1.

Σε δελτίο ΠΡΟΠΟ βάζουμε 1,2,Χ σε καθένα από τους 13 αγώνες που αναγράφονται σε αυτό. Πόσες δυνατές στήλες μπορούμε να κατασκευάσουμε;

Λύση:

$3^{13} = 1.594.323$ στήλες συνολικά

2.

Στον παρακάτω αλγόριθμο πόσοι πολλαπλασιασμοί εκτελούνται;

```
for i=1 to r
     for j=1 to m
          s=0
          for k=1 to n
               s=s+A[i,k]*B[k,j]
          endfor
          C[i,j]=s
     endfor
endfor
```

Λύση:

Ο εξωτερικός βρόγχος εκτελεί το σώμα του *r* φορές. Ο επόμενος κατά σειρά βρόγχος τον εκτελεί *m* φορές ενώ τέλος ο εσωτερικός βρόγχος τον εκτελεί *n* φορές. Επομένως, ο αριθμός των πολλαπλασιασμών είναι *rmn*.

3.

Ένα password σε δίκτυο αποτελείται από 4-8 χαρακτήρες που είναι κεφαλαία ή μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου. Πόσα διαφορετικά passwords είναι δυνατά;

Λύση:

Δυνατοί χαρακτήρες: 26μεγάλοι + 26 μικροί = 52.

Password με 4 χαρακτήρες: 52^4

Password με 5 χαρακτήρες: 52^5

...

Password με 8 χαρακτήρες: 52^8

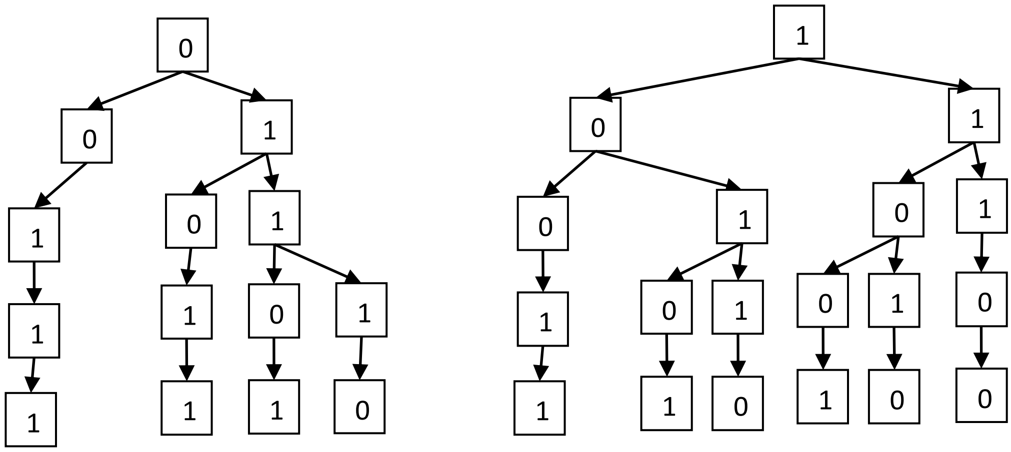
Άρα τα δυνατά passwords (από αρχή αθροίσματος) είναι $52^4 + 52^5 + 52^6 + 52^7 + 52^8 =$ $54.507.958.359.296$

4.

Να κατασκευάσετε δέντρα με όλες τις μεταθέσεις ώστε το 0 να εμφανίζεται 2 φορές, και το 1 να εμφανίζεται 3 φορές.

Λύση:

Ξεκινάμε με το 0 στη ρίζα και το ίδιο κάνουμε και για το 1.



Άρα συνολικά έχουμε 10 μεταθέσεις, όσα και τα φύλλα των δύο αυτών δένδρων. Κάθε μετάθεση είναι μία διαδρομή από τη ρίζα μέχρι το φύλλο.

5.

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι ίδια και ποια είναι η λύση.

1. Πόσες λύσεις στους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς έχει η εξίσωση a+b+c=10;
2. Πόσες δυαδικές ακολουθίες μήκους 12 έχουν ακριβώς 2 άσσους.

Λύση:

Αναπαριστούμε την τιμή του a με τόσα μηδενικά όσα και η τιμή του, και χωρίζουμε με 1 από την τιμή του b το οποίο χωρίζεται με 1 από την τιμή του c. Άρα βρέθηκε η απεικόνιση.

Παράδειγμα:

_ _ _ 1 _ _ _ _ _ _ 1 _

Το a θα πάρει την τιμή 3 (τόσες είναι οι θέσεις αριστερά του), το b θα πάρει την τιμή 6 (τόσες είναι οι θέσεις μεταξύ των 2 άσσων) και το c θα πάρει την τιμή 1 (τόσες είναι οι θέσεις για μηδενικά στα δεξιά του). Πράγματι, 3+6+1=10.

Για το πλήθος σκεφτόμαστε ως εξής: Έχουμε 12 θέσεις για τον πρώτο άσσο και 11 θέσεις για τον δεύτερο άσσο. Άρα συνολικά έχουμε 12*11=132 διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης των 2 άσσων σε 12 θέσεις. Όμως, οι δύο άσσοι είναι ίδιοι αλλά παραπάνω έχουμε μετρήσει τις τοποθετήσεις σαν να ήταν διαφορετικοί. Αυτό σημαίνει ότι αν 2 οι παραπάνω συνδυασμοί που μετρήσαμε θα είναι ίδιοι. Άρα από κανόνα διαίρεσης προκύπτει τελικά ότι έχουμε 66 τρόπους τοποθέτησης 2 άσσων σε 12 θέσεις και άρα τόσες είναι και οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης.

6.

Από 62 προγραμματιστές, 35 γνωρίζουν C και 41 γνωρίζουν Java. Αν 16 δεν ξέρουν και τις δύο γλώσσες πόσοι γνωρίζουν και τις δύο.

Λύση:

Έστω Α αυτοί που ξέρουν C και Β αυτοί που ξέρουν Java. Επίσης έχουμε ότι $\overline{|A \cup B|} = 16 \Rightarrow$
$|A \cup B| = 62 - 16 = 46$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow$$

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow$$

$$|A \cap B| = 35 + 41 - 46 = 30$$

Άρα και τις δύο γλώσσες τις γνωρίζουν 30 προγραμματιστές.

7.

Πόσα ακολουθίες χαρακτήρων από 8 γράμματα υπάρχουν όταν:

1. Δεν περιέχουν φωνήεντα αλλά τα σύμφωνα μπορούν να επαναλαμβάνονται.
2. Δεν περιέχουν φωνήεντα αλλά τα σύμφωνα δεν μπορούν να επαναλαμβάνονται.
3. Ξεκινάνε με φωνήεν και όλα τα γράμματα μπορούν να επαναληφθούν.
4. Ξεκινάνε με φωνήεν χωρίς όμως επαναλήψεις γραμμάτων.
5. Περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν και τα γράμματα μπορούν να επαναληφθούν.
6. Περιέχουν ακριβώς ένα φωνήεν και τα γράμματα (άρα τα υπόλοιπα σύμφωνα) μπορούν να επαναληφθούν.
7. Ξεκινάνε με το γράμμα Θ και περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν αν τα γράμματα μπορούν να επαναληφθούν.
8. Ξεκινάνε και τελειώνουν με το γράμμα Θ και περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν αν τα γράμματα μπορούν να επαναληφθούν.

Λύση:

1. 8 θέσεις που γεμίζουν με τα 17 σύμφωνα. Από κανόνα γινομένου είναι $17 \times 17 \times \cdots \times 17 = 17^8$
2. Για την πρώτη θέση έχουμε 17 σύμφωνα, για τη δεύτερη 16 – δεν χρησιμοποιώ αυτό της πρώτης – για την Τρίτη θέση 15 κοκ. Άρα το πλήθος των ακολουθιών είναι $17 \times 16 \times 15 \times \cdots \times 10$
3. Για την πρώτη θέση έχουμε 7 περιπτώσεις ενώ για τις υπόλοιπες έχουμε 24^7. Άρα το συνολικό πλήθος είναι 7×24^7.
4. Συνδυάζοντας το σκεπτικό από τα ερωτήματα 2 και 3 έχουμε ότι το πλήθος είναι: $7 \times 23 \times 22 \times \cdots \times 17$
5. Το συνολικό πλήθος ακολουθιών που μπορούμε να φτιάξουμε είναι 24^8. Από αυτά θα αφαιρέσουμε όλες τις ακολουθίες που δεν περιέχουν κανένα φωνήεν και θα βρούμε το πλήθος των ακολουθιών που έχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν (συμπληρωματικό πρόβλημα). Χωρίς κανένα φωνήεν το πλήθος των ακολουθιών είναι 17^8. Άρα το πλήθος των ακολουθιών με ένα τουλάχιστον φωνήεν είναι $24^8 - 17^8$.
6. Έχουμε 8 περιπτώσεις για το που θα πάει το μοναδικό φωνήεν. Για κάθε μία τέτοια θέση έχουμε 7 διαφορετικές περιπτώσεις ανάλογα με το φωνήεν που θα χρησιμοποιήσουμε. Τέλος, μπορώ να τοποθετήσω τα υπόλοιπα σύμφωνα με 17^7 τρόπους. Άρα, από κανόνα γινομένου έχουμε ότι το συνολικό πλήθος τέτοιων ακολουθιών είναι $8 \times 7 \times 17^7$.
7. Την πρώτη θέση δεν την μετράμε αφού με ένα τρόπο τοποθετείται το Θ σε αυτή. Εφαρμόζοντας τώρα την ίδια προσέγγιση με το ερώτημα 5 αλλά για 7 θέσεις έχουμε ότι το συνολικό πλήθος τέτοιων ακολουθιών είναι $24^7 - 17^7$.
8. Το ίδιο με το 7 μόνο που τώρα θα χρησιμοποιήσουμε 6 μόνο θέσεις. Άρα, η απάντηση είναι $24^6 - 17^6$.

<u>8.</u>

Πόσες διαγώνιους έχει ένα κυρτό πολύγωνο με n πλευρές; (ένα πολύγωνο είναι κυρτό όταν για οποιοδήποτε ζεύγος σημείων στο εσωτερικό του ή πάνω στο σύνορό του το ευθύγραμμο τμήμα που ατ συνδέει κείται πλήρως εντός του πολυγώνου ή πάνω στο σύνορό του. Διαγώνιος είναι το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο μη-γειτονικών κορυφών).

<u>Λύση:</u>

Υπάρχουν $n - 3$ διαγώνιες από κάθε κορυφή μιας και δεν μπορεί να φέρει διαγώνιο προς τον εαυτό του ή προς κάποια από τις δύο γειτονικές του κορυφές. Άρα το πλήθος των διαγώνιων είναι $n(n-3)$ αφού έχουμε n κορυφές. Όμως μετράμε κάθε διαγώνιο 2 φορές, μία από την μία της κορυφή και μία από την άλλη. Άρα το συνολικό πλήθος διαγώνιων είναι $\frac{n(n-3)}{2}$.

<u>9.</u>

Πόσες συναρτήσεις 1-προς-1 f υπάρχουν από ένα σύνολο με 5 στοιχεία προς ένα άλλο σύνολο με το εξής πλήθος στοιχείων:

1. 4
2. 5
3. 6
4. 7

<u>Λύση:</u>

Έστω ότι το πεδίο τιμών έχει γενικά πληθάριθμο k.Τότε, για το πρώτο στοιχείο του πεδίου ορισμού έχουμε k επιλογές. Για το δεύτερο έχουμε $k - 1$ επιλογές, αφού η συνάρτηση πρέπει να είναι 1-προς-1 και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εικόνα του δεύτερου στοιχείου η εικόνα του πρώτου. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι το πλήθος συναρτήσεων είναι $k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)$. Αυτό γράφεται ως $\frac{k!}{(k-5)!}$ Άρα για κάθε περίπτωση έχουμε:

1. Με 0 τρόπους. Είναι λογικό γιατί έχουμε 5 στοιχεία που απεικονίζουμε σε 4 και άρα αναπόφευκτα η συνάρτηση δεν είναι 1-προς-1.
2. Με $\frac{5!}{0!} = 120$
3. Με $\frac{6!}{1!} = 720$
4. Με $\frac{7!}{2!} = 2520$

10.

Να δείξετε ότι μεταξύ οποιωνδήποτε 5 ακεραίων θα υπάρχουν 2 αριθμοί που θα έχουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το 4.

Λύση:

Η διαίρεση με το 4 αφήνει 4 διαφορετικά υπόλοιπα: 0,1,2,3. Οι περιστερώνες είναι τα υπόλοιπα ενώ τα περιστέρια είναι οι 5 αριθμοί. Από την αρχή των περιστερώνων θα υπάρχει ένα ζεύγος αριθμών που έχουν το ίδιο υπόλοιπο.

11.

Στον 17^{o} αιώνα το Παρίσι είχε περισσότερους από 800.000 κατοίκους. Εκείνη την εποχή πίστευαν ότι κανένας δεν είχε παραπάνω από 200.000 τρίχες στο κεφάλι του. Υποθέτοντας ότι αυτοί οι αριθμοί είναι σωστοί και ότι όλοι οι άνθρωποι έχουν τουλάχιστον μία τρίχα στο κεφάλι τους να δείξετε (όπως το έκανε ο Γάλλος συγγραφέας Pierre Nicole) ότι υπάρχουν δύο Παριζιάνοι με το ίδιο πλήθος τριχών στο κεφάλι. Έπειτα αποδείξτε ότι με βάση τις υποθέσεις υπάρχουν τουλάχιστον 5 Παριζιάνοι με το ίδιο πλήθος τριχών στο κεφάλι.

Λύση:

Οι τρίχες είναι οι περιστερώνες και ο πληθυσμός είναι τα περιστέρια. Αφού υπάρχουν περισσότερα περιστέρια από περιστερώνες σημαίνει ότι θα υπάρχει ένας περιστερώνας με 2 περιστέρια, δηλαδή θα υπάρχουν δύο Παριζιάνοι με ίδιο πλήθος τριχών. Επίσης, χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη αρχή των περιστερώνων και αφού έχουμε αυστηρά περισσότερους από 800000 κατοίκους σημαίνει ότι θα υπάρχουν τουλάχιστον $\left\lceil \frac{800001}{200000} \right\rceil = 5$ κάτοικοι με ίδιο πλήθος τριχών στην κεφαλή.