1. Συνδυασμοί

Η Αλίκη καλεί 6 φίλους στο πάρτυ της: Βασίλη, Γιώργο, Δημήτρη, Ελένη, Ζωή και Ηλία. Όταν φτάσουν κάνουν χειραψία όλοι μεταξύ τους.

Α) Πόσες χειραψίες ανταλλάχτηκαν συνολικά;

Α με όλους τους άλλους	:	6 χειραψίες
Β με όλους τους άλλους	:	6 χειραψίες
...		
Η με όλους τους άλλους	:	6 χειραψίες

Συνολικά λοιπόν είναι 6*7=42 χειραψίες. Όμως μετρήσαμε κάθε χειραψία δύο φορές (μία για κάθε άτομο που έπαιρνε μέρος στη χειραψία). Επομένως ο συνολικός αριθμός είναι 42/2=21.

Άλλος τρόπος: Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να επιλέξω 2 άτομα από 7 συνολικά:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

Β) Η Αλίκη λέει όταν κάθονται στο τραπέζι: «Εγώ θα καθήσω στην κεφαλή του τραπεζιού και οι υπόλοιποι θα αλλάζουν θέση κάθε 5 λεπτά.Το πάρτυ θα τελειώσει όταν έχουμε πάρει όλες τις δυνατές θέσεις.» Πόσο θα κρατήσει το πάρτυ;

Αφού η Αλίκη έχει σταθερή θέση, ο αριθμός των δυνατών τοποθετήσεων των υπολοίπων είναι ο αριθμός των μεταθέσεων των 6 ατόμων, δηλαδή $6! = 720$. Άρα το πάρτυ θα κρατήσει $720 \cdot \frac{1}{12} = 60\ ώρες$!!!

Γ) Μετά την τούρτα αποφασίζουν να χορέψουν (αγόρια με κορίτσια). Πόσα ζευγάρια μπορούν να γίνουν;

Υπάρχουν 4 αγόρια και 3 κορίτσια.

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{H}\} \quad \mathrm{K} = \{\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{Z}\}$$

$A \times K = \{(B, A), (B, E), (B, Z), \dots, (H, A), (H, E), (H, Z)\}$ είναι όλα τα δυνατά ζευγάρια.

Όμως $|A \times K| = |A| \cdot |K| = 4 \cdot 3 = 12$ ζευγάρια.

Δ) Μετά τον χόρο είπαν να το ρίξουν στο τζόγο. Αποφάσισαν λοιπόν να παίξουν λόττο (επιλογή 6 από 49 νούμερα). Η Ζωή λέει λοιπόν: «Θα παίξουμε έτσι ώστε να κερδίσουμε σίγουρα.» Πόσα δελτία πρέπει να συμπληρώσουν;

Αφού δεν μας ενδιαφέρει η σειρά υπάρχουν:

$\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!6!} = 13.983.816$ δελτία.

Ε) Αφού απελπίστηκαν είπαν να παίξουν χαρτιά οι Α,Β,Γ,Δ. Το παιχνίδι είναι το Bridge όπου ο καθένας παίρνει 13 χαρτιά. Τη δεύτερη φορά που παίζουν η Αλίκη λέει : «Έχω τα ίδια χαρτιά με την πρηγούμενη φορά». Πόσο πιθανό είναι αυτό;

Οι δυνατές μοιρασιές είναι $\binom{52}{13} = \frac{52!}{39!13!} = 635.013.559.600$. Επομένως η πιθανότητα θα είναι $\frac{1}{635.013.559.600}$.

ΣΤ) Τελικά αποφασίζουν να παίξουν σκάκι.Η Αλίκη δεν παίζει οπότε βγάζει τρεις σκακιέρες. Πόσες είναι οι δυνατές περιπτώσεις χωρισμούς τους σε τρία ζεύγη;

1^o ζευγάρι: $\binom{6}{2} = 15$

2^o ζευγάρι: $\binom{4}{2} = 6$

3^o ζευγάρι: $\binom{2}{2} = 1$

Άρα οι δυνατοί τρόποι είναι $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$. Όμως τώρα έχουμε μετρήσει περισσότερες φορές τα ζευγάρια ανάλογα σε ποια σειρά μπαίνουν (αν είναι 1^o, 2^o ή 3^o ζευγάρι). Το συνολικό πλήθος αυτών των δυνατών εμφανίσεων είναι $3! = 6$. Άρα τελικά είναι $\frac{90}{6} = 15$ διαφορετικοί τρόποι.

Άλλος τρόπος:

Ο ένας διαλέγει αντίπαλο ανάμεσα στους υπόλοιπους 5 (5 επιλογές)

(Μένουν 4) Ο ένας διαλέγει αντίπαλο ανάμεσα στους υπόλοιπους 3 (3 επιλογές)

(Μένουν 2) Σχηματίζουν ένα ζευγάρι με έναν τρόπο.

Άρα ο αριθμός ζευγαριών είναι $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$.

2. Συνδυασμοί

Σε δελτίο ΠΡΟΠΟ βάζουμε 1,2,Χ σε καθένα από τους 13 αγώνες που αναγράφονται σε αυτό. Πόσες δυνατές στήλες μπορούμε να κατασκευάσουμε;

$3^{13} = 1.594.323$ στήλες συνολικά

3. Συνδυασμοί

Στον παρακάτω αλγόριθμο πόσοι πολλαπλασιασμοί εκτελούνται;

```
for i=1 to r
     for j=1 to m
          s=0
          for k=1 to n
               s=s+A[i,k]*B[k,j]
          endfor
          C[i,j]=s
     endfor
endfor
```

Ο εξωτερικός βρόγχος εκτελεί το σώμα του *r* φορές. Ο επόμενος κατά σειρά βρόγχος τον εκτελεί *m* φορές ενώ τέλος ο εσωτερικός βρόγχος τον εκτελεί *n* φορές. Επομένως, ο αριθμός των πολλαπλασιασμών είναι *rmn*.

4. Συνδυασμοί

Ένα password σε δίκτυο αποτελείται από 4-8 χαρακτήρες που είναι κεφαλαία ή μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου. Πόσα διαφορετικά passwords είναι δυνατά;

Δυνατοί χαρακτήρες: 26μεγάλοι + 26 μικροί = 52.

Password με 4 χαρακτήρες: 52^4

Password με 5 χαρακτήρες: 52^5

...

Password με 8 χαρακτήρες: 52^8

Άρα τα δυνατά passwords είναι $52^4 + 52^5 + 52^6 + 52^7 + 52^8 = 54.507.958.359.296$

5. Συνδυασμοί

Μία επιτροπή αποτελείται από 15 Ρεπουμπλικάνους και 10 Δημοκρατικούς. Πρόκειται να φτιάξουν μία επιτροπή με 6 ανθρώπους. Οι Ρεπουμπλικάνοι επιμένουν να έχουν την πλειοψηφία και στην επιτροπή. Με πόσους τρόπους μπορούμε να φτιάξουμε μία τέτοια επιτροπή δεδομένων των περιορισμών;

Τρεις περιπτώσεις:

1. Κανένας Δημοκρατικός: $\binom{15}{6} = 5005$ Ρεπουμπλικάνους επιλέγουμε
2. Ένας Δημοκρατικός: $\binom{15}{5}\binom{10}{1} = 30030$
3. Δύο Δημοκρατικοί: $\binom{15}{4}\binom{10}{2} = 61425$

Άρα το σύνολο είναι 5005+30030+61425=96460.

6. Δυωνυμικοί Συντελεστές

Να αποδείξετε α)αλγεβρικά β) με συνδυαστικά επιχειρήματα την παρακάτω ισότητα:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

A)

$$\binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1) = n(n-1) + n^2 = 2\binom{n}{2} + n^2$$

B) Το αριστερό μέλος είναι οι τρόποι να επιλέξουμε 2 από 2n στοιχεία.

Για να το μετρήσουμε με άλλο τρόπο, χωρίζουμε τα 2n στοιχεία σε δύο σύνολα των n στοιχείων. Είτε επιλέγουμε και τα δύο στοιχεία από το πρώτο σύνολο, ή και τα δύο στοιχεία από το δεύτερο σύνολο ή ένα από το ένα και ένα από το άλλο.
Άρα συνολικά θα έχουμε $\binom{n}{2} + \binom{n}{2} + n^2$ τρόπους.

7. Δέντρα Συνδυασμών

Να κατασκευάσετε δέντρα με όλες τις μεταθέσεις ώστε το 0 να εμφανίζεται 2 φορές, και το 1 να εμφανίζεται 3 φορές.

8. Συνδυαστική Ισοδυναμία (wiley 5.1 ex. 9)

Να δείξετε ότι τα δύο παρακάτω προβλήματα είναι ίδια:

1. Πόσοι τρόποι υπάρχουν να κατανείμουμε 3 μπάλες (1 κόκκινη, 1 μπλε και 1 πράσινη) σε 10 ανθρώπους (κάποιος μπορεί να πάρει παραπάνω από 1);
2. Πόσοι ακέραιοι υπάρχουν μεταξύ του 0 και του 999;

Αριθμούμε τους ανθρώπους με νούμερα από 0 μέχρι 9 και αναπαριστούμε με 3 αριθμούς σε σειρά από δεξιά προς αριστερά για το ποιος παίρνει την κόκκινη, ποιος την κίτρινη και ποιος την πράσινη. Άρα για κάθε κατανομή σφαιρών υπάρχει ένας ακέραιος μεταξύ 0 και 999.

9. Μεταθέσεις (wiley 5.2.16)

Υπάρχουν 16 μπίλιες σε ένα κουτί αριθμημένες από 1 έως 16. Οι μπίλιες από 1 έως 5 είναι κόκκινες, οι 6 έως 8 είναι πράσινες και οι 9 έως 16 είναι μπλε. Επιλέγουμε 4 μπίλιες, με σειρά χωρίς επανατοποθέτηση, και καταγράφουμε το αποτέλεσμα σαν μία διατεταγμένη λίστα από χρώμα και αριθμό. Για παράδειγμα, K3,M1,Π2,M12.

1. Πόσα αποτελέσματα είναι δυνατά;
2. Από αυτά, πόσα έχουν την πρώτη και τελευταία μπίλια κόκκινη;
3. Πόσα αποτελέσματα έχουν την πρώτη και δεύτερη μπίλια με διαφορετικό χρώμα;
4. Πόσα αποτελέσματα έχουν όλα το ίδιο χρώμα;

1. P(16,4)=16*15*14*13=43680

2. 5*4*14*13=3640

3. 16*15*14*13-(5*4*14*13+3*2*14*13+8*7*14*13)=28756

4. 5*4*3*2+8*7*6*5=4802

10. Μεταθέσεις (wiley 5.2.41)

Με πόσους τρόπους μπορούν 5 οικογένειες των 4 ατόμων να σταθούν στην ουρά ενός σινεμά δεδομένου ότι κάθε οικογένεια δεν μπορεί να διασπαστεί;

Πρώτα καθορίζουμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπαίνουν στη σειρά οι οικογένειες. Υπάρχουν 5!=120 τρόποι για να γίνει αυτό.
Έπειτα καθορίζουμε τη σειρά των μελών κάθε οικογένειας: 4!=24 τρόποι για κάθε οικογένεια.

Από το κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι οι συνολικοί τρόποι θα είναι:
$5!4!^5$=955.514.880

11. Συνδυασμοί (wiley 5.3.ex 3)

Με πόσους τρόπους μπορούν 6 παιδιά να πιαστούν χέρι-χέρι σε κύκλο;

Υπάρχουν 6!=720 τρόποι για να βάλεις τα παιδιά σε μία ευθεία. Όμως, με βάση τη κυκλική τοποθέτηση υπάρχουν κλάσεις ισοδυναμίας που αποτελούνται από μεταθέσεις που είναι ισοδύναμες. Αυτές είναι 6 σε κάθε κλάση. Άρα συνολικά έχουμε 720/6=120 τρόπους

12. Πόκερ (wiley 5.3.pp 2)

a) Με πόσους τρόπους παίρνουμε φλας σε ένα χέρι 5 καρτών;

4 τρόποι για επιλογή τύπου και C(13,5)=1287 για την επιλογή των καρτών. Άρα συνολικά 4*1287=5148 τρόποι.

13. Συνδυασμοί (wiley 5.3.ex 4)

Σε ένα club 10 γυναικών και 8 ανδρών, θέλουν να φτιάξουν μία επιτροπή 5 ανθρώπων. Προφανώς υπάρχουν συνολικά C(18,5) επιτροπές. Σε πόσες από αυτές:

1. Η επιτροπή περιέχει ακριβώς 3 γυναίκες;
2. Η επιτροπή περιέχει τουλάχιστον 3 γυναίκες;
3. Ο Jack και η Jill δεν θέλουν να δουλέψουν μαζί οπότε αποκλείονται από την επιτροπή;

1. Υπάρχουν C(10,3) τρόποι επιλογής γυναικών και C(8,2) για τους άνδρες. Άρα 120*28=3360

2. Παίρνουμε περιπτώσεις με 3 γυναίκες, με 4 και με 5. Άρα:

C(10,3)*C(8,2)+C(10,4)*C(8,1)+C(10,5)=5292

3. Δύο τρόποι για να το βρούμε:

3 σύνολα: 1 που δεν έχει την Jill, 1 που δεν έχει τον Jack και 1 που δεν έχει και τους δύο.

C(1,1)*C(16,4)+C(1,1)*C(16,4)+C(2,0)C(16,5)=8008

Λύνουμε το συμπληρωματικό: C(18,5)-C(2,2)*C(16,3)=8008

14. Ακολουθίες(wiley 5.4.thm 1)

Πόσες δυαδικές ακολουθίες έχουν *r* 1 και *n*-*r* 0.

Θεωρούμε τις *n* θέσεις σαν κενές τις οποίες τις γεμίζουμε με 0 και 1. Τότε C(*n*,*r*) τρόπους για να βάλω τους άσσους και 1 τρόπο για να βάλω τα μηδενικά στις υπόλοιπες θέσεις.

15. Ακολουθίες(wiley 5.4.ex 3)

Πόσες διαφορετικές ακολουθίες από γράμματα φτιάχνουμε από τη λέξη MISSISSIPPI;

Επιλέγουμε γράμματα από το σύνολο {M,I,S,P}, με τον περιορισμό ότι επιλέγουμε 1 M, 4 I, 4 P και 4 S. Άρα έχουμε C(11,1)*C(10,4)*C(6,4)*C(2,2)=34650.

16. Ακολουθίες(wiley 5.4.ex 5)

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι ίδια και ποια είναι η λύση.

1. Πόσες λύσεις στους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς έχει η εξίσωση a+b+c=10;
2. Πόσες δυαδικές ακολουθίες μήκους 12 έχουν ακριβώς 2 άσσους.

Αναπαριστούμε την τιμή του a με τόσα μηδενικά όσα και η τιμή του, και χωρίζουμε με 1 από την τιμή του b το οποίο χωρίζεται με 1 από την τιμή του c. Άρα βρέθηκε η απεικόνιση. Το πλήθος των λύσεων είναι C(12,2)=66.

17. Ακολουθίες(wiley 5.4.ex 7)

Πόσες διαφορετικές τσάντες από 10 φρούτα μπορούμε να αγοράσουμε με μήλα, μπανάνες, ροδάκινα και αχλάδια, αν απαιτήσουμε να έχουμε τουλάχιστον ένα από το καθένα;

Καταρχήν βάζουμε ένα από το καθένα και έπειτα βάζουμε άλλα 6 φρούτα. Αν a,b,c,d αντιστοιχούν με την αντίστοιχη σειρά στα φρούτα τότε a+b+c+d=6, όπου a,b,c,d μη αρνητικοί ακέραιοι. Άρα συνολικά θα έχουμε C(6+4-1,6)=C(9,6)=84.

18. Ακολουθίες(wiley 5.4.ex 9)

Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα είναι πιθανά αν ρίξουμε το ίδιο ζάρι 4 φορές. Με πόσους τρόπους το άθροισμα δίνει 14;

Θεωρώ ότι έχω μία διατεταγμένη λίστα από αποτελέσματα (4-δείγμα) και άρα 6^4=1296.

Αυτό δίνεται από την εξίσωση α+β+γ+δ=14. Πόσες λύσεις υπάρχουν σε αυτή όταν α,β,γ,δ≥1; Αυτή μπορεί να γραφεί σαν α΄+β΄+γ΄+δ΄=10, όπου α΄,β΄,γ΄,δ΄≥0, άρα με C(10+4-1,10)=286. Αυτό που απομένει είναι να διώξουμε τις περιπτώσεις όπου κάποιο αποτέλεσμα σε ζάρι είναι >6. Για παράδειγμα το (1,1,3,9). Άρα λοιπόν πρέπει να βρούμε όλες τις περιπτώσεις στις οποίες α,β,γ,δ≥7. Προσοχή μόνο ένα μπορεί από αυτά να συμβαίνει κάθε φορά αφού α,β,γ,δ≥1.

Για α: Πόσες λύσεις υπάρχουν για την α+β+γ+δ=14, α,β,γ,δ≥1 και α≥7; Ας το σκεφτούμε αυτό το πρόβλημα σαν πρόβλημα φρούτων. Έχουμε μία τσάντα στην οποία μπαίνει ένα από κάθε φρούτο από τα τέσσερα συνολικά. Επίσης για το πρώτο φρούτο θα πάρουμε 7 σύνολο. Άρα έχουμε τοποθετήσει 10 φρούτα. Το πρόβλημα είναι να τοποθετήσουμε ακόμα 4 από τα 4 είδη. Αυτό γίνεται με C(4+4-1,4)=35. Αυτό ισχύει συμμετρικά και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, άρα :

286-4*35=146 τρόπους για άθροισμα 14.

20. Εγκλεισμός-Αποκλεισμός (Bradley7.1.ex 12)

Από 62 προγραμματιστές, 35 γνωρίζουν C και 41 γνωρίζουν Java. Αν 16 δεν ξέρουν και τις δύο γλώσσες πόσοι γνωρίζουν και τις δύο.

Έστω A αυτοί που ξέρουν C και B αυτοί που ξέρουν Java. Επίσης έχουμε ότι $\overline{|A \cup B|} = 16 \Rightarrow$ $|A \cup B| = 62 - 16 = 46$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow$$

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow$$

$$|A \cap B| = 35 + 41 - 46 = 30$$

22. Πλήθος Λύσεων

Πόσες θετικές ακέραιες λύσεις υπάρχουν για την εξίσωση a+b+2c=10; (Υπόδειξη: να πάρετε περιπτώσεις ως προς το c: c=1,c=2,…).

Λύση:

Έχουμε 4 περιπτώσεις:

c=1: Τότε κοιτάμε για τις λύσεις τις εξίσωσης: $a + b = 8$. Επειδή όμως οι λύσεις πρέπει να είναι θετικές και δεν μπορεί να είναι μηδέν οδηγούμαστε στην εξίσωση $a + b = 6$. Αυτό αφορά όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε 1 άσσο σε μία δυαδική ακολουθία 7 ψηφίων. Άρα η λύση είναι $\binom{7}{1} = 7$.
c=2: Τότε κοιτάμε για τις λύσεις τις εξίσωσης: $a + b = 6$. Επειδή όμως οι λύσεις πρέπει να είναι θετικές και δεν μπορεί να είναι μηδέν οδηγούμαστε στην εξίσωση $a + b = 4$. Ομοίως με παραπάνω είναι $\binom{5}{1} = 5$.
c=3: Τότε κοιτάμε για τις λύσεις τις εξίσωσης: $a + b = 4$. Επειδή όμως οι λύσεις πρέπει να είναι θετικές και δεν μπορεί να είναι μηδέν οδηγούμαστε στην εξίσωση $a + b = 2$. Ομοίως με παραπάνω είναι $\binom{3}{1} = 3$.
c=4: Τότε κοιτάμε για τις λύσεις τις εξίσωσης: $a + b = 2$. Επειδή όμως οι λύσεις πρέπει να είναι θετικές και δεν μπορεί να είναι μηδέν θα υπάρχει μόνο μία λύση, η $a = b = 1$.
Άρα συνολικά έχουμε 16 λύσεις.

23. Συνδυασμοί

Να κατηγοριοποιήσετε κάθε ένα από τα παρακάτω προβλήματα μέτρησης με βάση τους τύπους που αντιστοιχούν στις λύσεις τους.
Οι λύσεις είναι:

$$n^m$$
$$m^n$$
$$P(n, m)$$
$$C(n - 1 + m, m)$$
$$C(n - 1 + m, n)$$
$$2^{nm}$$

Προτάσεις:

1. Πλήθος διευθετήσεων m ίδιων σφαιρών σε n διαφορετικούς κάδους.
2. Πλήθος διευθετήσεων m διαφορετικών σφαιρών σε n διαφορετικούς κάδους.
3. Πλήθος λέξεων με m γράμματα από ένα αλφάβητο μεγέθους n, όπου κανένα γράμμα δεν χρησιμοποιείται περισσότερες από 1 φορές ($m \leq n$).

4. Πλήθος λέξεων με m γράμματα από ένα αλφάβητο μεγέθους n, όπου τα γράμματα επαναλαμβάνονται.
5. Πλήθος ακολουθιών από n ίδιες κόκκινες μπάλες και m-1 ίδιες μπλε μπάλες.
6. Πλήθος πινάκων μεγέθους $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ με m πιθανές τιμές για κάθε κελί (υποθέστε ότι το n είναι τέλειο τετράγωνο)
7. Πλήθος δυνατών υποσυνόλων του Α, όπου |Α|=nm.
8. Πλήθος συναρτήσεων από το σύνολο Α στο σύνολο Β, όπου |Α|=n και |Β|=m.
9. Πλήθος σχέσεων από το σύνολο Α στο σύνολο Β, όπου |Α|=n και |Β|=m.
10. Πλήθος δυαδικών ακολουθιών μήκους mn.

Λύση:

n^m:2,4
m^n:6,8
$P(n,m)$:3
$C(n-1+m,m)$:1
$C(n-1+m,n)$:5
2^{nm}:7,9,10

Άλυτες Ασκήσεις

1. (Wiley 5.1.ex12) Να δείξετε ότι οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:
    a. Πόσες θετικές ακέραιες λύσεις υπάρχουν στην εξίσωση x+y+z=21;
    b. Πόσα υποσύνολα δύο στοιχείων του συνόλου {1,2,…,20} υπάρχουν;

2. (Wiley 5.2.36) Πόσοι αριθμοί τεσσάρων ψηφίων χρησιμοποιούν το ψηφίο 7;

3. (Wiley 5.3.23) Πόσες επιτροπές από 5 άνδρες και 4 γυναίκες μπορούμε να φτιάξουμε από έναν οργανισμό που έχει 43 γυναίκες και 47 άνδρες;

4. (Wiley 5.4.25) Πόσες μη-αρνητικές ακέραιες λύσεις υπάρχουν για την a+b+2c=10; (Υπόδειξη: πάρτε περιπτώσεις για c=1, c=2,c=3 ή c=4).

5. (Bradley 7.1.27) Πόσοι αριθμοί μεταξύ 1 και 1000 δεν διαιρούνται από το 2 και το 3;