

## 1. Σχέσεις (1.7.26)

Δίνεται  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ . Έστω η σχέση  $R$ : «ο  $a$  διαιρεί τον  $\beta$ », ( $\alpha, \beta \in A$ ).

1. Να γραφεί η σχέση σαν σύνολο διατεταγμένων ζευγαριών

$$R = \{(\alpha, \beta) : \beta = \kappa\alpha, \kappa \in N, \alpha, \beta \in A\} \subseteq A^2$$

$$= \{(1,1), (1,2), \dots, (1,10), (2,2), (2,4), \dots, (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10)\}$$

2. Να γίνει ο πίνακας της σχέσης.

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$$|R|=27.$$

3. Να περιγραφεί η  $R^{-1}$  και να γραφεί ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών.

$R^{-1}$ : «ο  $\beta$  διαιρείται από τον  $\alpha$ » ή «ο  $\beta$  είναι πολλαπλάσιο του  $\alpha$ »

$$R^{-1} = \{(\beta, \alpha) : \beta = \kappa\alpha, \kappa \in N, \alpha, \beta \in A\} \subseteq A^2$$

$$= \{(1,1), (2,1), \dots, (10,1), (2,2), (4,2), \dots, (10,2), (3,3), (6,3), (9,3), (4,4), (8,4), (5,5), (10,5), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10)\}$$

4. Να εξεταστούν οι  $R$  και  $R^{-1}$  ως προς τις ιδιότητες.

*Ανακλαστική*: Είναι γιατί  $(a, a) \in R$  και  $(a, a) \in R^{-1}$ ,  $\forall a \in R$

*Μη-ανακλαστική*: Δεν είναι και οι δύο.

*Συμμετρική*: Δεν είναι και οι δύο.

*Αντισυμμετρική*: Είναι και οι δύο. Αν  $(\alpha, \beta) \in R$  και  $(\beta, \alpha) \in R$ , τότε  $\beta = \kappa\alpha$  και  $\alpha = \lambda\beta$  από όπου προκύπτει ότι  $\alpha = \kappa\lambda\alpha$  και άρα  $\kappa = \lambda = 1$ , οπότε και  $\beta = \alpha$ . Ομοίως για  $R^{-1}$ .

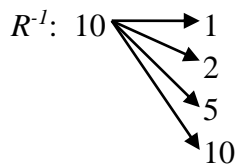
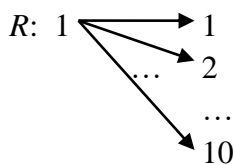
*Μεταβατική*:  $\left. \begin{array}{l} (\alpha, \beta) \in R \Rightarrow \beta = \kappa\alpha, \kappa \in N \\ (\beta, \gamma) \in R \Rightarrow \gamma = \lambda\beta, \lambda \in N \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma = \kappa\lambda\alpha \Rightarrow \gamma = \mu\alpha, \mu \in N \Rightarrow (\alpha, \gamma) \in R$

Ομοίως για  $R^{-1}$ .

5. Να εξεταστεί αν οι  $R$  και  $R^{-1}$  είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

Εφόσον και οι δύο δεν είναι συμμετρικές δεν είναι και σχέσεις ισοδυναμίας.

6. Να εξεταστεί αν  $R$  και  $R^{-1}$  είναι συναρτήσεις.



Και οι δύο δεν είναι συναρτήσεις.

## 2. Σχέσεις (1.7.28)

Δίνεται το σύνολο  $B = \{0,1\}$ .

1. Να βρεθούν όλες οι σχέσεις που είναι δυνατό να οριστούν στο  $B$ .  
Οποιαδήποτε σχέση θα είναι υποσύνολο του  $B \times B = B^2$ .

$$B^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \quad |B^2| = |B|^2 = 4$$

Το  $B^2$  έχει συνολικά  $P(B^2) = 2^4 = 16$  δυνατά υποσύνολα που καθορίζουν και το πλήθος των σχέσεων. Οι πίνακες των σχέσεων είναι οι εξής:

$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$
--	--	--	--	--	--	--

$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$
--	--	--	--	--	--	--

$$\begin{array}{c|cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} = B^2 \quad \begin{array}{c|cc} R & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} = \emptyset$$

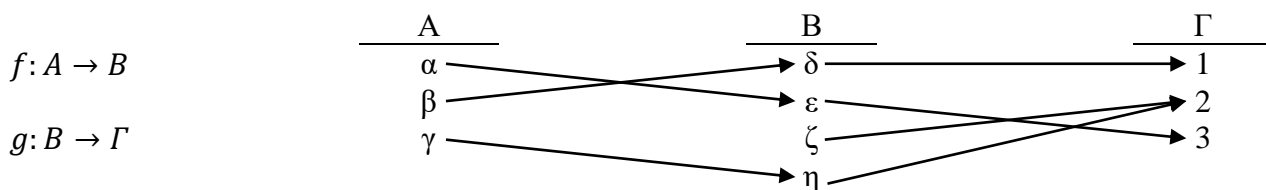
2. Ποιες είναι οι συναρτήσεις;

Παρατηρώντας τους παραπάνω πίνακες θα πρέπει κάθε γραμμή να έχει ακριβώς ένα «1».  
Αυτές αναπαρίστανται από τους κοκκινισμένους πίνακες.

$$\{(0,1), (1,1)\}, \{(0,0), (1,0)\}, \{(0,0), (1,1)\}, \{(0,1), (1,0)\}$$

## 3. Σύνθεση Συναρτήσεων

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \quad B = \{\delta, \varepsilon, \zeta, \eta\} \quad \Gamma = \{1, 2, 3\}$$



1. Να ορισθεί η σύνθεση  $(g \circ f): A \rightarrow \Gamma$

$$(g \circ f)(\alpha) = g(f(\alpha)) = g(\varepsilon) = 2$$

$$(g \circ f)(\beta) = g(f(\beta)) = g(\delta) = 1$$

$$(g \circ f)(\gamma) = g(f(\gamma)) = g(\eta) = 2$$

Με πίνακες:

$f$	$\delta$	$\varepsilon$	$\zeta$	$\eta$
$\alpha$	0	1	0	0
$\beta$	1	0	0	0
$\gamma$	0	0	0	1

$g$	$1$	$2$	$3$
$\delta$	1	0	0
$\varepsilon$	0	0	1
$\zeta$	0	1	0
$\eta$	0	1	0

$g \circ f$	$1$	$2$	$3$
$\alpha$	0	0	1
$\beta$	1	0	0
$\gamma$	0	1	0

#### 4. Συνάρτηση

Η συνάρτηση  $g: Q \rightarrow Q$ , όπου  $g(x) = 5x - 1$  είναι επί.

Έστω  $y \in Q$ . Έστω ότι  $x = \frac{y+1}{5}$ . Αφού  $y \in Q$  συνεπάγεται ότι και  $x \in Q$ . Άρα:

$$g(x) = g\left(\frac{y+1}{5}\right) = 5\left(\frac{y+1}{5}\right) - 1 = (y+1) - 1 = y$$

Επομένως, κάθε  $y$  του πεδίου τιμών είναι έξοδος του  $g$  και άρα η  $g$  είναι επί.

#### 5. Κλάσεις Ισοδυναμίας (Wiley 4.5-10)

Έστω  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  και  $R = \{(x, y) \in A \times A : x - y \text{ διαιρείται από το } 3\}$ .

a. Αποδείξτε ότι η  $R$  είναι ανακλαστική.

Έστω  $\alpha \in A$ . Αφού  $\alpha - \alpha = 0$  και το 0 διαιρείται από το 3, συνεπάγεται ότι  $(\alpha, \alpha) \in R$ .

b. Αποδείξτε ότι η  $R$  είναι συμμετρική.

Έστω  $\alpha \in A$  και  $\beta \in A$  έτσι ώστε  $(\alpha, \beta) \in R$ . Αυτό σημαίνει ότι  $\alpha - \beta = 3\kappa$ , για κάποιον ακέραιο  $\kappa$ . Επομένως,  $\beta - \alpha = 3(-\kappa)$  και άρα και το  $\beta - \alpha$  διαιρείται από το 3. Άρα  $(\beta, \alpha) \in R$ .

c. Αποδείξτε ότι η  $R$  είναι μεταβατική.

Έστω  $\alpha, \beta, \gamma \in A$  έτσι ώστε  $(\alpha, \beta) \in R$  και  $(\beta, \gamma) \in R$ . Αυτό σημαίνει ότι  $\alpha - \beta = 3\kappa$  και  $\beta - \gamma = 3\lambda$  για κάποιους ακέραιους  $\kappa, \lambda$ . Άρα:

$$\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) = 3\kappa + 3\lambda = 3(\kappa + \lambda)$$

Άρα το  $\alpha - \gamma$  διαιρείται από το 3 και άρα το  $(\alpha, \gamma) \in R$ .

d. Ποιά είναι η διαμέριση του  $A$  βάση της σχέσης ισοδυναμίας  $R$ :

$\{\{0, 3, 6\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\}$

## 6. Κλάσεις Ισοδυναμίας (Wiley 4.5-10)

Έστω  $R$  μία σχέση στο  $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  έτσι ώστε  $(x, y)R(p, q)$  αν και μόνο αν  $x + q = y + p$ . Να δείξετε ότι η  $R$  είναι σχέση ισοδυναμίας.

Η συγκεκριμένη σχέση είναι:

α) ανακλαστική: αφού  $(x, y)R(x, y)$  σημαίνει ότι  $x + y = y + x$  που ισχύει.

β) συμμετρική: αφού  $(x, y)R(p, q)$  σημαίνει ότι  $x + q = y + p$  που μπορεί να γραφεί σαν  $y + p = x + q$  που σημαίνει  $(p, q)R(x, y)$ . Άρα  $(x, y)R(p, q)$  δίνει  $(p, q)R(x, y)$  και άρα η  $R$  είναι συμμετρική.

γ) μεταβατική: Έστω  $(x, y)R(p, q)$  και  $(p, q)R(a, b)$  το οποίο σημαίνει ότι  $x + q = y + p$  και  $p + b = q + a$ . Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε  $(x + q) + (p + b) = (y + p) + (q + a)$  από όπου προκύπτει ότι  $(x + b) + (p + q) = (y + a) + (p + q)$  και αφαιρώντας το  $(p + q)$  και από τα δύο μέλη παίρνουμε  $x + b = y + a$  οπότε  $(x, y)R(a, b)$

Άρα η  $R$  είναι σχέση ισοδυναμίας.

## 7. Συναρτήσεις

Έστω μία συνάρτηση  $f: A \rightarrow A$  (η  $f$  είναι υποσύνολο του  $A \times A$ ). Να δείξετε ότι για κάθε συνάρτηση  $f_1$  και  $f_2$  που είναι υποσύνολα του  $A \times A$  αν  $f \circ f_1 = f \circ f_2$  τότε  $f_1 = f_2$  **αν και μόνο αν** η  $f$  είναι ένα-προς-ένα.

### Λύση:

Έστω ότι  $f$  δεν είναι ένα-προς-ένα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν  $\alpha \neq \beta \in A$  έτσι ώστε  $f(\alpha) = f(\beta)$ . Ορίζουμε τις συναρτήσεις  $f_1: A \rightarrow A$ ,  $f_1(x) = \alpha$ , για κάθε  $x \in A$  και  $f_2: A \rightarrow A$ ,  $f_2(x) = \beta$ , για κάθε  $x \in A$ . Αν  $f \circ f_1 = f \circ f_2$  τότε:

$$f \circ f_1(x) = f(f_1(x)) = f(a)$$

$$f \circ f_2(x) = f(f_2(x)) = f(\beta)$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι  $f(a) = f(\beta)$  και γενικά  $f \circ f_1 = f \circ f_2$  αλλά  $a \neq \beta$  και άρα  $f_1 \neq f_2$ .

Τώρα αποδεικνύουμε ότι αν  $f \circ f_1 = f \circ f_2$  και  $f_1 \neq f_2$  η  $f$  δεν είναι ένα-προς-ένα. Ας υποθέσουμε ότι οι  $f_1$  και  $f_2$  ορίζονται όπως και πριν. Έστω  $x \in A$  έτσι ώστε  $f_1(x) \neq f_2(x)$ . Τότε:

$$f \circ f_1(x) = f(f_1(x)) = f(a)$$

$$f \circ f_2(x) = f(f_2(x)) = f(\beta)$$

και  $f(a) = f(\beta)$  ενώ  $\alpha = f_1(x) \neq f_2(x) = \beta$  και επομένως η  $f$  δεν είναι ένα-προς-ένα.

## Άλυτες Ασκήσεις

1. (Wiley 4.1-10) Αποφασίστε ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι συναρτήσεις και γιατί.
  - a. Η σχέση  $R = \{(1,5), (2,3), (3,3), (4,2), (5,1)\}$  στο  $A \times A$ , όπου  $A = \{1,2,3,4,5\}$ .
  - b. Για  $A = \{1,2,3,4,5\}$ , η σχέση  $R = \{(1,5), (2,3), (3,3), (1,2), (4,1)\}$  στο  $A \times A$ .
  - c. Η σχέση  $R$  στο  $Q \times Z$ , όπου  $(r, z) \in R$  δηλώνει αν μπορεί ο ρητός αριθμός  $r$  να γραφεί σαν κλάσμα με αριθμητή  $z$ .
  
2. (Wiley 4.2-10) Έστω ότι  $B$  είναι το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών μήκους 5. Ορίζουμε την συνάρτηση  $f: B \rightarrow \{0,1,2,3,4,5\}$ , όπου  $f(s)$  είναι το πλήθος των 1 στην δυαδική ακολουθία  $s$ . Ορίζουμε την συνάρτηση  $g: \{0,1,2,3,4,5\} \rightarrow B$ , όπου  $g(n)$  είναι η δυαδική ακολουθία που αποτελείται από  $n$  1 ακολουθούμενα από  $5-n$  0.
  - a. Υπολογίστε τα  $f(11011)$ ,  $f(01101)$  και  $f(11000)$ . Είναι η  $f$  αντιστρέψιμη; Αν όχι γιατί;
  - b. Υπολογίστε τα  $g(0)$ ,  $g(2)$  και  $g(4)$ . Είναι η  $g$  αντιστρέψιμη; Αν όχι γιατί;
  - c. Υπολογίστε τα  $(f \circ g)(2)$ ,  $(f \circ g)(0)$ ,  $(g \circ f)(11010)$  και  $(g \circ f)(11100)$ .
  - d. Είναι οι  $f$  και  $g$  αντίστροφες η μία της άλλης;
  
3. (Wiley 4.3 Prop. 2) Αν η  $f: A \rightarrow B$  είναι ένα-προς-ένα και η  $g: B \rightarrow C$  είναι ένα-προς-ένα τότε και η σύνθετη συνάρτηση  $g \circ f: A \rightarrow C$  είναι ένα προς ένα.
  
4. (Wiley 4.3-5) Έστω ότι  $S = \{a, b, c\}$  και η συνάρτηση  $c: P(S) \rightarrow P(S)$  όπου  $c(A) = S - A$ .
  - a. Είναι η  $c$  ένα-προς-ένα;
  - b. Είναι η  $c$  επί;
  - c. Είναι η  $c$  αντιστρέψιμη και αν ναι ποια είναι η  $c^{-1}$ ; Αν όχι γιατί;