Κώδικας Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας

Δεν ενεργείτε ανήθικα αν:

- συζητάτε όλο το υλικό του μαθήματος (βιβλία, διαφάνειες κτλ.) με άλλους φοιτητές
- συμβουλεύεστε τον καθηγητή ή τον βοηθό μαθήματος
- συνεργάζεσθε με άλλους φοιτητές στα πλαίσια μίας γενικής συζήτησης σχετικά με την εργασία.

Ενεργείτε ανήθικα αν:

- χρησιμοποιείτε την εργασία άλλου φοιτητή και την παρουσιάζετε ως δικιά σας
- επιτρέψετε συνειδητά σε άλλο φοιτητή να παρουσιάσει την εργασία σας (ή κομμάτια της) ως δικιά του
- αντιγράψετε υλικό από άλλο φοιτητή ή άλλη πηγή (διαδίκτυο)
- συνεργασθείτε με άλλους στις εργασίες και δεν ενημερώσετε τον διδάσκοντα
- δεν αναφέρετε κάτι που γνωρίζετε και το οποίο χαρακτηρίζεται με βάση τα παραπάνω ως ακαδημαϊκά ανήθικο

Θα πρέπει να έχετε στον νου σας ότι ο στόχος της εργασίας είναι να σκεφτείτε κριτικά και να κατανοήσετε το αντίστοιχο μέρος της ύλης.

Σε περίπτωση που ο διδάσκων/βοηθός εντοπίσει περίπτωση αντιγραφής έχει το δικαίωμα να μηδενίσει τον φοιτητή στην εργασία ή και ακόμα στο βαθμό του μαθήματος για το ακαδημαϊκό έτος 2022-2023 ανάλογα με την έκταση της αντιγραφής.

Ασκήσεις Κατανόησης

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 30/10/2022

(Η υποβολή θα γίνει στο elearning.auth.gr. Το αρχείο που θα υποβάλλετε θα είναι .pdf και δεν θα περιέχει σαρωμένες εικόνες.)

1. (25%) Κατά τη διάρκεια μίας έρευνας για ένα έγκλημα ο αστυνόμος έχει μαζέψει τα εξής στοιχεία:

1. Αν το μαχαίρι είναι στην αποθήκη, τότε το είδαμε όταν ελέγχαμε την αποθήκη.
2. Ο φόνος έγινε στην πυλωτή ή στο διαμέρισμα.
3. Αν ο φόνος έγινε στην πυλωτή τότε το μαχαίρι είναι μέσα στον μπλε κάδο.
4. Δεν είδαμε μαχαίρι όταν ελέγχαμε την αποθήκη.
5. Αν ο φόνος έγινε εκτός κτιρίου τότε δεν μπορούμε να βρούμε το μαχαίρι.
6. Αν ο φόνος έγινε στο διαμέρισμα τότε το μαχαίρι είναι στην αποθήκη.

Η ερώτηση που πρέπει να απαντήσετε είναι «που βρίσκεται το μαχαίρι;». Χρησιμοποιήστε προτασιακή λογική για να απαντήσετε την ερώτηση (αντικαταστήστε τις παραπάνω προτάσεις σε φυσική γλώσσα με (σύνθετες) λογικές προτάσεις πάνω σε σύμβολα που αντιστοιχούν σε θεμελιώδεις λογικές προτάσεις και χρησιμοποιώντας κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων να απαντήσετε την ερώτηση).

2. (30%) Έστω οι παρακάτω προτάσεις όπου P είναι ένα διμελές κατηγόρημα, f είναι μία μονομελής συνάρτηση και c είναι μία σταθερά:

1. $\exists x \exists y \exists z\, [P(x,z) \wedge P(z,y)]$
2. $\forall x \forall y \exists z\, [P(x,z) \wedge P(z,y)]$
3. $\forall x \forall y\, [(P(x,c) \wedge P(c,y)) \rightarrow (x=c \vee y=c)]$
4. $\forall x \forall y\, [(P(x,c) \wedge P(c,y)) \rightarrow P(x,y)]$
5. $\exists x (f(x)=c)$

Εξετάστε αν οι παραπάνω προτάσεις είναι αληθείς η ψευδείς σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Στο σύνολο των φυσικών αριθμών N, όπου το $P(x,y)$ σημαίνει $x < y$, το $f(x)$ δίνει τον επόμενο του x ($f(x) = x + 1$) και η σταθερά c είναι ίση με 7.

β) Στο διμελές σύνολο $\{0,1\}$, όπου το $P(x,y)$ σημαίνει $x \leq y$, $f(x) = 1 - x$ και $c = 0$.

γ) Στην περίπτωση μίας οικογένειας που αποτελείται από τους δύο γονείς Γιώργο και Δήμητρα και τα τρία τους παιδιά Κώστα, Μαρία και Ελένη. Ως τομέα αναφοράς θεωρούμε το σύνολο των μελών της οικογένειας {**Γιώργος**, **Δήμητρα**, **Κώστας**, **Μαρία**, **Ελένη**} ενώ το $P(x,y)$ σημαίνει ότι οι x,y είναι αδέρφια (θεωρείστε ότι κανένας δεν μπορεί να είναι αδερφός του εαυτού του), το f(x) δίνει τον πατέρα του x αν ο x είναι παιδί και τον σύζυγο του x αν ο x είναι γονέας, και η σταθερά c έχει την τιμή **Κώστας**.

(Υπόδειξη: Θα ήταν καλό σε κάθε περίπτωση να προσπαθείτε να καταλάβετε διαισθητικά τι σημαίνουν οι προτάσεις και θα δείτε ότι είναι εύκολη η εύρεση της τιμής αληθείας τους.)

3. (45%) Να κάνετε τις εξής αποδείξεις:

(α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{6}$ είναι άρρητος (θεωρείστε ως δεδομένο ότι αν ο a^2 είναι άρτιος τότε και ο a είναι επίσης άρτιος).

(β) Να αποδείξετε ότι για όλους τους μη αρνητικούς αριθμούς a, b και c, αν $a^2 + b^2 = c^2$ τότε $a + b \geq c$ με δύο τρόπους: α) με αντίφαση και β) με άμεση απόδειξη.

(γ) Να αποδείξετε ότι οι εξής δηλώσεις είναι ισοδύναμες: (1) ο $n - 5$ είναι περιττός, (2) ο $3n + 2$ είναι άρτιος και (3) ο $n^2 - 1$ είναι περιττός. (υπόδειξη: θεωρείστε ως δεδομένο ότι αν το γινόμενο xy είναι άρτιος τότε τουλάχιστον ένας αριθμός εκ των x και y αναγκαστικά θα πρέπει να είναι άρτιος)

δ) Να αποδείξετε την Ανισότητα του Bernouilli με μαθηματική επαγωγή:

Αν $x \geq -1$ τότε $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, για όλους τους φυσικούς αριθμούς n.

<u>ΛΥΣΗ</u>

1.
Έστω οι εξής προτάσεις:
s: «το μαχαίρι είναι στην αποθήκη»
c: «είδαμε το μαχαίρι όταν ελέγχαμε την αποθήκη»
b: «ο φόνος έγινε στην πυλωτή»
a: «ο φόνος έγινε στο διαμέρισμα»
y: «το μαχαίρι είναι μέσα στον μπλε κάδο»
o: ο φόνος έγινε εκτός του κτιρίου»
u: «δεν μπορούμε να βρούμε το μαχαίρι»

Επομένως, η κάθε μία από τις παραπάνω προτάσεις γράφεται ως εξής:

1. $s \to c$
2. $b \vee a$
3. $b \to y$
4. $\neg c$
5. $o \to u$
6. $a \to s$

Από τα παραπάνω βγάζουμε το εξής συμπέρασμα:

7. Από 1 και 4 και modus tollens προκύπτει $\neg s$
8. Από 6 και και 7 και modus tollens προκύπτει ότι $\neg a$
9. Από 2 και 8 προκύπτει b αφού από 8 το a είναι ψευδές
10. Από 3 και 9 και modus ponens προκύπτει y

Από 10 λοιπόν βγάζουμε το συμπέρασμα ότι το μαχαίρι είναι μέσα στον μπλε κάδο.

2.

(α) (1) Η πρόταση $\exists x \exists y \exists z\ [P(x,z) \wedge P(z,y)]$ είναι αληθής στους φυσικούς, μιας και υπάρχουν άπειρες τριάδες αριθμών για τις οποίες ισχύει $x<z$ και $z<y$.

(2) Η πρόταση $\forall x \forall y \exists z\ [P(x,z) \wedge P(z,y)]$ δηλώνει (στους φυσικούς αριθμούς) πως, για οποιοδήποτε ζεύγος αριθμών, υπάρχει αριθμός αυστηρά ανάμεσα τους (ως προς τη διάταξη <). Φυσικά η πρόταση είναι ψευδής. Αντιπαράδειγμα: $x = 10$ και $y = 11$, ενώ προφανώς δεν υπάρχει z τέτοιο ώστε $10<z$ και $z<11$.

(3) Η πρόταση $\forall x \forall y [P(x,c) \wedge P(c,y) \to (x=c) \vee (y=c)]$ δηλώνει (ουσιαστικά) πως, δεν υπάρχουν δύο διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί που να βρίσκονται εκατέρωθεν του 7 (ως προς τη διάταξη <). Φυσικά η πρόταση είναι ψευδής. Υπάρχουν άπειρα τέτοια ζεύγη, π.χ. (3,987) (αντιπαράδειγμα).

(4) Η πρόταση $\forall x \forall y\ [P(x,c) \wedge P(c,y) \to P(x,y)]$ είναι αληθής στους φυσικούς και αποτελεί ειδική περίπτωση της μεταβατικότητας της σχέσης <.

(5) $\exists x (f(x)=c)$: αληθεύει καθώς ισχύει για $x = 6$: $f(6) = 7 = c$

(β) (1) Η πρόταση $\exists x \exists y \exists z\ [P(x,z) \wedge P(z,y)]$ είναι αληθής, ισχύει π.χ. για $x=y=z=0$.

(2) Η πρόταση $\forall x \forall y \exists z\ [P(x,z) \wedge P(z,y)]$ είναι ψευδής. Δεν αληθεύει π.χ. για αποτίμηση που θέτει $x=1$ και $y=0$, καθώς δεν υπάρχει $z \in \{0,1\}$ τέτοιο ώστε $1 \leq z \wedge z \leq 0$.

(3) Η πρόταση είναι αληθής και αρκεί να αναλύσουμε τον ποσοδείκτη ∀x (το c=0 είναι πάντοτε μικρότερο ή ίσο του y για το συγκεκριμένο τομέα αναφοράς): αν x=0, τότε αληθεύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής, ενώ αν x=1, είναι ψευδής η υπόθεση της. Σε κάθε περίπτωση δηλαδή (θυμηθείτε τον πίνακα αληθείας της συνεπαγωγής και το γεγονός ότι το σύμπαν μας είναι διμελές) η πρόταση αληθεύει.

(4) Η πρόταση αληθεύει για τους ίδιους λόγους όπως στο (α) (λόγω μεταβατικότητας).

(5) ∃x(f(x)=c): αληθεύει καθώς ισχύει για αποτίμηση x=1.

(γ) **(1)** Η πρόταση ∃x∃y∃z [P(x,z)∧P(z,y)] είναι αληθής, καθώς οι μεταβλητές x,y,z μπορούν να αντιστοιχούν στα τρία παιδία της οικογενείας, που είναι αδέλφια.

(2) Οι δύο καθολικοί ποσοδείκτες μπροστά στην πρόταση ∀x∀y∃z [P(x,z)∧P(z,y)], επιβάλλουν (σε περίπτωση που η πρόταση είναι αληθής) στον τομέα αναφοράς να αποτελείται μόνο από αδέλφια. Διαφορετικά, η πρόταση είναι ψευδής (καθώς $\neg\exists z\left(P(x,z)\right)$). Πράγματι, αν x=Γιώργος και y=Μαρία, τότε δεν υπάρχει z έτσι ώστε ο z να είναι αδερφός του x σε αυτό τον τομέα αναφοράς.

(3) Με δεδομένο ότι κάποιος δεν μπορεί να είναι αδερφός του εαυτού του αν η υπόθεση είναι αληθής τότε το συμπέρασμα δεν μπορεί να είναι ποτέ αληθές γιατί προϋποθέτει ότι κάποιος είναι αδερφός του εαυτού του. Επομένως, η μόνη περίπτωση να ισχύει είναι αν η υπόθεση είναι πάντα ψευδής. Αυτό όμως δεν ισχύει αφού αν x=Μαρία και y=Ελένη τότε η υπόθεση ισχύει. Άρα είναι ψευδής η πρόταση.

(4) Με δεδομένο ότι δεν μπορεί ένας να είναι αδερφός του εαυτού του όπως αναφέρεται στην εκφώνηση η πρόταση είναι ψευδής αφού για x=y=Μαρία ισχύει η υπόθεση αλλά το συμπέρασμα είναι ψευδές.

(5) ∃x(f(x)=c): η πρόταση δεν αληθεύει, καθώς δεν υπάρχει στον τομέα αναφοράς ούτε κάποιος με πατέρα τον Κώστα ούτε υπάρχει η σύζυγος του Κώστα.

3.

(α) Θα το αποδείξουμε με αντίφαση. Έστω ότι $\sqrt{6}$ ρητός. Άρα γράφεται ως κλάσμα δύο ακέραιων αριθμών που είναι πρώτοι μεταξύ τους. Δηλαδή:

$$\sqrt{6} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \sqrt{6}b \Rightarrow a^2 = 6b^2 \Rightarrow a^2 = 2\ (3b^2)$$

Άρα ο a^2 είναι άρτιος, που σημαίνει ότι και ο a είναι επίσης άρτιος από την εκφώνηση. Επομένως $a = 2k$, για κάποιον ακέραιο k και άρα από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$(2k)^2 = 2\ (3b^2) \Rightarrow 2k^2 = 3b^2$$

από όπου προκύπτει ότι και ο $3b^2$ είναι άρτιος αριθμός. Αφού όμως το 3 είναι περιττός αριθμός προκύπτει ότι ο b^2 θα πρέπει να είναι άρτιος. Άρα και ο b θα είναι άρτιος. Αφού a και b άρτιοι, σημαίνει ότι και οι δύο διαιρούνται από το 2 που είναι άτοπο όμως αφού υποθέσαμε ότι οι αριθμοί είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους.

(β) <u>Αντίφαση</u>: Έστω ότι $a^2 + b^2 = c^2$ και $a + b < c$. Τότε τετραγωνίζοντας την ανισότητα και με δεδομένο ότι όλες οι ποσότητες είναι μη αρνητικοί αριθμοί έχουμε:

$$(a + b)^2 < c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab < c^2$$

Αφού το $2ab$ είναι θετική ποσότητα προκύπτει ότι:

$$a^2 + b^2 < c^2$$

που είναι άτοπο όμως λόγω της ισότητας. Άρα το θεώρημα ισχύει.

<u>Άμεση απόδειξη:</u>

Έστω ότι $a^2 + b^2 = c^2$. Αφού $2ab$ είναι μη αρνητική ποσότητα προκύπτει ότι

$$a^2 + b^2 + 2ab \geq c^2 \Rightarrow (a + b)^2 \geq c^2$$

και αφού όλοι οι αριθμοί είναι μη αρνητικοί προκύπτει ότι

$$a + b \geq c$$

Αποδείχτηκε. (Προσέξετε ότι η αντίφαση με οδήγησε στο πώς να κάνουμε εύκολα την άμεση απόδειξη χειριζόμενοι την ποσότητα $2ab$)

(γ) Θα αποδείξουμε τις εξής συνεπαγωγές: $(1) \rightarrow (2)$, $(2) \rightarrow (3)$ και $(3) \rightarrow (1)$. Από αυτές λόγω μεταβατικότητας προκύπτουν και οι συνεπαγωγές $(1) \rightarrow (3)$ (από την $(1) \rightarrow (2)$, $(2) \rightarrow (3)$) και αντίστοιχα οι $(2) \rightarrow (1)$ και $(3) \rightarrow (2)$.

$(1) \rightarrow (2)$: Έστω ότι ο $n - 5$ είναι περιττός. Θα χρησιμοποιήσουμε άμεση απόδειξη. Προκύπτει ότι υπάρχει ακέραιος k έτσι ώστε: $n - 5 = 2k + 1 \Rightarrow n = 2k + 6$. Αντικαθιστώντας στην $3n + 2$, προκύπτει ότι:

$$3n + 2 = 3(2k + 6) + 2 = 2(3k + 3) + 2 = 2(3k + 4)$$

το οποίο είναι άρτιος αριθμός. Αποδείχτηκε.

$(2) \rightarrow (3)$: Θα χρησιμοποιήσουμε έμμεση απόδειξη. Θα δείξουμε ότι αν ο $n^2 - 1$ είναι άρτιος τότε ο $3n + 2$ είναι περιττός. Έχουμε ότι $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. Αφού $n^2 - 1$ είναι άρτιος τουλάχιστον ένας εκ των δύο αριθμών $n - 1$ και $n + 1$ θα είναι επίσης άρτιος. Όμως, αυτοί οι αριθμοί διαφέρουν κατά 2 και άρα αν ο ένας είναι άρτιος θα είναι και ο άλλος και μάλιστα θα είναι διαδοχικοί άρτιοι. Επομένως, ο αριθμός n θα είναι περιττός, αφού μεταξύ δύο διαδοχικών άρτιων παρεμβάλλεται ένας περιττός. Άρα, για κάποιον ακέραιο k μπορούμε να γράψουμε: $n = 2k + 1$ από όπου έχουμε:

$$3n + 2 = 3(2k + 1) + 2 = 6k + 3 + 2 = 6k + 4 + 1 = 2(3k + 2) + 1$$

και αν θέσουμε $m = 3k + 2$ σημαίνει ότι $3n + 2 = 2m + 1$ που σημαίνει ότι ο $3n + 2$ είναι περιττός και άρα αποδείξαμε το ζητούμενο.

(3) → (1): Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι έμμεση απόδειξη. Θα δείξουμε δηλαδή ότι αν ο $n-5$ είναι άρτιος τότε και ο n^2-1 είναι επίσης άρτιος. Αφού ο $n-5$ είναι άρτιος τότε για κάποιον ακέραιο k μπορούμε να γράψουμε:

$$n-5=2k \Rightarrow n=2k-5$$

Αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε:

$$n^2-1=(2k-5)^2-1=4k^2+5^2-20k-1=4k^2-20k+24=2(2k^2-10k+12)$$

από το οποίο προκύπτει ότι ο n^2-1 είναι άρτιος και άρα αποδείχτηκε το ζητούμενο.

δ) Έστω η πρόταση (με όλους τους περιορισμούς που τίθενται από την εκφώνηση):

$$P(n): (1+x)^n \geq 1+nx$$

Βάση: $P(1)=(1+x)^1=1+x=1+1\cdot x$ που είναι το ζητούμενο.

Έστω ότι η πρόταση $P(k)$ είναι αληθής. Θα αποδείξουμε ότι και η $P(k+1)$ είναι αληθής.

$$P(k+1)=(1+x)^{k+1}=(1+x)^k\cdot(1+x)$$

$$\text{από επαγωγική υπόθεση} \geq (1+kx)\cdot(1+x)=1+(k+1)x+kx^2$$

αφού $x\geq -1$ συνεπάγεται ότι ο όρος kx^2 θα είναι πάντα θετικός δεδομένου ότι το k είναι φυσικός αριθμός. Άρα:

$$1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

και άρα αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Επομένως, από επαγωγή η πρόταση $P(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό *n*.