<u>Κώδικας Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας</u>

<u>Δεν ενεργείτε ανήθικα αν:</u>

- συζητάτε όλο το υλικό του μαθήματος (βιβλία, διαφάνειες κτλ.) με άλλους φοιτητές
- συμβουλεύεστε τον καθηγητή
- συνεργάζεσθε με άλλους φοιτητές στα πλαίσια μίας γενικής συζήτησης σχετικά με την εργασία.

<u>Ενεργείτε ανήθικα αν:</u>

- χρησιμοποιείτε την εργασία άλλου φοιτητή και την παρουσιάζετε ως δικιά σας
- επιτρέψετε συνειδητά σε άλλο φοιτητή να παρουσιάσει την εργασία σας (ή κομμάτια της) ως δικιά του
- αντιγράψετε υλικό από άλλο φοιτητή ή άλλη πηγή (διαδίκτυο)
- συνεργασθείτε με άλλους στις εργασίες και δεν ενημερώσετε τον διδάσκοντα
- δεν αναφέρετε κάτι που γνωρίζετε και το οποίο χαρακτηρίζεται με βάση τα παραπάνω ως ακαδημαϊκά ανήθικο

Θα πρέπει να έχετε στον νου σας ότι ο στόχος της εργασίας είναι να σκεφτείτε κριτικά και να κατανοήσετε το αντίστοιχο μέρος της ύλης.

Σε περίπτωση που ο διδάσκων/βοηθός εντοπίσει περίπτωση αντιγραφής έχει το δικαίωμα να μηδενίσει τον φοιτητή στην εργασία ή και ακόμα στο βαθμό του μαθήματος για το ακαδημαϊκό έτος 2023-2024 ανάλογα με την έκταση της αντιγραφής.

Επειδή θα χρειαστεί να γράφετε μαθηματικά σύμβολα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον Equation Editor τόσο σε Microsoft Office όσο και σε Open Office. Γενικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε κειμενογράφο επιθυμείτε (σε latex είναι επίσης ευπρόσδεκτο).

Ασκήσεις Κατανόησης

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 30/12/2023

(Η υποβολή θα γίνει στο eclass.upatras.gr. Το αρχείο που θα υποβάλλετε θα είναι .pdf και δεν θα περιέχει σαρωμένες εικόνες. Στην 1η σελίδα θα πρέπει να γράφετε το όνομά σας και το ΑΕΜ σας)

Άσκηση 1 (35%)

Έστω ότι $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ και ορίζουμε τη σχέση S πάνω στο $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε $\big((a,b),(c,d)\big) \in S$ αν $2a - b = 2c - d$.

α) (15%) Να αποδείξετε ότι η σχέση S είναι σχέση ισοδυναμίας.

β) (5%) Να δώσετε μία συνολοθεωρητική περιγραφή της κλάσης ισοδυναμίας [(1,1)]. Να βρείτε δηλαδή μία δήλωση $P(x,y)$ έτσι ώστε $[(1,1)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : P(x,y)\}$.

γ) (5%) Να δώσετε μία συνολοθεωρητική περιγραφή της κλάσης ισοδυναμίας [(0,–1)]. Πώς σχετίζονται οι κλάσεις [(1,1)] και [(0,–1)];

δ) (5%) Να δώσετε μία συνολοθεωρητική περιγραφή της κλάσης ισοδυναμίας [(2,0)]. Πώς σχετίζονται οι κλάσεις [(1,1)] και [(2,0)];

ε) (5%) Είναι αυτή η σχέση μη-ανακλαστική; Είναι αυτή η σχέση αντισυμμετρική;

Άσκηση 2 (45%)

α) (20%) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν μη μηδενικοί ακέραιοι a και b έτσι ώστε $a^2 = 2b^2$. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής σχετικά με τη μοναδική παραγοντοποίηση ενός αριθμού σε πρώτους παράγοντες)

β) (10%) Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο a, b και c, αν $\gcd(a,b) = 1$ και $a \mid c$ και $b \mid c$ τότε $ab \mid c$.

γ) (10%) Να αποδείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: Για κάθε ακέραιο n, αν το 11 διαιρεί το $n^2 - 9$ τότε διαιρεί και το $n - 3$.

δ) (5%) Να αποδείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: Για κάθε ακέραιο n, αν το 11 διαιρεί το $n - 3$ τότε θα διαιρεί και το $n^2 - 9$.

Άσκηση 3 (20%))

α) Να υπολογίσετε προσεγγιστικά το άθροισμα: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt[4]{2i}$

β) Να υπολογίσετε ακριβώς το άθροισμα $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{j+2}\right)^{i}$

<u>Ενδεικτικές Λύσεις</u>

<u>Άσκηση 1</u>

α) Θα πρέπει να δείξουμε ότι η σχέση είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Ανακλαστική: Έστω $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Τότε ισχύει ότι $\big((a,b),(a,b)\big) \in S$ αφού $2a - b = 2a - b$. Άρα είναι ανακλαστική.

Συμμετρική: Έστω $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ και έστω ότι $\big((a,b),(c,d)\big) \in S$. Άρα από τον ορισμό της σχέσης προκύπτει ότι $2a - b = 2c - d$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το να γράψουμε $2c - d = 2a - b$ το οποίο σημαίνει ότι $\big((c,d),(a,b)\big) \in S$. Άρα η σχέση είναι συμμετρική.

Μεταβατική: Έστω $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$ και έστω ότι $\big((a,b),(c,d)\big) \in S$ και $\big((c,d),(e,f)\big) \in S$. Άρα:

$$2a - b = 2c - d$$

και

$$2c - d = 2e - f$$

Από την μεταβατικότητα της ισότητας προκύπτει ότι $2a - b = 2e - f$ και άρα$\big((a,b),(e,f)\big) \in S$. Άρα αποδείχτηκε ότι είναι μεταβατική.

β) Η κλάση ισοδυναμίας [(1,1)] περιέχει όλα εκείνα τα σημεία (x,y) έτσι ώστε $2 \cdot 1 - 1 = 2x - y \Rightarrow y = 2x - 1$. Άρα η κλάση ισοδυναμίας [(1,1)] περιέχει όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω σε αυτή την ευθεία. Άρα:

$$[(1{,}1)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 2x - 1\}$$

γ) Η κλάση ισοδυναμίας [(0,–1)] περιέχει όλα εκείνα τα σημεία (x,y) έτσι ώστε $2 \cdot 0 - (-1) = 2x - y \Rightarrow y = 2x - 1$. Άρα:

$$[(0,-1)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 2x - 1\}$$

Παρατηρούμε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας [(1,1)] και [(0,–1)] ταυτίζονται. Άρα και τα δύο σημεία ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.

δ) Η κλάση ισοδυναμίας [(2,0)] περιέχει όλα εκείνα τα σημεία (x,y) έτσι ώστε $2 \cdot 2 - 0 = 2x - y \Rightarrow y = 2x - 4$. Άρα:

$$[(2{,}0)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 2x - 4\}$$

Παρατηρούμε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας [(1,1)] και [(2,0)] αντιστοιχούν σε σύνολα σημείων που περιγράφονται από δύο παράλληλες ευθείες.

ε) Μη-ανακλαστική: Αφού είναι ανακλαστική δεν μπορεί ταυτόχρονα να είναι και μη-ανακλαστική. Άρα δεν είναι μη-ανακλαστική.

Αντισυμμετρική: Αφού είναι συμμετρική και ξέρουμε ότι $\big((1,1),(0,-1)\big) \in S$ συνεπάγεται ότι και $\big((0,-1),(1,1)\big) \in S$. Όμως $(1,1) \neq (0,-1)$ και άρα δεν είναι αντισυμμετρική.

Άσκηση 2

α) Έστω ότι $a^2 = 2b^2$ και έστω ότι $a = p_1 \dots p_t$ και $b = q_1 \dots q_s$ οι πρώτες παραγοντοποιήσεις των a και b αντίστοιχα. Τότε:

$$a^2 = p_1 \dots p_t p_1 \dots p_t = p_1^2 \dots p_t^2$$

$$b^2 = q_1 \dots q_s q_1 \dots q_s = q_1^2 \dots q_s^2$$

Άρα από την αρχική σχέση παίρνουμε ότι:

$$p_1^2 \dots p_t^2 = 2q_1^2 \dots q_s^2$$

Στην αριστερή πλευρά έχουμε συνολικά $2t$ πρώτους, δηλαδή άρτιο πλήθος πρώτων για την παραγοντοποίηση του a^2. Στην δεξιά πλευρά έχουμε $2s+1$ πρώτους, δηλαδή περιττό πλήθος πρώτων στην παραγοντοποίηση του $2b^2$. Από το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής ξέρουμε ότι θα πρέπει να υπάρχει μόνο μία παραγοντοποίηση και άρα θα πρέπει $2s+1=2t$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού δεν μπορεί ένα περιττός να είναι ίσος με έναν άρτιο. Άρα δεν μπορεί να ισχύει η σχέση $a^2 = 2b^2$.

Εναλλακτικά: με δεδομένο ότι αν θέλετε ακολουθείτε την υπόδειξη, η απόδειξη μπορεί να γίνει εξίσου σωστά βασιζόμενοι στην απόδειξη ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.

β) Αφού $\gcd(a,b) = 1$ συνεπάγεται ότι υπάρχουν ακέραιοι s και t έτσι ώστε $as + bt = 1$ (1). Επίσης από τη διαιρετότητα προκύπτει ότι υπάρχουν ακέραιοι u και v έτσι ώστε $c = ua = vb$. Από την (1) και τις τελευταίες ισότητες έχουμε:

$$c = asc + btc = asvb + btua = ab(sv + ua)$$

το οποίο σημαίνει ότι $ab \mid c$.

γ) Δεν ισχύει. Αφού $n^2 - 4 = (n-2)(n+2)$ και αφού το 7 διαιρεί το $n^2 - 4$ θα διαιρεί και κάποιο (ή και τα δύο) εκ των $n-2$ και $n+2$. Αρκεί να βρούμε n ώστε να διαιρείται το $n+2$ και τότε προφανώς δεν θα διαιρείται το $n-2$. Επιλέγοντας n=5 έχουμε ότι $7 \mid 21$ αλλά $7 \nmid 3$.

δ) Ισχύει. Πράγματι, αν το 7 διαιρεί το $n-2$ τότε διαιρεί και οποιοδήποτε πολλαπλάσιό του και άρα θα διαιρεί και το και το $(n-2)(n+2) = n^2 - 4$.

Άσκηση 3

α) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της ολοκλήρωσης: Έστω $f(x)=\sqrt[4]{2x}$, η οποία είναι αύξουσα συνάρτηση. Ισχύει ότι:

$$\int_0^n \sqrt[4]{2}x^{\frac{1}{4}}\,dx \leq \sum_{i=1}^{n}\sqrt[4]{2i} \leq \int_1^{n+1} \sqrt[4]{2}x^{\frac{1}{4}}\,dx$$

Ισχύει ότι:

$$\int_0^n x^{\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}\Big|_0^n = \frac{4}{5}n^{\frac{5}{4}}$$

$$\int_1^{n+1} x^{\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}\Big|_1^{n+1} = \frac{4}{5}(n+1)^{\frac{5}{4}} - \frac{4}{5}$$

Άρα:

$$\frac{4\sqrt[4]{2}}{5}n^{\frac{5}{4}} \leq \sum_{i=1}^{n}\sqrt[4]{2i} \leq \frac{4\sqrt[4]{2}}{5}\left((n+1)^{\frac{5}{4}}-1\right)$$

β)

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{j+2}\right)^i = \lim_{m\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{j}{j+2}\right)^i$$

Τώρα στο εσωτερικό άθροισμα έχουμε άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου. Άρα:

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{j}{j+2}\right)^i = \lim_{m\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1-\left(\frac{j}{j+2}\right)^{m+1}}{1-\frac{j}{j+2}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1-\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{j}{j+2}\right)^{m+1}}{1-\frac{j}{j+2}}$$

και αφού $\frac{j}{j+2}<1$ έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1-\lim_{m\to+\infty}\left(\frac{j}{j+2}\right)^{m+1}}{1-\frac{j}{j+2}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{j+2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j + \sum_{j=1}^{n}1 = \frac{n(n+1)}{4}+n$$