

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

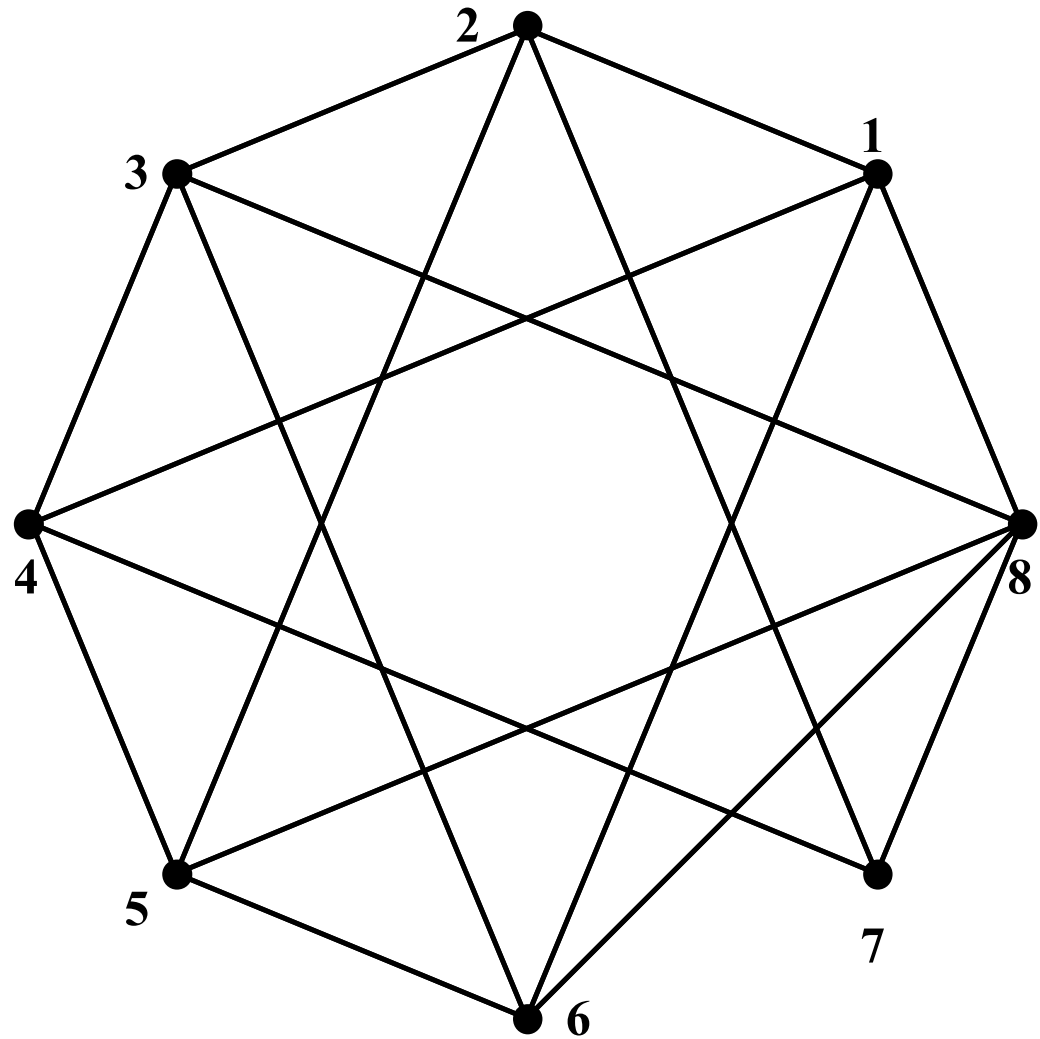
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Ορισμός – Ακατεύθυντο

Γράφημα (graph): Ένα ζεύγος $G = (V, E)$ συνόλων όπου

- Τα στοιχεία του συνόλου E είναι 2-υποσύνολα του συνόλου V
- Τα στοιχεία του V ονομάζονται **κορυφές** (vertices) του γραφήματος G
- Τα στοιχεία του E ονομάζονται **ακμές** (edges)

Παράδειγμα



Γράφημα $G = (V, E)$

Σύνολο κορυφών:

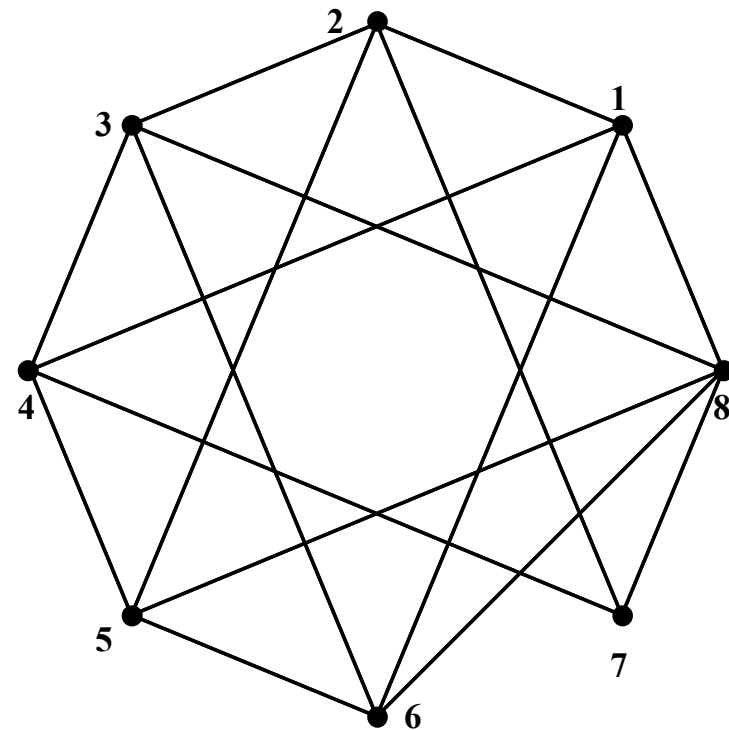
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Σύνολο ακμών:

$$E = \{ \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{1, 8\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{3, 8\}, \\ \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 8\}, \{6, 8\}, \{7, 8\} \}$$

Ορολογία

- Μια τελεία είναι μια **κορυφή/κόμβος**.
- Οι γραμμές ονομάζονται **ακμές**.
- Ο αριθμός των φορών που μια ακμή ακουμπά μια κορυφή ονομάζεται **βαθμός** της κορυφής.
- **Γειτονικές** (adjacent ή neighbours) κορυφές: $a, b \in V(G)$ και $e = \{a, b\} \in E(G)$
- Η ακμή e **συνδέει** (joins) τις
4 κορυφές



Αναπαράσταση Γραφημάτων: Μητρώα Γειτνίασης

Παράσταση με αριθμητική μορφή, κατάλληλη για επεξεργασία με υπολογιστές

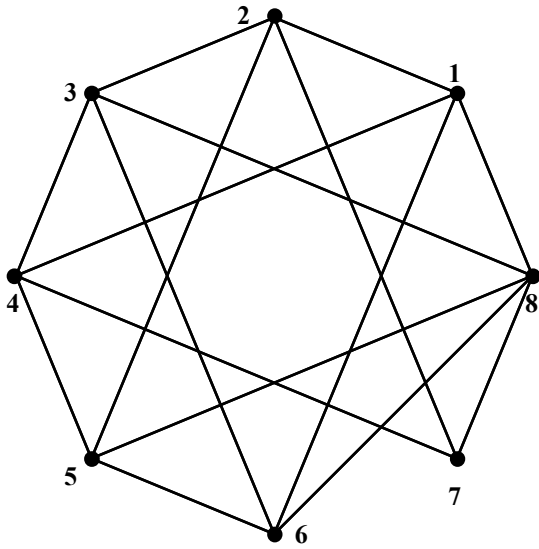
Μητρώα γειτνίασης (adjacency matrix) γραφήματος $G = (V, E)$ με $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$:

Το $n \times n$ μητρώο $\mathbf{A}_G = [a_{ij}^{(G)}]$ με στοιχεία

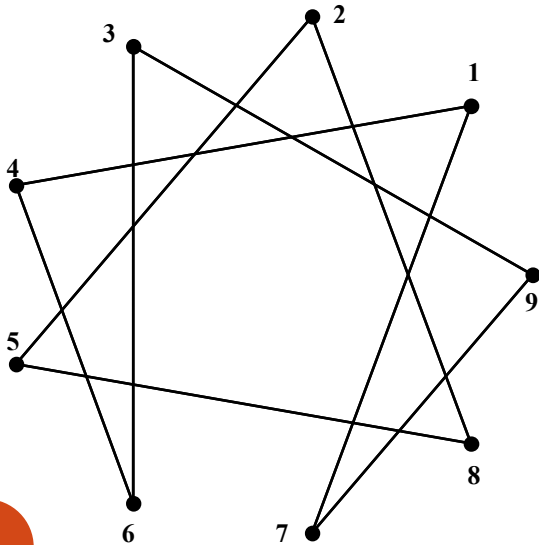
$$a_{ij}^{(G)} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{αν } \{i, j\} \notin E \end{cases}, \quad i, j \in 1, 2, \dots, n$$

$a_{ij}^{(G)} = 1$ αν οι κορυφές v_i και v_j συνδέονται, 0 αλλιώς

Παράδειγμα



$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άθροισμα βαθμών

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Απόδειξη: Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι το άθροισμα όλων των στοιχείων του μητρώου γειτνίασης και είναι το διπλάσιο από το πλήθος των ακμών το οποίο εκφράζεται από το άθροισμα των στοιχείων πάνω (ή κάτω) από τη διαγώνιο.

Βαθμοί Κορυφών

- Πόσες ακμές έχει ένα γράφημα με 10 κορυφές βαθμού 6;
- Αν ένα γράφημα έχει 5 κορυφές, μπορεί κάθε κορυφή να έχει περιττό βαθμό;
- Να δείξετε ότι ένα γράφημα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού.

Θέματα

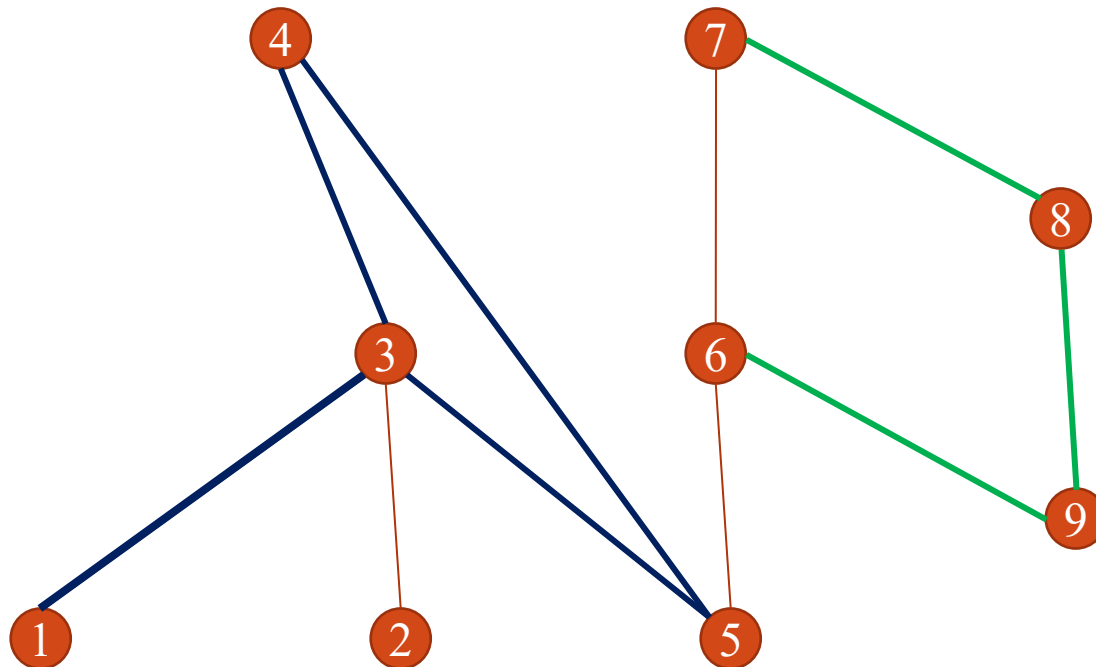
Να απαντήσετε με αιτιολόγηση στις παρακάτω ερωτήσεις:

- α) Μπορεί ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα να έχει περιττό πλήθος κόμβων περιττού βαθμού;
- β) Είναι δυνατόν σε μία ομάδα 9 ατόμων κάθε άτομο να έχει φίλους 5 μόνο άλλα άτομα;
- γ) Υπάρχουν κάποιοι άνδρες και 15 γυναίκες σε ένα δωμάτιο. Κάθε άνδρας κάνει χειραψία με 6 ακριβώς γυναίκες ενώ κάθε γυναίκα με 8 ακριβώς άνδρες. Πόσοι άνδρες υπάρχουν στο δωμάτιο;

Ορολογία Γραφημάτων

- ▣ **Διαδρομή** είναι μια ακολουθία συνεχών ακμών και κορυφών.
- ▣ **Κλειστή διαδρομή – Κύκλος** είναι μια διαδρομή που καταλήγει στην αφετηρία της.
- ▣ **Ίχνος** είναι μια διαδρομή που δεν επαναλαμβάνονται ακμές.
- ▣ **Κύκλωμα** είναι ένας κύκλος που δεν επαναλαμβάνονται ακμές.

Παράδειγμα Διαδρομής – Ίχνους



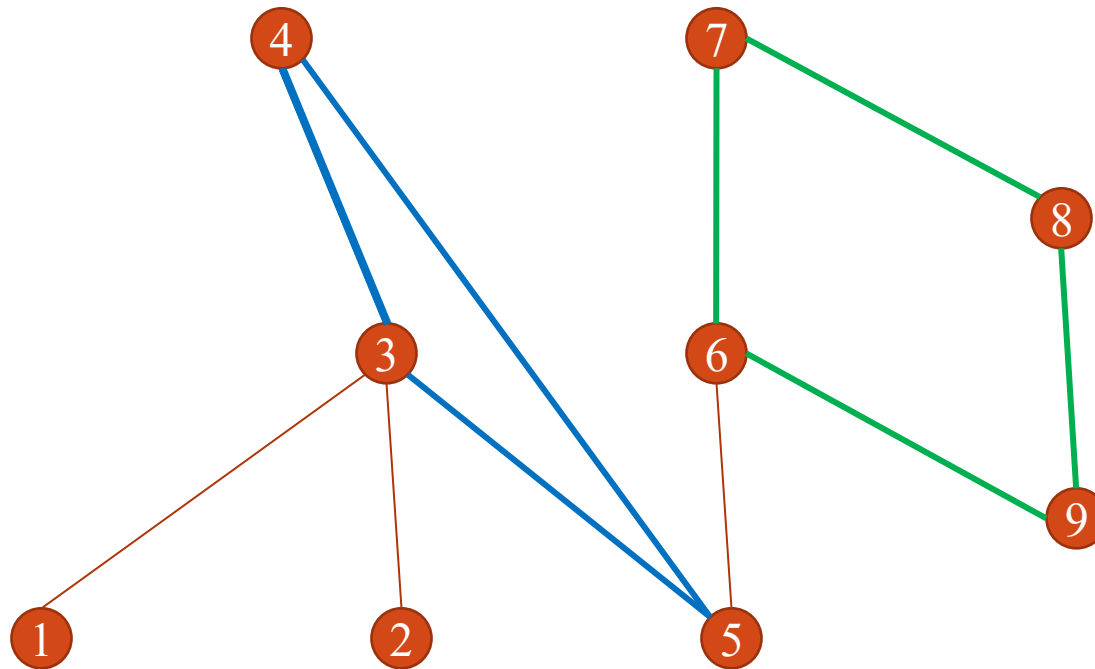
Διαδρομή:

$P_1 = 1, (1,3), 3, (3,4), 4, (4,5), 5, (5,3), 3, (3,4), 4$

Συνήθως δεν γράφουμε τις ενδιάμεσες ακμές.

Ίχνος: $P_2 = 7,8,9,6$

Παράδειγμα Κύκλου – Κυκλώματος

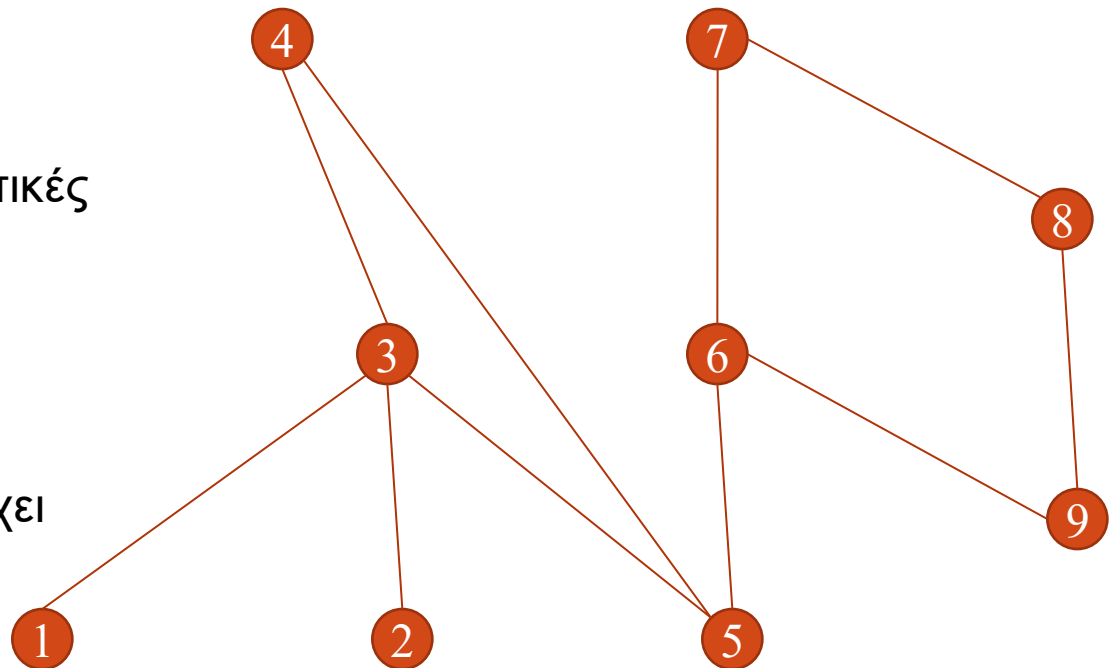


Κύκλος: $P_1 = 3,4,5,3,4$

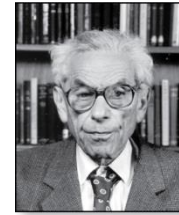
Κύκλωμα: $P_2 = 6,7,8,9,6$

Συνδεδεμένο γράφημα

- Συνδεδεμένο/Συνεκτικό (connected) γράφημα G : Αν οποιεσδήποτε δύο διαφορετικές κορυφές του, επικοινωνούν μέσω μίας τουλάχιστον διαδρομής.
- Στην περίπτωση που υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι κορυφών οι οποίες δεν επικοινωνούν, το γράφημα ονομάζεται μη-συνδεδεμένο (disconnected).



Erdős numbers



Paul Erdős

Example: *Erdős numbers*.

In a collaboration graph, two people a and b are connected by a path when there is a sequence of people starting with a and ending with b such that the endpoints of each edge in the path are people who have collaborated.

TABLE 1 The Number of Mathematicians with a Given Erdős Number (as of early 2006).

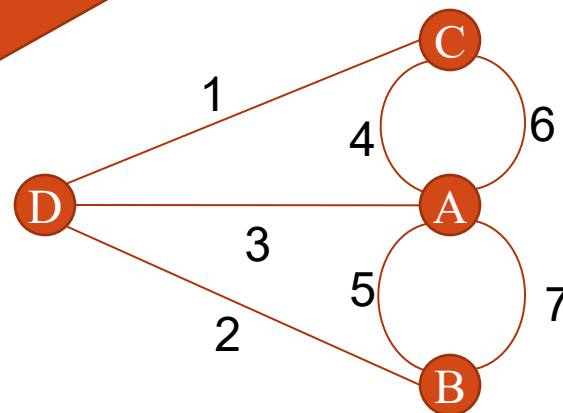
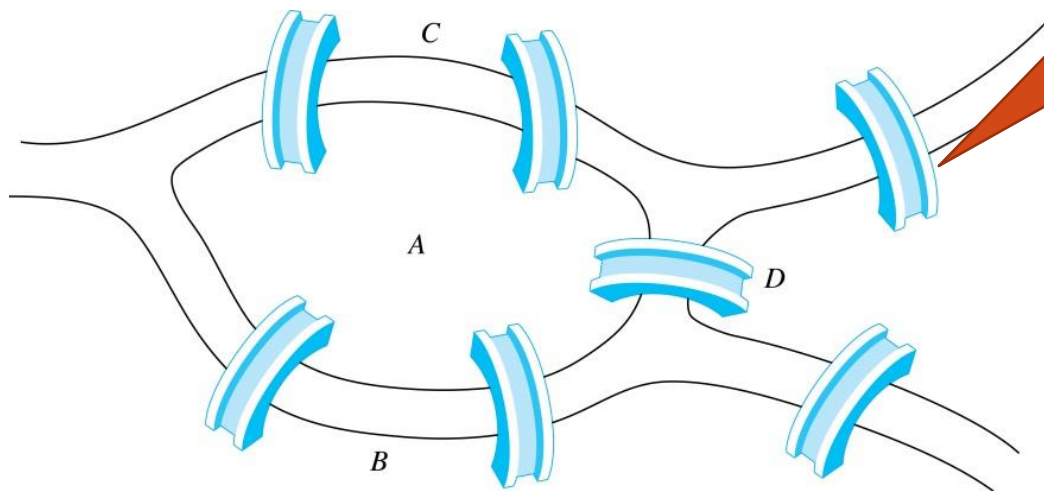
Erdős Number	Number of People
0	1
1	504
2	6,593
3	33,605
4	83,642
5	87,760
6	40,014
7	11,591
8	3,146
9	819
10	244
11	68
12	23
13	5

- In the academic collaboration graph of people who have written papers in mathematics, the *Erdős number* of a person m is the length of the shortest path between m and the prolific mathematician Paul Erdős.
- To learn more about Erdős numbers, visit

<http://www.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html>

Οι γέφυρες του Königs

Euler ίχνος ή κύκλωμα.
Ένα γράφημα με Euler
κύκλωμα λέγεται Eulerian

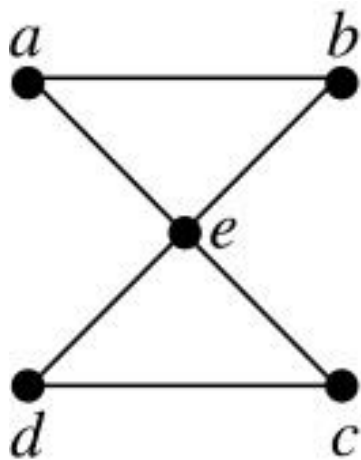


Σε κάθε γράφημα, αν ο βαθμός ενός κόμβου είναι περιττός αριθμός τότε ο κόμβος αυτός δεν μπορεί να είναι εσωτερικός κόμβος της συγκεκριμένης διαδρομής.

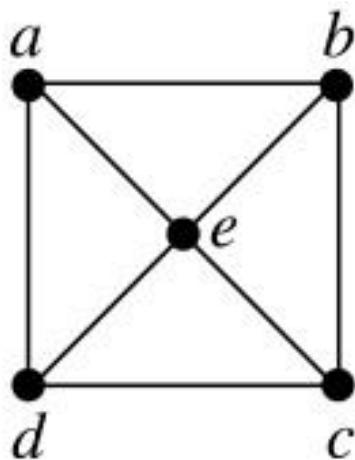
Πότε ένα γράφημα είναι Eulerian (ή μονοκονδυλιά);

Εuler Κύκλωμα

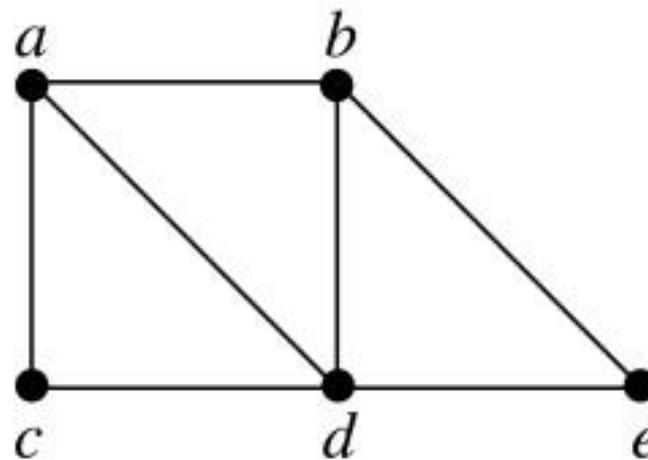
Ποια από τα παρακάτω έχει Euler κύκλωμα;



G_1



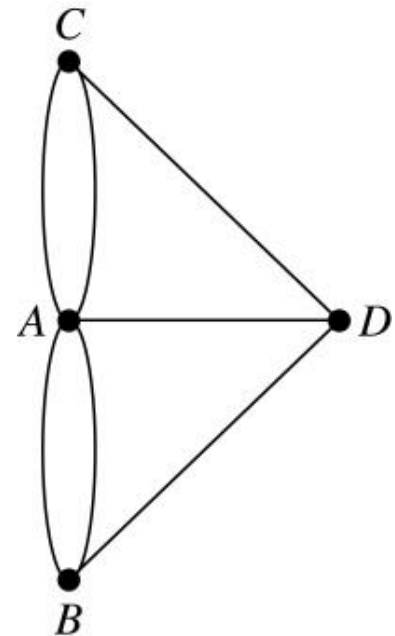
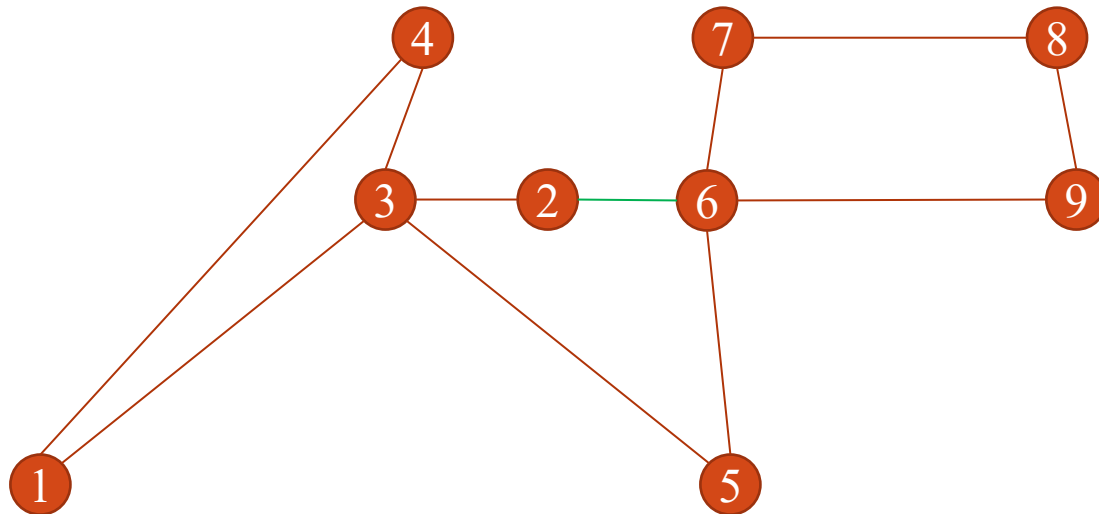
G_2



G_3

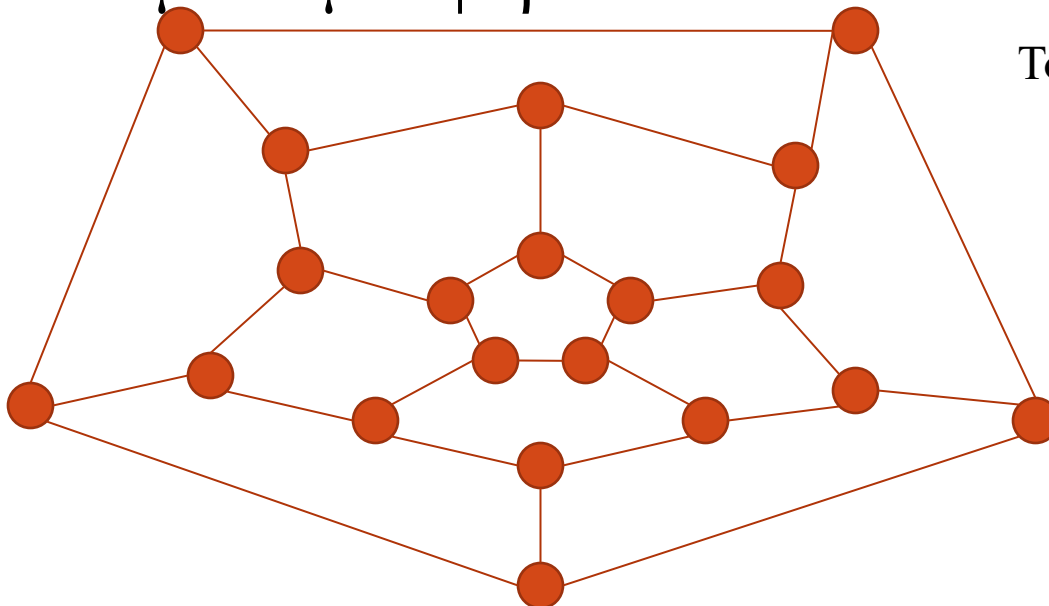
Ικανές και Αναγκαίες Συνθήκες για Euler Κυκλώματα και Ίχνοι

Θεώρημα: Ένα συνδεδεμένο γράφημα με τουλάχιστον δύο κορυφές έχει Euler κύκλωμα αν και μόνο αν κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό ενώ έχει Euler ίχνος αν και μόνο αν έχει ακριβώς δύο κορυφές περιττού βαθμού.

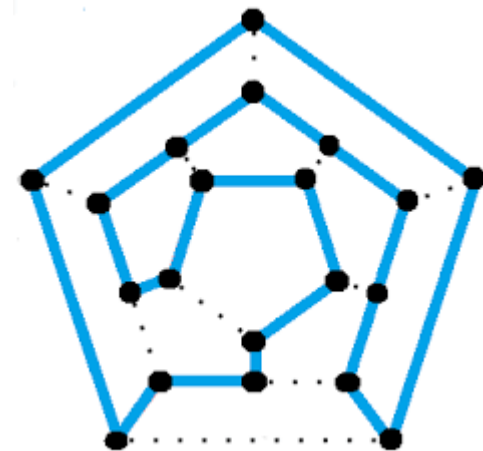


Hamiltonian Γραφήματα

- Ένα γράφημα λέγεται Hamiltonian αν περιέχει έναν Hamiltonian κύκλο
- Ο Hamiltonian κύκλος ενός γραφήματος είναι ένας κύκλος που περνά από κάθε κορυφή του γραφήματος μία και μόνο μία φορά



Το κουίζ του Hamilton



Το πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή (TSP) – Ενημερωτικά 😊

- Έστω γράφημα G όπου κάθε ακμή έχει ένα βάρος.
- Ένας Hamiltonian κύκλος του G με το ελάχιστο συνολικό βάρος λύνει το TSP.
- Δυστυχώς δεν υπάρχει αντίστοιχο θεώρημα με αυτό για Euler κύκλους

Δένδρα



Δένδρα

- Ορισμός 1: Ένα γράφημα το οποίο δεν περιέχει κανέναν κύκλο και είναι συνδεδεμένο, ονομάζεται **δένδρο** (tree)
- Ορισμός 2: Ένα γράφημα που για όλα τα δυνατά ζεύγη κορυφών υπάρχει ένα και μόνο ένα ίχνος μεταξύ τους

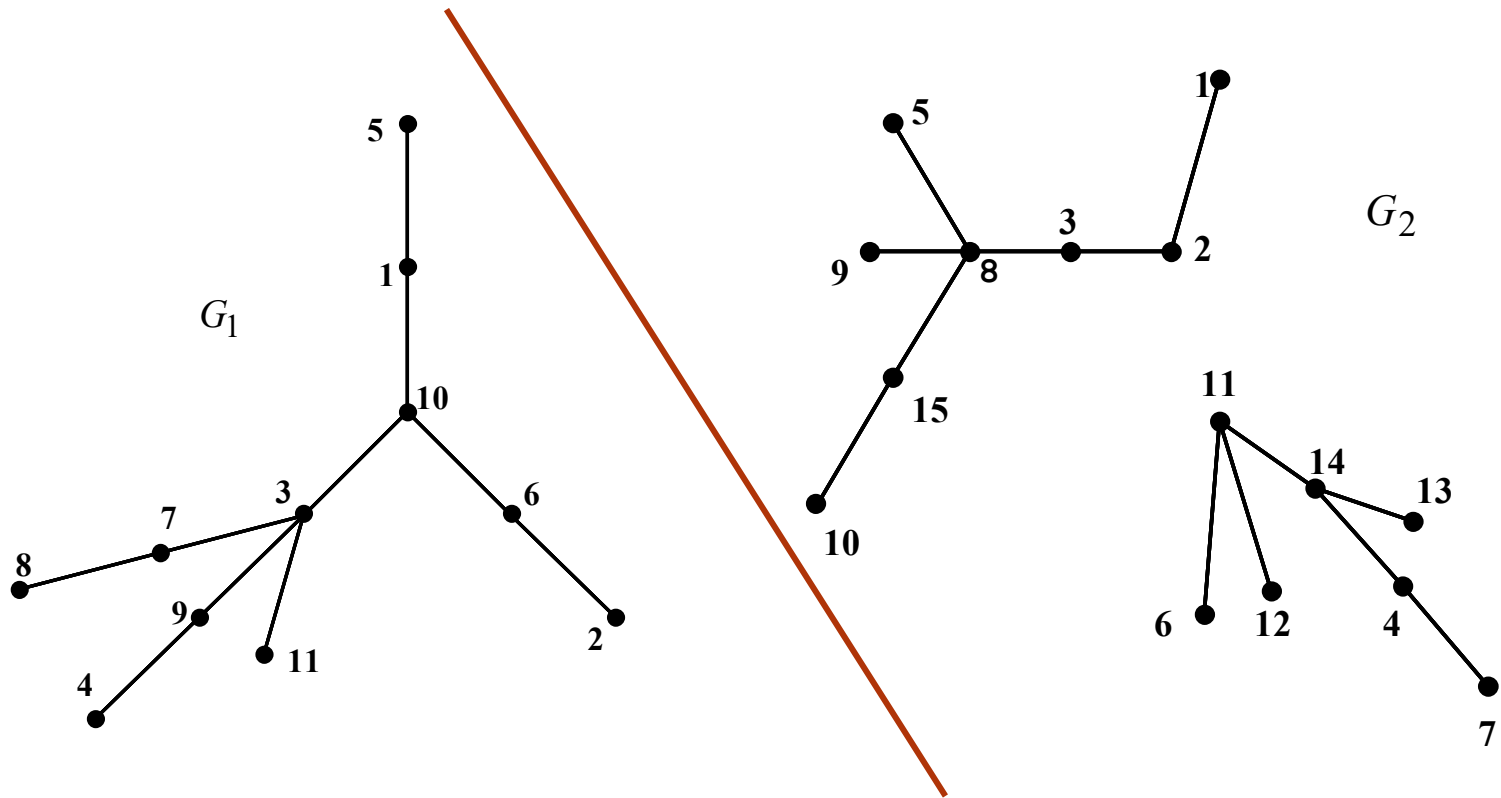
Αποδείξτε ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

- Σε ένα δένδρο οι κορυφές με βαθμό 1 ονομάζονται **φύλλα** (leaves)
- Η διαγραφή ενός φύλλου από ένα δένδρο δεν επηρεάζει τη φύση του γραφήματος, δηλαδή το γράφημα που θα μείνει αν διαγράψουμε ένα φύλλο, θα είναι και πάλι δένδρο.

Παράδειγμα δέντρου – δάσους

G_1 δένδρο (δεν περιέχει κύκλους – συνδεδεμένο)

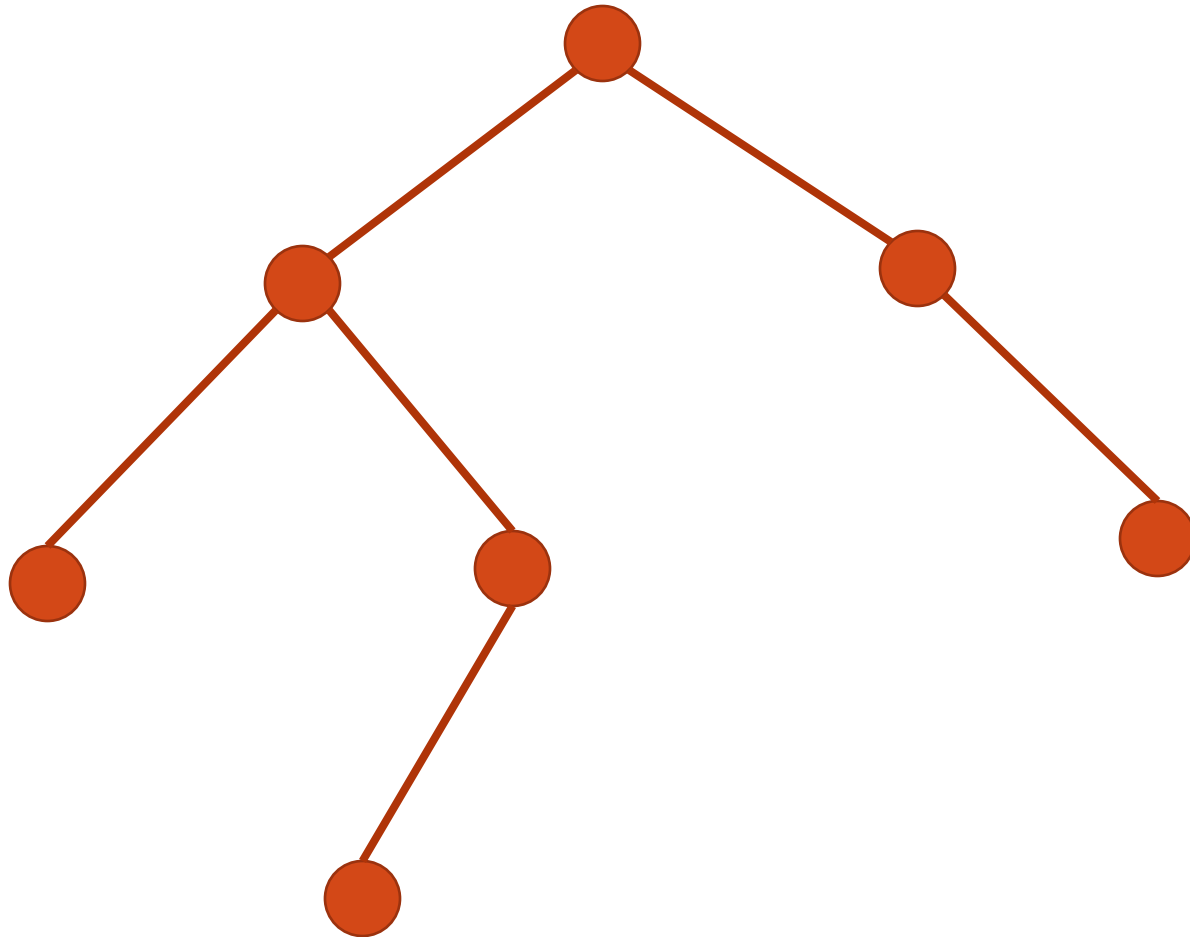
G_2 δάσος (δεν περιέχει κύκλους – μη συνδεδεμένο)



Δένδρα

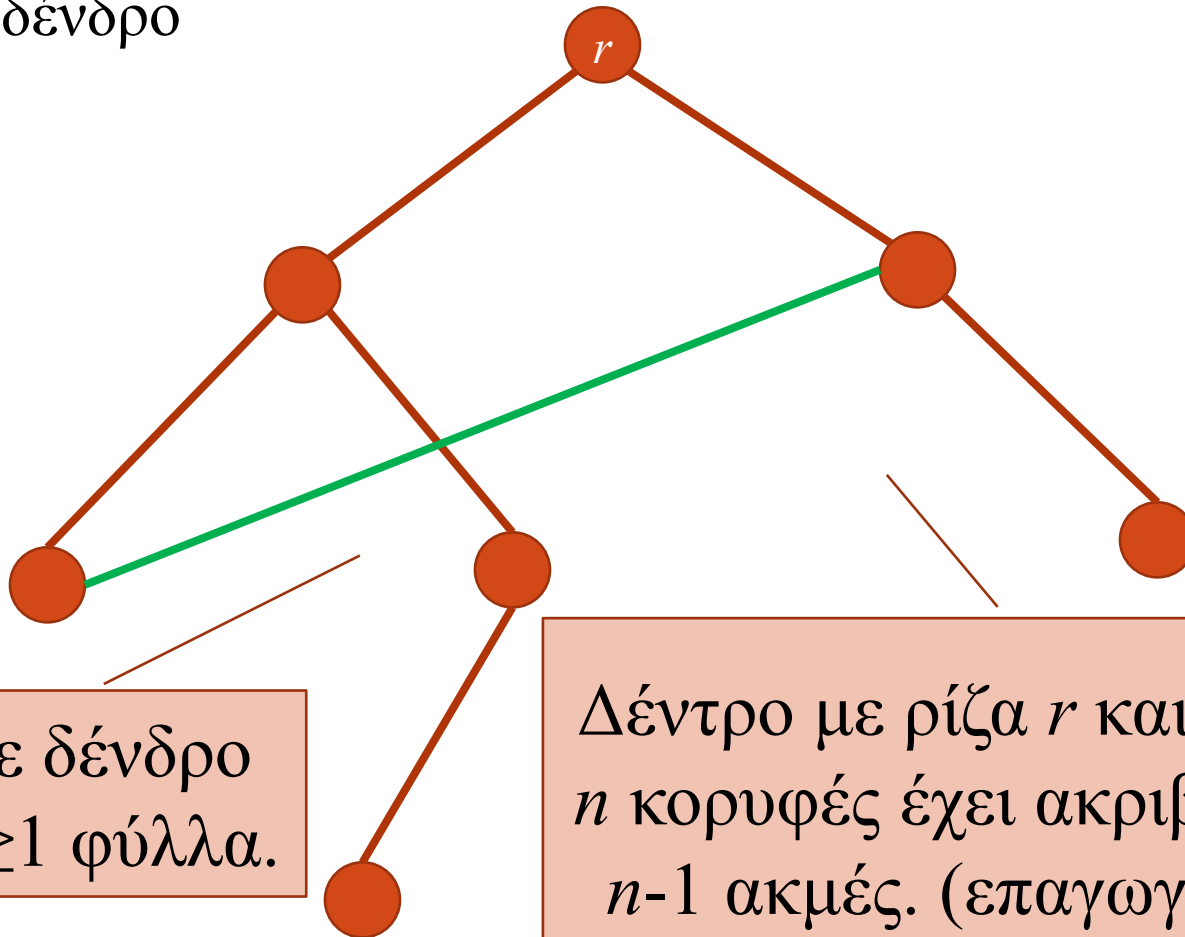
- **Δυαδικό δέντρο:** Κάθε κόμβος του δέντρου έχει βαθμό το πολύ 3 με εξαίρεση τη ρίζα που έχει το πολύ 2.
- **Ρίζα δέντρου:** ένας κόμβος επιλέγεται σαν αρχή του δέντρου
- Οι υπόλοιποι κόμβοι θα είναι είτε δεξιά της ρίζας ή αριστερά όπως το σχεδιάζουμε.

Παράδειγμα Δυαδικού Δέντρου



Παράδειγμα

Πρόσθεση μιας ακμής δημιουργεί κύκλο – το γράφημα δεν είναι πλέον δένδρο

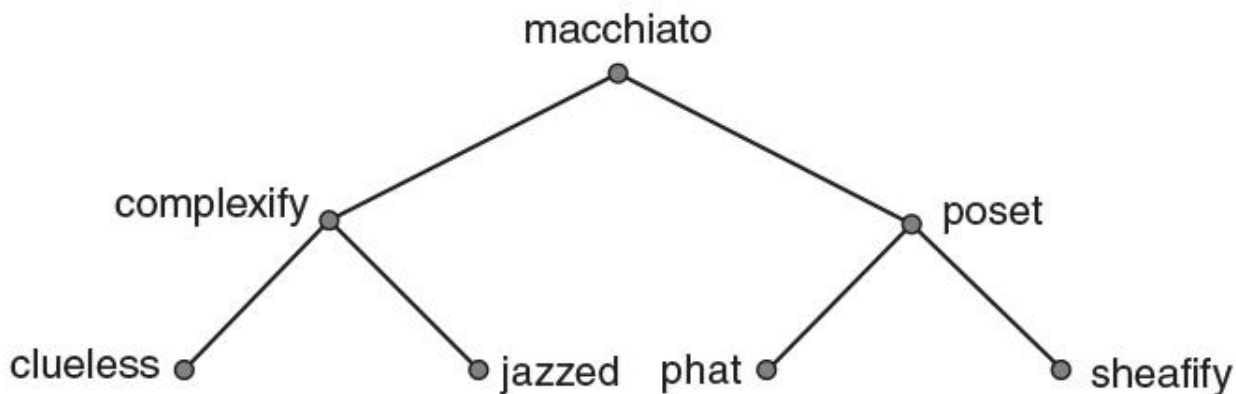


Κάθε δένδρο
έχει ≥ 1 φύλλα.

Δέντρο με ρίζα r και με
 n κορυφές έχει ακριβώς
 $n-1$ ακμές. (επαγωγή)

Δένδρα δυαδικής αναζήτησης

- ▣ Κάθε δεξιό παιδί είναι μεγαλύτερο από τον γονέα του.
- ▣ Κάθε αριστερό παιδί είναι μικρότερο από τον γονέα του.

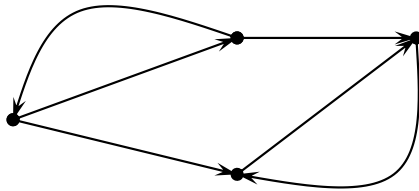


Σχήμα 2.5 Κατασκευή δένδρου δυαδικής αναζήτησης

Κατευθυντικά Γραφήματα

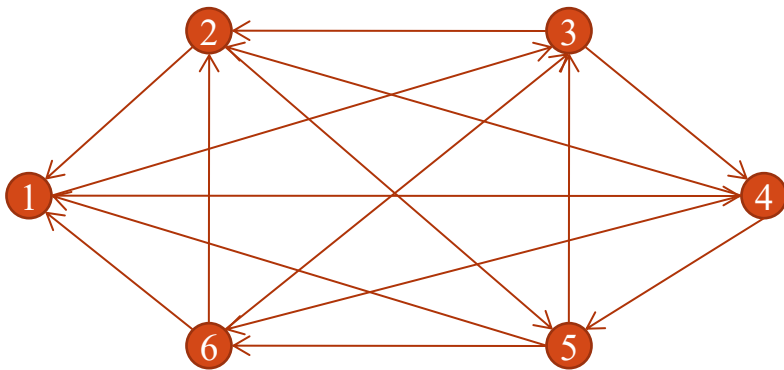
Κατευθυντικά Γραφήματα

Στα *κατευθυντικά γραφήματα* (directed graph ή digraph) η σύνδεση των κορυφών γίνεται με κατευθυντικές ακμές (τόξα).



Τα μητρώα γειτνίασης δεν είναι αναγκαστικά συμμετρικά.

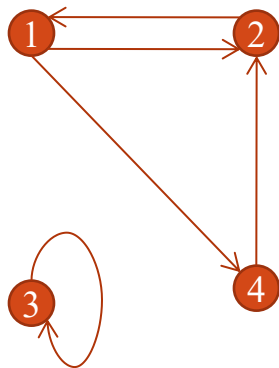
Κατευθυνόμενα γραφήματα – Μητρώο Γειτνίασης



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

- Έστω $A=\{1,2,3,4\}$ και $R=\{(1,2),(1,4),(3,3),(2,1),(4,2)\}$



- Έσω βαθμός κόμβου: Πλήθος ακμών που εισέρχονται στον κόμβο.
- Εξω βαθμός: Πλήθος ακμών που εξέρχονται από τον κόμβο

Θεώρημα Χειρασιών για κατευθυνόμενα γραφήματα:

$$\sum_{v \in V(G)} d_{in}(v) = \sum_{v \in V(G)} d_{out}(v)$$

(2 Μονάδες) (Ιούνιος 2016)

Έστω ότι $G=(V,E)$ είναι ένα απλό γράφημα (δεν έχει βρόχους και πολλαπλές ακμές μεταξύ ίδιων κόμβων).

Έστω ότι R είναι η σχέση επί του V που αποτελείται από ζεύγη κορυφών (u,v) έτσι ώστε να υπάρχει διαδρομή από το u στο v ή $u=v$. Να δειχτεί ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Θέμα 11^ο: (50 μονάδες)

α) (10) 1. (7) Υπάρχει απλό γράφημα που να έχει $n \geq 2$ κορυφές και κάθε κορυφή να έχει διαφορετικό βαθμό; Αποδείξτε την απάντησή σας.

2. (3) Σε μία ομάδα δύο ή περισσότερων ανθρώπων, πρέπει πάντα να υπάρχει ένα ζεύγος ανθρώπων που να γνωρίζονται με το ίδιο πλήθος ανθρώπων στην ομάδα. Γιατί;

β) (10) Ορίζουμε τη σχέση R πάνω στις ακμές του γραφήματος $G=(V,E)$, έτσι ώστε για δύο ακμές $e, f \in E$ να ισχύει ότι $(e,f) \in R$ αν και μόνο αν οι δύο ακμές έχουν τουλάχιστον μία κοινή κορυφή. Να δείξετε αν η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας.

δ) (15) Έστω το κατηγορημα $P(x,y)$ που ορίζεται πάνω στα μη-κατευθυντικά γραφήματα και όπου ο τομέας αναφοράς είναι οι κορυφές του γραφήματος. Το $P(x,y)$ δηλώνει ότι «*οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή*». Σας ζητούνται τα εξής:

1. (8) Να δώσετε ένα γράφημα με τουλάχιστον 6 κορυφές και μέγιστο βαθμό κορυφής 3 που ικανοποιεί τον παρακάτω τύπο:

$$\exists x \exists y \exists z (P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x) \wedge \forall w (\neg P(w,x) \wedge \neg P(w,y) \rightarrow P(w,z)))$$

2. (7) Να δώσετε μία λογική πρόταση που χρησιμοποιεί το κατηγορημα $P(x,y)$ που να δηλώνει ότι «*υπάρχουν ακριβώς δύο κορυφές με βαθμό ίσο με 1*».

Σεπτέμβρης 2025

α) (0,8) Για το διπλανό γράφημα απαντήστε τα εξής: i) Γιατί το συγκεκριμένο γράφημα δεν έχει κύκλο Euler; ii) Πως θα αλλάζατε το γράφημα με το ελάχιστο πλήθος προσθαφαιρέσεων ακμών ώστε να έχει κύκλο Euler;

