1. Άθροισμα

Να υπολογιστεί το άθροισμα $S_n = \sum_{i=0}^{n} i2^i$ με την τεχνική της εξίσωσης αθροίσματος.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i=0}^{n} a_{i+1} \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = 0 + \sum_{i=0}^{n} (i+1)2^{i+1} \Rightarrow$$

Θέλουμε να εκφράσουμε το άθροισμα σαν συνάρτηση του S_n.

$$\sum_{i=0}^{n} (i+1)2^{i+1} = \sum_{i=0}^{n} i2^{i+1} + \sum_{i=0}^{n} 2^{i+1} =$$

$$2\sum_{i=0}^{n} i2^i + 2\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2S_n + 2^{n+2} - 2$$

Επομένως έχουμε:

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = 2S_n + 2^{n+2} - 2 \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1)2^{n+1} - 2^{n+2} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

2. Άθροισμα

Ξεκινάμε με δύο μεγάλα ποτήρια, όπου το πρώτο περιέχει 500 ml νερού και το δεύτερο 500ml κρασιού. Χύνουμε το 1/3 της ποσότητας του πρώτου ποτηριού στο δεύτερο και έπειτα αφού το ανακατώσουμε καλά ρίχνουμε μία ποσότητα υγρού από το δεύτερο ποτήρι στο πρώτο ώστε και τα δύο ποτήρια να έχουν 500ml υγρού. Αυτή την διαδικασία την επαναλαμβάνουμε *n* φορές.

Α) Έστω ότι το πρώτο ποτήρι έχει w ml κρασί.

Β) Δώστε έναν κλειστό τύπο όσον αφορά την ποσότητα κρασιού στο πρώτο ποτήρι έπειτα από *n* επαναλήψεις.

Γ) Ποια είναι η ποσότητα του κρασιού σε κάθε ποτήρι καθώς το *n* τείνει στο άπειρο;

Α) Έστω ότι στην αρχή ενός γύρου το πρώτο ποτήρι περιέχει $0 \leq w \leq 1$ (500w ml) κρασί και $1-w$ νερό. Αντίστοιχα στο δεύτερο ποτήρι.

Όταν χύνουμε 1/3 από το πρώτο ποτήρι στο δεύτερο, τότε το πρώτο ποτήρι περιέχει 2/3 υγρό και $2/3w$ κρασί ενώ το δεύτερο ποτήρι περιέχει $4/3w$ υγρό και $1-(2/3)w$ κρασί. Χύνοντας από το δεύτερο στο πρώτο ποτήρι μεταφέρουμε το (1/3)(4/3) του κρασιού από το δεύτερο στο πρώτο. Επομένως, μετά το τέλος του γύρου και τα δύο ποτήρια περιέχουν 500ml υγρού ενώ το πρώτο ποτήρι περιέχει κρασί

$$\frac{2}{3}w + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{3}w\right) = \frac{1}{4} + \frac{w}{2}$$

Έπειτα από ακόμα έναν γύρο το πρώτο ποτήρι περιέχει:

$$\frac{2}{4} + \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{w}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{w}{2^2}$$

Έπειτα από *n* γύρους:

$$\frac{w}{2^n} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \frac{w}{2^n} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \frac{w}{2^n} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Αφού w=0 αρχικά το κρασί στο πρώτο ποτήρι, έπειτα από *n* γύρους είναι

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Β)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}$$

3. Άθροισμα

Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{k=1}^{n}\left((2k-1)+2\sum_{j=1}^{k-1}(2j-1)\right)=$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left((2k-1)+2(k-1)^2\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=2\frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}-2\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{2n^3+n}{3}$$

4. Διπλό Άθροισμα

Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{k=1}^{n}H_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}=\sum_{1\le i\le k\le n}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{i}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{k=i}^{n}1=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i+1)}{i}=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

$$=nH_n-n+H_n=(n+1)H_n-n$$

5. Διπλό Άθροισμα

Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}3^{i+j}$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}3^{i+j}=\sum_{i=0}^{n}3^i\sum_{j=0}^{m}3^j=\left(\sum_{i=0}^{n}3^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}3^j\right)=\frac{3^{n+1}-1}{2}\frac{3^{m+1}-1}{2}$$

6. Άθροισμα

Μία κατσαρίδα είναι στην άκρη ενός ελαστικού χαλιού με μήκος 1 μέτρο. Η κατσαρίδα θέλει να διασχίσει το χαλί και το κάνει με ταχύτητα 1 εκατοστό ανά δευτερόλεπτο. Όμως στο τέλος κάθε δευτερολέπτου ένα μικρό παιδάκι επιμηκύνει το χαλί τραβώντας το και από τις δύο άκρες κατά 1 μέτρο. Έστω ότι αυτή η επιμήκυνση είναι στιγμιαία και το χαλί επιμηκύνεται ομοιόμορφα. Στα πρώτα δευτερόλεπτα συμβαίνουν τα εξής:

- Η κατσαρίδα διανύει 1 εκατοστό και έχει να διανύσει ακόμα 99 εκατοστά.
- Το παιδί επιμηκύνει το χαλί κατά 1 μέτρο, άρα πίσω από τη κατσαρίδα υπάρχουν 2 εκατοστά χαλιού και μπροστά της 198 εκατοστά.
- Η κατσαρίδα διανύει άλλο ένα εκατοστό και άρα πίσω από τη κατσαρίδα υπάρχουν 3 εκατοστά χαλιού και μπροστά της 197 εκατοστά.
- Το παιδί επιμηκύνει το χαλί κατά 1 μέτρο (3 μέτρα συνολικά), άρα πίσω από τη κατσαρίδα υπάρχουν 3*3/2=4,5 εκατοστά χαλιού και μπροστά της 295,5 εκατοστά.
- κοκ

Η δουλειά μας θα είναι να βρούμε τι θα γίνει με την κατσαρίδα. Θα μπορέσει να διασχίσει το χαλί ή όχι;

1. Κατά τη διάρκεια του δευτερολέπτου *i* τι κλάσμα του χαλιού διανύει η κατσαρίδα;
2. Κατά τη διάρκεια των πρώτων *n* δευτερολέπτων τι κλάσμα του χαλιού έχει διανύσει η κατσαρίδα;
3. Πόσο περίπου χρόνο χρειάζεται η κατσαρίδα για να διανύσει το χαλί (αν το διανύσει)

1. Κατά τη διάρκεια του i-οστού δευτερολέπτου το μήκος του χαλιού είναι $100i$ εκατοστά και η κατσαρίδα διανύει 1 εκατοστό. Άρα το κλάσμα του χαλιού που διανύει η κατσαρίδα είναι $1/100i$.
2. Η κατσαρίδα διανύει το 1/100 του χαλιού το πρώτο δευτερόλεπτο, το 1/200 το δεύτερο δευτερόλεπτο κοκ. Άρα για τα *n* πρώτα δευτερόλεπτα, το κλάσμα του χαλιού που έχει διανύσει η κατσαρίδα είναι:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{100k} = \frac{H_n}{100}$$
3. Η κατσαρίδα φτάνει στην άκρη του χαλιού όταν το κλάσμα είναι ίσο με 1. Αυτό συμβαίνει όταν το *n* είναι αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{H_n}{100} \geq 1$. Αφού $H_n \approx lnn$ παίρνουμε:
$$\frac{lnn}{100} \geq 1 \Rightarrow lnn \geq 100 \Rightarrow n \geq e^{100} \approx 10^{43}$$

7. Άθροισμα

Να υπολογίσετε (έστω και προσεγγιστικά) το άθροισμα: $S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Τι γίνεται όταν το n τείνει στο άπειρο;

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Η f είναι φθίνουσα και άρα:

$$\int_{x=1}^{n+1} \frac{1}{x^2} \leq S \leq 1 + \int_{x=1}^{n} \frac{1}{x^2}$$

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq S \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Θα μπορούσαμε να παίρναμε μία ακόμα καλύτερη προσέγγιση αν υπολογίζαμε κάποιους όρους του αθροίσματος και ολοκληρώναμε το υπόλοιπο.

$$s = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{49}{36}$$

$$\int_{x=4}^{n+1} \frac{1}{x^2} \leq S - s \leq \int_{x=3}^{n} \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{58}{36} - \frac{1}{n+1} \leq S \leq \frac{61}{36} - \frac{1}{n}$$

Άρα για n τείνει στο άπειρο παίρνουμε:

$$\frac{58}{36} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \leq \frac{61}{36}$$

Η προσέγγιση αυτή είναι αρκετά καλή αφού τα δύο φράγματα διαφέρουν κατά 1/12. Η ακριβής τιμή του παραπάνω αθροίσματος είναι $\frac{\pi^2}{6}$, αλλά η απόδειξη είναι αρκετά πολύπλοκη.

8. Άθροισμα

Η συνάρτηση Ζήτα *ζ(k)* του Riemann ορίζεται ως εξής: $\zeta(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^k}$. Να δείξετε ότι

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^k} - 1 \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^k}$$

$$= \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{j^k}$$

$$= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j^k}$$

$$= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2} \frac{1}{1 - 1/j}$$

$$= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1$$

9. Γινόμενο

Να δείξετε ότι $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$

Το συγκεκριμένο γινόμενο γίνεται ως εξής:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

αφού οι όροι ακυρώνονται μεταξύ τους.

Άλυτες Ασκήσεις

1. Ένα φορτηγό θέλει να διασχίσει μία έρημο. Δυστυχώς δεν υπάρχει βενζινάδικο στην έρημο και αν γεμίσει το ρεζερβουάρ δεν φτάνει να την διασχίσει. Αν θεωρήσουμε ότι στην άκρη της ερήμου υπάρχει βενζινάδικο όπου το φορτηγό μπορεί να γεμίζει όσες φορές θέλει και ότι το φορτηγό μπορεί να αποθηκεύει βενζίνη μέσα στην έρημο, να κάνετε τα εξής:
    a. Να βρείτε μία διαδικασία με την οποία το φορτηγό ενδεχομένως να μπορεί να περάσει την έρημο.
    b. Να αποδείξετε ότι μπορεί να περάσει οποιαδήποτε έρημο ανεξαρτήτως μήκους.

2. Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{i=0}^{n} \frac{9^i - 7^i}{11^i}$

3. Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} \left(j^{5/3} \left(1 - \frac{1}{2j^{1/3}}\right)^i \right)$

4. (Concrete 2.37) Μπορούν όλα τα ορθογώνια με πλευρές 1/κ και 1/(κ+1) – για κ τείνει στο άπειρο – να χωρέσουν σε ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 1. (υπόδειξη: αποδείξτε πρώτα ότι η επιφάνειά τους συνολικά τείνει στο 1). Έπειτα δείξτε ότι χωράνε.

5. (Concrete 2.35) Να αποδείξετε το θεώρημα του Goldbach σύμφωνα με το οποίο
$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \cdots = \sum_{k \in P} \frac{1}{k-1}$$
όπου P είναι το σύνολο των τέλειων δυνάμεων το οποίο ορίζεται ως εξής:
$$P = \{m^n : m \geq 2, n \geq 2, m \notin P\}$$

6. Να βρείτε κλειστό τύπο για τα παρακάτω αθροίσματα-γινόμενα:
    a. $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{j+2}\right)^i$
    b. $\prod_{i=1}^{n} 2 \cdot 4^i$