ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - 13/06/2023

Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

Στις παρακάτω ασκήσεις, δεν χρειάζεται να υπολογίζετε τις ακριβής αριθμητικές τιμές εκτός και αν σας ζητείται ρητά. Σε κάθε περίπτωση, απαγορεύεται η χρήση οποιασδήποτε υπολογιστικής μηχανής.

Θέματα Μικρής Δυσκολίας (4,5 μονάδες)[1]

1. (1,25) Έστω R μία σχέση στο $A=N\times N$ έτσι ώστε $(x,y)R(p,q)$ αν και μόνο αν $x+q=y+p$. Να δείξετε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

2. (0,75) Να δείξετε αν η λογική πρόταση $\big((p\to q)\to(p\wedge q)\big)\to p$ είναι ταυτολογία, αντίφαση ή τίποτα από τα δύο.

3. (1) Να αποδειχθεί ότι ο ακέραιος n είναι άρτιος αν και μόνο αν ο n^2 είναι άρτιος. Να αναφέρετε τις μεθόδους απόδειξης που χρησιμοποιείτε.

4. (0,75) Έστω ότι ένας ακέραιος n όταν διαιρείται με το 7 αφήνει υπόλοιπο 4. Ποιο είναι το υπόλοιπο αν ο $3n$ διαιρεθεί με το 7;

5. (0,75) Πόσες δυαδικές ακολουθίες υπάρχουν μήκους k; Πόσες από αυτές τις δυαδικές ακολουθίες έχουν συμπληρωματικά το πρώτο και τελευταίο ψηφίο (δηλαδή αν το πρώτο ψηφίο είναι 0 το τελευταίο είναι 1 και αντίστροφα);

Θέματα Μεσαίας Δυσκολίας (4,5 μονάδες)

6. (1,25) Να δείξετε αν η λογική πρόταση $\forall x P(x)\vee\forall x Q(x)$ είναι λογικά ισοδύναμη με τη λογική πρόταση $\forall x\big(P(x)\vee Q(x)\big)$.

7. (1,25) Να υπολογίσετε με μία αριθμητική παράσταση (προσθέσεις και αφαιρέσεις) το πολύ τεσσάρων κλασμάτων το εξής άθροισμα: $\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k^2+2k}$

8. (2) Μία τράπουλα έχει 52 φύλλα, τα οποία χωρίζονται σε 2 χρώματα (κόκκινο – μαύρο) και κάθε χρώμα έχει δύο τύπους (κόκκινο: κούπα και καρό, μαύρο: σπαθί και μπαστούνι). Καθένας από τους 4 τύπους έχει 13 φύλλα διαφορετικής τιμής από το 1 έως το 10 καθώς και τον βαλέ (J), ντάμα (Q) και ρήγα (K). Δώστε απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις με συνοπτική αιτιολόγηση (όπου δεν αναφέρεται ρητά, δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία τραβάμε φύλλα ενώ τα φύλλα δεν επανατοποθετούνται στην τράπουλα. Σε κάθε ερώτημα η τράπουλα έχει 52 φύλλα.):

1. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 6 φύλλα ώστε όλα να είναι μαύρα;
2. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 6 φύλλα ώστε όλα να έχουν το ίδιο χρώμα;
3. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 5 φύλλα ώστε όλα να είναι κόκκινα ενώ μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία τραβάμε τα φύλλα;
4. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 6 φύλλα ώστε να έχουμε μία ντάμα, 2 βαλέδες και τρεις ρηγάδες;
5. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα φύλλο που να είναι σπαθί ή 10;
6. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 5 φύλλα ώστε να υπάρχουν 4 φύλλα ίδιας τιμής (π.χ., τέσσερις βαλέδες);

[1] Ο βαθμός δυσκολίας προφανώς είναι εν μέρει υποκειμενικός και εξαρτάται εν πολλοίς από το βαθμό κατανόησης του φοιτητή της αντίστοιχης ύλης.

7. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 5 φύλλα έτσι ώστε όλα να είναι του ίδιου τύπου;
8. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 5 φύλλα έτσι ώστε όλα να είναι του ίδιου τύπου και ταυτόχρονα να είναι σε διαδοχική σειρά (π.χ., 4,5,6,7,8 ή 9,10,J,Q,K); Προσοχή: δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία τραβάμε τα φύλλα.
9. Πόσα φύλλα πρέπει να επιλέξουμε για να πάρουμε εγγυημένα τουλάχιστον 2 βαλέδες;
10. Πόσα φύλλα πρέπει να επιλέξουμε για να πάρουμε εγγυημένα 3 φύλλα με ίδια τιμή;

Θέματα Αυξημένης Δυσκολίας (2,5 μονάδες)

9. (1,5) Χρησιμοποιώντας συνδυαστική απόδειξη (και μόνο) να δείξετε ότι: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.
Υπόδειξη: Σκεφτείτε μία ομάδα n κοριτσιών και μία ομάδα n αγοριών.

10. (1) Να αποδείξετε με αντίφαση την εξής πρόταση: Για κάθε ακέραιο a και έναν πρώτο αριθμό p, αν $p \mid a$ τότε $p \nmid (a+1)$.

Καλή Επιτυχία!!!

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1.

Η συγκεκριμένη σχέση είναι:

α)ανακλαστική: αφού $(x,y)R(x,y)$ σημαίνει ότι $x+y=y+x$ που ισχύει.

β)συμμετρική: αφού $(x,y)R(p,q)$ σημαίνει ότι $x+q=y+p$ που μπορεί να γραφεί σαν $y+p=x+q$ που σημαίνει $(p,q)R(x,y)$. Άρα $(x,y)R(p,q)$ δίνει $(p,q)R(x,y)$ και άρα η R είναι συμμετρική.

γ)μεταβατική: Έστω $(x,y)R(p,q)$ και $(p,q)R(a,b)$ το οποίο σημαίνει ότι $x+q=y+p$ και $p+b=q+a$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $(x+q)+(p+b)=(y+p)+(q+a)$ από όπου προκύπτει ότι $(x+b)+(p+q)=(y+a)+(p+q)$ και αφαιρώντας το $(p+q)$ και από τα δύο μέλη παίρνουμε $x+b=y+a$ οπότε $(x,y)R(a,b)$

Άρα η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

2.

Με πίνακα αληθείας.

p	q	$p \to q$	$p \wedge q$	$(p \to q) \to (p \wedge q)$	$\big((p \to q) \to (p \wedge q)\big) \to p$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T

Άρα είναι ταυτολογία.

3.

⇒ (άμεση απόδειξη) Έστω n άρτιος. Τότε μπορούμε να τον γράψουμε σαν $n=2k$, για κάποιον ακέραιο k. Άρα $n^2=4k^2=2(2k^2)$. Άρα ο n^2 είναι άρτιος.

⇐ (έμμεση απόδειξη) Θέλουμε να δείξουμε ότι αν n^2 άρτιος τότε και ο n είναι άρτιος. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να αποδείξουμε ότι αν ο n είναι περιττός τότε και ο n^2 είναι περιττός. Τότε μπορούμε να γράψουμε το n σαν $n=2k+1$, για κάποιον ακέραιο k. Άρα $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$. Άρα ο n^2 είναι περιττός αφού όλοι οι όροι του αθροίσματος είναι άρτιοι πλην του 1 που είναι περιττός.

4.

Αφού όταν διαιρείται με το 7 αφήνει υπόλοιπο 4 σημαίνει ότι υπάρχει ακέραιος k έτσι ώστε n=7k+4.

Πολλαπλασιάζουμε με το 3 και έχουμε: 3n=21k+12 από όπου έχουμε ότι:

3n=7(3k+1)+5

Επομένως, το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι 5.

5.

2^k ακολουθίες υπάρχουν συνολικά. Όταν περιορίζουμε το πρόβλημα σύμφωνα με την εκφώνηση τότε υπάρχουν 2^{k-2} επί δύο όμως μιας και οι θέσεις μπορεί να είναι 1 – 0 ή 0 – 1. Άρα συνολικά θα είναι 2^{k-1}.

6.

Δεν είναι. Πράγματι, αν ορίσουμε το κατηγόρημα $P(x)$ ως «το x είναι θετικός» και $Q(x)$ ως «το x είναι αρνητικός» και ο τομέας αναφοράς είναι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί τότε η πρώτη πρόταση είναι ψευδής αφού λέει ότι είτε όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι θετικοί είτε αρνητικοί. Η δεύτερη πρόταση όμως είναι αληθής αφού λέει ότι κάθε αριθμός είναι θετικός ή αρνητικός. (μπορεί να δοθεί οποιοδήποτε αντιπαράδειγμα τέτοιου τύπου).

7.

$$\frac{1}{k^2+2k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}$$

Άρα (τηλεσκοπική σειρά):

$$\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k^2+2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)+\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{52}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{51}-\frac{1}{52}\right)$$

8.

1. $\binom{26}{6}$ (συνδυασμοί 6 καρτών από 26 μαύρες αφού δεν μας ενδιαφέρει η σειρά)
2. Κανόνας αθροίσματος για κάθε χρώμα. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα από το προηγούμενο ερώτημα η απάντηση είναι $2\times\binom{26}{6}$
3. $P(26,5)=\frac{26!}{21!}$ αφού έχουμε μία 5 μετάθεση από ένα 26 σύνολο.
4. Από κανόνα γινομένου: $4\times\binom{4}{2}\times\binom{4}{3}=4\times 6\times 4=96$ (η σειρά στο γινόμενο αντιστοιχεί σε ντάμα, βαλέ και ρήγα)
5. Έστω A το σύνολο των σπαθιών και έστω B το σύνολο των 10. Τότε θέλουμε: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=13+4-1=16$ (από εγκλεισμό-αποκλεισμό)
6. Επιλέγουμε την τετράδα με 13 τρόπους και το άλλο φύλλο μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα 48. Άρα 48×13.
7. Θα χρησιμοποιήσουμε κανόνα αθροίσματος για κάθε τύπο. Έπειτα έχουμε συνδυασμούς 5 φύλλων από κάθε τύπο. Άρα η απάντηση είναι: $4\times\binom{13}{5}$. (το πόκερ αυτό είναι flush)
8. Σε κάθε τύπο αυτές οι πεντάδες είναι 13-5+1=9. Αφού έχουμε 4 τύπους σημαίνει ότι έχουμε συνολικά $4\times 9=36$ διαφορετικές πεντάδες. (στο πόκερ αυτό είναι straight flush)
9. Από την αρχή των περιστερώνων θα πρέπει να επιλέξουμε τουλάχιστον 50 φύλλα.
10. Από τη γενικευμένη αρχή των περιστερώνων πρέπει να επιλέξουμε τουλάχιστον 27 φύλλα.

9.

Έστω μία ομάδα $2n$ ατόμων που αποτελούνται από n κορίτσια και n αγόρια. Το δεξιό μέρος υπολογίζει το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε μία ομάδα n ατόμων από αυτή την ομάδα των $2n$ αγοριών και κοριτσιών χωρίς κανένα άλλον περιορισμό. Το δεξιό μέλος θα το γράψουμε λίγο διαφορετικά ως εξής:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

Σε αυτή τη μορφή φαίνεται ξεκάθαρα ότι προσπαθούμε να υπολογίσουμε όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να φτιάξουμε μία ομάδα n ατόμων έτσι ώστε να έχουμε n αγόρια και 0 κορίτσια, ή $n-1$ αγόρια και 1 κορίτσι, ή …, ή 1 αγόρι και $n-1$ κορίτσια ή 0 αγόρια και n κορίτσια, Προφανώς αυτό είναι όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να φτιάξουμε μία ομάδα n ατόμων χωρίς περιορισμούς που είναι ίδια με το δεξιό μέλος.

10.

Υποθέτουμε πως όχι. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι υπάρχει ακέραιος a και πρώτος αριθμός p ώστε $p\mid a$ και $p\mid(a+1)$. Τότε, από τον ορισμό της διαιρετότητας, υπάρχουν ακέραιοι r και s ώστε $a=pr$ και $a+1=ps$. Συνεπάγεται ότι:

$$1=(a+1)-a=ps-pr=p(s-r)$$

Αφού $p(s-r)=1$ και προφανώς το $s-r$ είναι ακέραιος σημαίνει ότι ο $p\mid 1$. Όμως, οι μόνοι ακέραιοι διαιρέτες του 1 είναι το 1 και -1. Αφού ο p είναι πρώτος ισχύει ότι $p>1$ ενώ από το παραπάνω θα πρέπει να ισχύει ότι $p=1$ ή $p=-1$. Άτοπο. Άρα ισχύει η υπόθεση.