1. (25%) Να δείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: για κάθε σύνολο A και για κάθε σύνολο B ισχύει ότι $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$.

Επίσης, να δείξετε αν το αντίστροφο είναι αληθές. Δηλαδή, να δείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: για κάθε σύνολο A και κάθε σύνολο B ισχύει ότι $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$. Με $P(A)$ αναπαριστούμε το δυναμοσύνολο του συνόλου A.

2. (35%) Έστω ότι Α είναι το σύνολο όλων των σημείων στο επίπεδο χωρίς το σημείο (0,0). Δηλαδή, Α={(x,y) | x,y∈R} – {(0,0)}. Ορίζουμε την σχέση T στο Α:
(a,b) T (c,d): τα σημεία (a,b) και (c,d) βρίσκονται στην ίδια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Σας ζητούνται τα εξής:
α) Να δείξετε ότι η T είναι σχέση ισοδυναμίας.
β) Να περιγράψετε τις αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας.
γ) Αν το σύνολο Α περιέχει και το σημείο (0,0) (δηλαδή είναι όλο το επίπεδο) τότε η T είναι σχέση ισοδυναμίας (με αιτιολόγηση);

3. (40%) α) Να αποδείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: Αν $c \equiv a \ (mod\ r)$ και $c \equiv b \ (mod\ s)$ τότε $a \equiv b \ \big(mod\ MK\Delta(r,s)\big)$.

β) Να αποδείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: Για κάθε ακέραιο n, αν το 7 διαιρεί το $n^2 - 4$ τότε διαιρεί και το $n - 2$.

γ) Να αποδείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: Για κάθε ακέραιο n, αν το 7 διαιρεί το $n - 2$ τότε θα διαιρεί και το $n^2 - 4$.

δ) Να αποδείξετε με επαγωγή ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών διαιρείται από το 6

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1.

Η πρόταση $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$ είναι αληθής. Πράγματι, αν ένα σύνολο $S \in P(A) \cup P(B)$ σημαίνει ότι είτε $S \subseteq A$ ή $S \subseteq B$. Αυτό σημαίνει απευθείας ότι $S \subseteq A \cup B$ και άρα από τον ορισμό του δυναμοσυνόλου προκύπτει ότι $S \in P(A \cup B)$. Επομένως, ισχύει ότι $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αυτό θα το δείξουμε με αντιπαράδειγμα: έστω A={1,2}, B={2,3} και S={1,3}. Τότε, προφανώς $S \subseteq A \cup B$ και άρα $S \in P(A \cup B)$. Όμως, το S δεν είναι υποσύνολο ούτε του A ούτε και του B και άρα δεν ανήκει στην ένωση των αντίστοιχων δυναμοσυνόλων.

2.

α) Αρκεί να δείξουμε ότι η σχέση είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Η T είναι ανακλαστική: Πράγματι το (a,b) κείται στην ίδια ευθεία με τον εαυτό του, δηλαδή στην ευθεία y=bx/a (αν a≠0) ή στην ευθεία x=0 αν a=0.

Η T είναι συμμετρική: αν τα σημεία (a,b) και (c,d) κείνται στην ίδια ευθεία διαμέσου της αρχής των αξόνων τότε και το (c,d) και το (a,b) κείνται στην ίδια ευθεία. Δηλαδή, (a,b) T (c,d) → (c,d) T (a,b).

Η T είναι μεταβατική: έστω ότι τα σημεία (a,b) και (c,d) κείνται στην ίδια ευθεία L διαμέσου της αρχής των αξόνων και έστω ότι τα σημεία (c,d) και (e,f) κείνται και αυτά στην ίδια M ευθεία διαμέσου της αρχής των αξόνων. Οι ευθείες L και M περιέχουν και οι δύο τα διαφορετικά σημεία (0,0) και (c,d). Άρα η ευθεία L συμπίπτει με την ευθεία M και αυτή η ευθεία περιέχει και τα σημεία (a,b) και (e,f). Άρα τα σημεία (a,b) και (e.f) ανήκουν στην ίδια ευθεία και άρα είναι μεταβατική.

β) Κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι ένα υποσύνολο σημείων του A πάνω σε μία ευθεία της μορφής y=mx ή της κάθετης ευθείας x=0.

γ) Σε αυτή την περίπτωση η T δεν είναι σχέση ισοδυναμίας μιας και η ιδιότητα της μεταβατικότητας δεν ικανοποιείται. Ως αντιπαράδειγμα, ενώ (1,2) T (0,0) και (0,0) T (2,2) δεν ισχύει (1,2) T (2,2) μιας και αυτή η ευθεία για τα σημεία (1,2) και (2,2) δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3.

α) Υπάρχουν ακέραιοι n και m έτσι ώστε (από τον ορισμό του mod) $c - a = nr$ και $c - b = ms$. Άρα, αφαιρώντας την $1^{η}$ από τη δεύτερη κατά μέλη έχουμε:

$$c - b - (c - a) = ms - nr \Rightarrow a - b = ms - nr$$

Αφού ο $ΜΚΔ(r, s)$ διαιρεί τόσο το r όσο και το s θα διαιρεί και οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό τους. Άρα θα διαιρεί και την ποσότητα $ms - nr$ και άρα θα διαιρεί την ποσότητα $a - b$. Αυτό σημαίνει ότι $a \equiv b \left(mod\ ΜΚΔ(r, s)\right)$ και άρα αποδείχτηκε ότι η σχέση ισχύει.

β) Δεν ισχύει. Αφού $n^2 - 4 = (n - 2)(n + 2)$ και αφού το 7 διαιρεί το $n^2 - 4$ θα διαιρεί και κάποιο (ή και τα δύο) εκ των $n - 2$ και $n + 2$. Αρκεί να βρούμε n ώστε να διαιρείται το $n + 2$ και τότε προφανώς δεν θα διαιρείται το $n - 2$. Επιλέγοντας n=5 έχουμε ότι 7 | 21 αλλά 7 ∤ 3.

γ) Ισχύει. Πράγματι, αν το 7 διαιρεί το $n - 2$ τότε διαιρεί και οποιοδήποτε πολλαπλάσιό του και άρα θα διαιρεί και το και το $(n - 2)(n + 2) = n^2 - 4$.

δ) Ορίζουμε την πρόταση: $P(n) = "\textit{το γινόμενο } n(n+1)(n+2) \textit{ διαιρείται από το } 6"$

Βάση: η $P(1)$ ισχύει αφού το $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ διαιρείται από το 6.

Έστω ότι ισχύει $P(n)$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και $P(n + 1)$. Έχουμε:

$$(n + 1)(n + 2)(n + 3) = (n + 1)(n + 2)n + (n + 1)(n + 2)3$$

Από επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι η ποσότητα $(n + 1)(n + 2)n$ διαιρείται από το 6. Η ποσότητα $3(n + 1)(n + 2)$ εμπεριέχει το γινόμενο δύο διαδοχικών αριθμών (του n+1 και του n+2) όπου αναγκαστικά ένας εκ των δύο θα είναι άρτιος. Άρα, υπάρχει k έτσι ώστε:

$$(n + 1)(n + 2) = 2k$$

Και άρα:

$$3(n + 1)(n + 2) = 6k$$

Επομένως, και η ποσότητα $3(n + 1)(n + 2)$ διαιρείται από το 6. Άρα και το $(n + 1)(n + 2)n + (n + 1)(n + 2)3$ διαιρείται από το 6 και άρα ισχύει $P(n + 1)$. Αποδείχτηκε.