα να τα πάρεις.

- Αν σου δίνουν 50.000 Ευρώ για πάντα ή 2.000.000, τότε:
  - Σε σημερινή αξία θα είναι 1.716.667. Άρα πάρε τα 2.000.000.

Βασικές Ιδιότητες Αθροισμάτων

$$\sum_{k\in K} ca_k = c\sum_{k\in K} a_k$$

Επιμεριστική Ιδιότητα

$$\sum_{k\in K}(a_k + b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k$$

Προσεταιριστική Ιδιότητα

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)}$$

Μεταθετική Ιδιότητα

Παράδειγμα

Να βρεθεί το άθροισμα: $$S_n = \sum_{0 \le k \le n} (a + bk)$$

Μεταθετική Ιδιότητα: $$S_n = \sum_{0 \le n-k \le n} (a + bn - bk)$$

Πρόσθεση των δύο αθροισμάτων (προσεταιριστική): $$2S_n = \sum_{0 \le k \le n} (2a + bn)$$

Επιμεριστική Ιδιότητα: $$S_n = \frac{1}{2}(2a + bn)(n + 1)$$

Εξίσωση Αθροίσματος

Ο στόχος είναι να φτάσουμε σε μία μορφή:

$$S_n = f(S_n)$$

Οπότε λύνουμε ως προς S_n και βρίσκουμε τον κλειστό τύπο

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le k \le n} a_{k+1}$$

Παράδειγμα

$$S_n = \sum_{0 \le k \le n} ax^k$$

$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + xS_n$$

$$S_n = \frac{a - ax^{n+1}}{1 - x}$$

Πρόβλεψη και Απόδειξη με Επαγωγή

- Μαντεύουμε τον κλειστό τύπο
  - Μας δίνει κάποιος τον κλειστό τύπο
  - Τον μαντεύουμε από άλλα παρόμοια αθροίσματα που έχουμε δει

- Αποδεικνύουμε με επαγωγή τον κλειστό τύπο

Παράδειγμα

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

1. Κάποιος μας λέει ότι

$$\frac{n^3}{3} \le S_n \le \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3}$$

2. Θεωρούμε ότι η λύση είναι της μορφής $an^3 + bn^2 + cn + d$. Βάζοντας τιμές παίρνουμε ένα σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους.

3. Αποδεικνύουμε με επαγωγή το αποτέλεσμα (αφού υπάρχει περίπτωση η πρόβλεψη να είναι λάθος). $a=1/3$, $b=1/2$, $c=1/6$, $d=0$.

Τηλεσκοπικές Σειρές

- Αθροίσματα στα οποία οι διαδοχικοί όροι που αθροίζονται αλληλοαναιρούνται:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) =$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) =$$

$$= -a_1 + (a_2 - a_2) + (a_3 - a_3) + \cdots + (a_n - a_n) + a_{n+1} =$$

$$= a_{n+1} - a_1$$

Γινόμενα

- Τα γινόμενα τα χειριζόμαστε όπως τα αθροίσματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

- Έστω: $P_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$

- Τότε: $S_n = \ln(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$

Παράδειγμα

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} i = n!$$

$$S_n = \ln(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(i)$$

- Από τη μέθοδο ολοκλήρωσης (δεν θα τη δούμε):

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

Ο τύπος του Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Θέμα 14ο: (1 Μονάδα) (2/2/2017)

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των επιφανειών όλων των απείρων ορθογωνίων με πλευρές $\frac{1}{k}$ και $\frac{1}{k+1}$, όπου $k \geq 1$ είναι ίσο με 1.

Θέμα 13ο: (0,5 Μονάδες) (16/9/2016)

Να υπολογίσετε τον κλειστό τύπο για το γινόμενο $P_n = \prod_{i=1}^{n} 2 \cdot 4^i$.

Σεπτέμβρης 23 – 1,2 μονάδες (Μεσαία δυσκολία)

Να βρείτε τον κλειστό τύπο του αθροίσματος:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{+\infty} j^{2/3} \left(1 - \frac{1}{2j^{1/3}}\right)^i$$