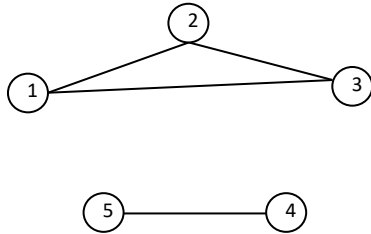


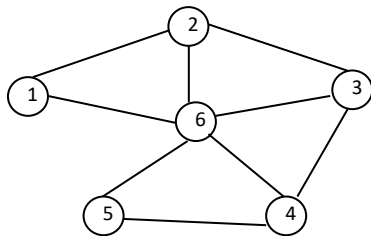
1. Σχεδίαση Γραφημάτων (4.8.1)

Να σχεδιαστούν τα γραφήματα $G=(V,E)$

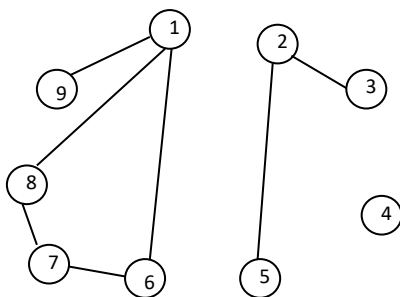
A) $V=\{1,2,3,4,5\}$ και $E=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{4,5\}\}$



B) $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ και $E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,6\},\{2,6\},\{3,6\},\{3,4\},\{4,6\},\{5,6\},\{4,5\}\}$



Γ) $V=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ και $E=\{\{2,3\},\{2,5\},\{1,9\},\{1,8\},\{1,6\},\{6,7\},\{7,8\}\}$

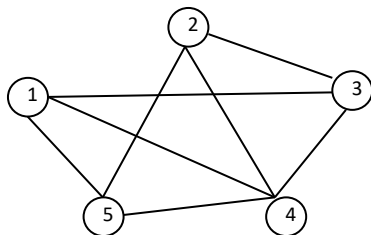


2. Σχεδίαση Γραφημάτων (4.8.2)

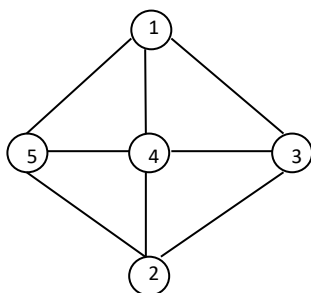
Να σχεδιαστούν τα γραφήματα που ορίζονται από τον πίνακα γειτνίασης.

A)

Κορυφές	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	1	1	0	1	0
4	1	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

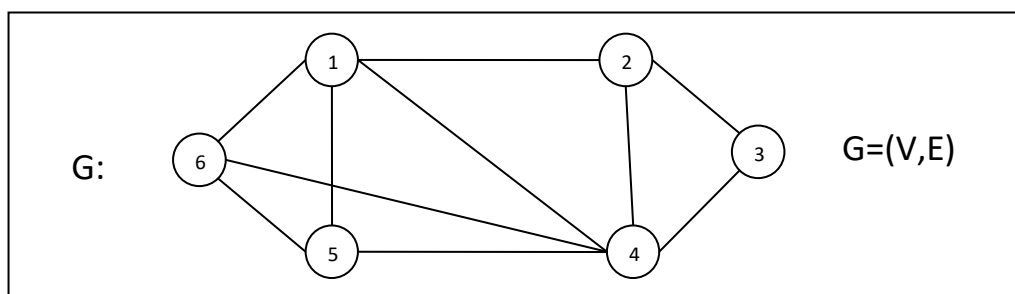


Επίπεδο γράφημα:



3. Πίνακας Αντιστοίχισης (4.8.12)

Να βρεθεί ο πίνακας αντιστοίχισης του γραφήματος αφού αριθμηθούν κατάλληλα οι κορυφές και οι ακμές του.



$V=\{1,2,3,4,5,6\}$ $E=\{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}$

Ο πίνακας αντιστοίχισης (6 x 10)

$$N_G = [n_{i,e}] \text{ όπου } i \in V, e \in E \text{ και } n_{i,e} = \begin{cases} 1 & i \in e \\ 0 & i \notin e \end{cases}$$

	{1,2}	{1,4}	{1,5}	{1,6}	{2,3}	{2,4}	{3,4}	{4,5}	{4,6}	{5,6}
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
5	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

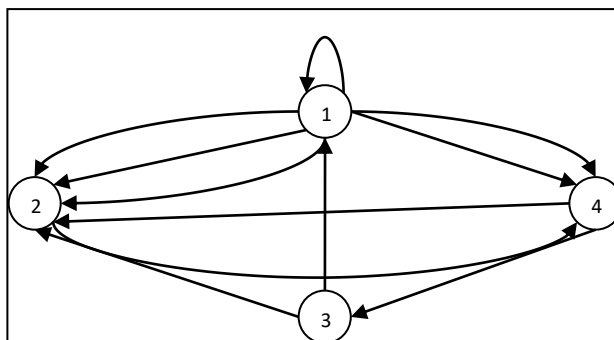
Παρατήρηση: Αν πάρουμε $N_G \cdot N'_G = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{3} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \mathbf{5} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{3} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{3} \end{bmatrix}$ (το ' δηλώνει ανάστροφο)

Στην διαγώνιο είναι οι βαθμοί της κάθε κορυφής.

4. Σχεδίαση Κατευθυνόμενων Γραφημάτων (4.8.13)

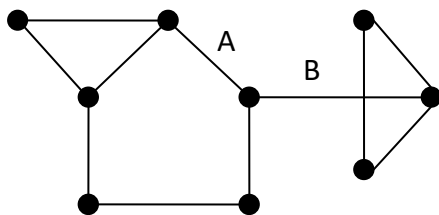
Να σχεδιασθεί το κατευθυνόμενο γράφημα που ορίζεται από τον εξής πίνακα γειτνίασης.

Κορυφές	1	2	3	4
1	1	3	0	2
2	0	0	0	1
3	1	1	0	0
4	0	1	1	0



5. Θεωρία Γραφημάτων

Μία ακμή σε ένα συνδεδεμένο γράφημα καλείται *ακμή αποκοπής* αν η απομάκρυνσή της μετατρέπει το γράφημα σε μη συνδεδεμένο.



B

A) Για το παραπάνω γράφημα, η A ή η B είναι ακμή αποκοπής και γιατί;

Η B.

B) Αποδείξτε ότι σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα, μία ακμή e είναι ακμή αποκοπής αν και μόνο αν κανένας απλός κύκλος δεν περιέχει την e .

Πρέπει να αποδείξουμε ότι αν μία ακμή είναι κομμάτι ενός απλού κύκλου τότε δεν είναι ακμή αποκοπής και αν δεν περιέχεται σε έναν απλό κύκλο τότε είναι ακμή αποκοπής.

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι αν η e περιέχεται σε ένα κύκλο τότε η e δεν είναι ακμή αποκοπής. Αφού το G είναι συνδεδεμένο υπάρχει μονοπάτι P μεταξύ κάθε ζευγαριού κόμβων u και v . Θα δείξουμε ότι θα υπάρχει ένα μονοπάτι μεταξύ u και v αφού η e διαγραφεί. Έστω $e, e_1, e_2, \dots, e_n$ οι ακμές στον απλό κύκλο που περιέχει το e . Αφού ο κύκλος είναι απλός, καμία από τις ακμές $e_1, e_2, \dots, e_n$ δεν θα είναι ίση με e . Επομένως, μπορούμε να φτιάξουμε ένα νέο μονοπάτι που συνδέει το u και v , αλλά δεν περιέχει την ακμή e αντικαθιστώντας είτε το $e_1, e_2, \dots, e_n$ ή $e_n, e_{n-1}, \dots, e_1$ στη θέση της ακμής e στο μονοπάτι P . Αυτό δείχνει ότι το γράφημα παραμένει συνδεδεμένο αφού η ακμή e διαγράφηκε και άρα δεν είναι ακμή αποκοπής.

Έπειτα αποδεικνύουμε ότι αν η e δεν είναι ακμή αποκοπής τότε περιέχεται σε απλό κύκλο. Σε ένα συνδεδεμένο γράφημα υπάρχει πάντα ένα απλό μονοπάτι μεταξύ οποιωνδήποτε κόμβων του γραφήματος. Αφού η e δεν είναι ακμή αποκοπής το γράφημα μετά την διαγραφή της e παραμένει συνδεδεμένο. Άρα ακόμα και μετά τη διαγραφή θα υπάρχει ένα μονοπάτι P που θα συνδέει τους κόμβους στα άκρα της ακμής e . Συνδέοντας την ακμή e με το μονοπάτι P προκύπτει ένας απλός κύκλος που περιέχει την ακμή e .

Γ) Χρησιμοποιώντας το (B) αποδείξτε ότι κάθε ακμή σε ένα δέντρο είναι ακμή αποκοπής ενώ καμία ακμή σε ένα $n \times n$ πλέγμα δεν είναι ακμή αποκοπής. Γιατί είναι σημαντικό;

Το δέντρο είναι ένα άκυκλο συνδεδεμένο γράφημα και άρα από το (B) όλες οι ακμές είναι ακμές αποκοπής.

Για ένα πλέγμα, όταν $n = 1$, τότε προφανώς ισχύει. Αλλά αν $n > 1$, κάθε ακμή είναι μέρος ενός κύκλου.

Οι ακμές αποκοπής είναι πολύ σημαντικές αφού δείχνουν τα αδύνατα σημεία ενός δικτύου (π.χ. σε παράλληλο δίκτυο επεξεργαστών). Όσο περισσότερες ακμές απαιτούνται για να αποσυνδεθεί το δίκτυο τόσο καλύτερα.

6. Μονοπάτια(Wiley 7.2.9)

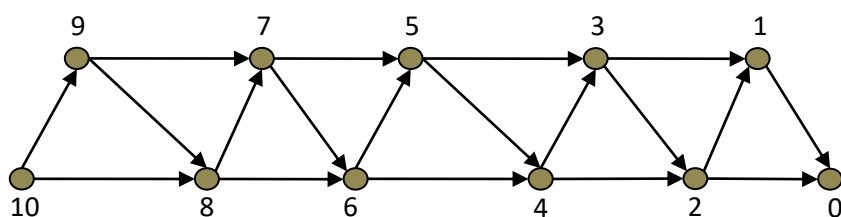
Να δείξετε ότι αν ένα γράφημα G έχει n κόμβους τότε το μακρύτερο απλό μονοπάτι θα έχει $n-1$ ακμές.

Έστω G ένα γράφημα με n κόμβους, και έστω P ένα μονοπάτι στο G . Αφού κάθε μονοπάτι δεν μπορεί να χρησιμοποιεί τον ίδιο κόμβο δύο φορές, το P δεν περιέχει περισσότερους από n κόμβους. Αφού σε κάθε μονοπάτι το πλήθος των ακμών είναι ίσο με το πλήθος των κορυφών μειωμένο κατά 1, το πλήθος των ακμών του P δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του $n-1$.

7. Παιχνίδια (Wiley Ex. 7.5.3)

Δύο άνθρωποι παίζουν ένα παιχνίδι με 10 πέτρες όπου στον γύρο του ο καθένας μπορεί να αφαιρέσει μία ή δύο πέτρες. Κερδίζει αυτός που αφαιρεί πέτρα(ες) τελευταίος. Υπάρχει στρατηγική νίκης για έναν από τους δύο παίκτες;

Καταρχήν φτιάχνουμε ένα γράφημα που δείχνει την κατάσταση του παιχνιδιού καθώς παίζουμε.

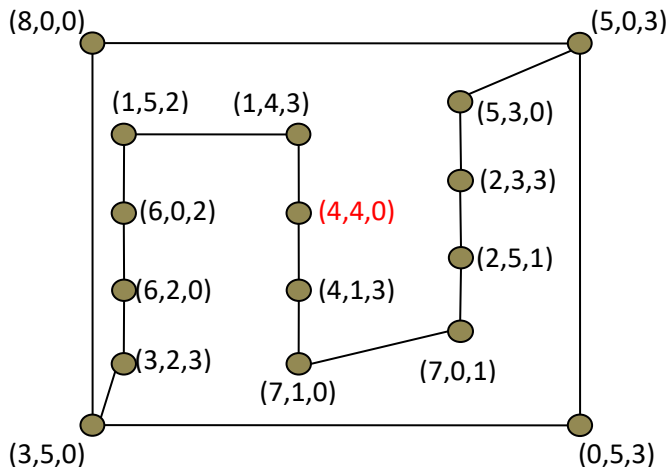


Θα λέμε ότι ένας κόμβος είναι *καλός* αν ο παίκτης που είναι σε αυτόν μπορεί να κερδίσει ανεξαρτήτως τι θα κάνει ο άλλος. Αντίστοιχα ορίζουμε τον *κακό* κόμβο. Για να κερδίσει ο παίκτης A θα πρέπει ο παίκτης B να είναι είτε στον κόμβο 1 ή στον κόμβο 2, οπότε και ο A βγάζει τον αντίστοιχο αριθμό πετρών και κερδίζει. Άρα ο 0 είναι καλός κόμβος ενώ ο 1 και 2 είναι κακοί κόμβοι. Όμως ο A για να αναγκάσει τον B να κινηθεί στους 1 ή 2 θα έπρεπε να είναι στον κόμβο 3, ο οποίος άρα είναι καλός κόμβος. Με τον ίδιο τρόπο οι κόμβοι 4 και 5 είναι κακοί κόμβοι. Τέλος, ακολουθώντας την ίδια λογική, οι κόμβοι 6 και 9 είναι καλοί κόμβοι ενώ οι υπόλοιποι είναι κακοί. Αυτό σημαίνει ότι ο παίκτης A που παίζει πρώτος θα κινηθεί από τον κακό κόμβο 10 στον καλό 9 και από εκεί ότι και αν παίζει ο B πάντα ο A θα είναι σε καλό κόμβο και θα κερδίσει. Άρα ο A έχει πάντα μία στρατηγική νίκης. Τι θα γινόταν αν είχαμε 9 πέτρες;

8. Παιχνίδια (Wiley 7.5.1)

Έστω ότι σε ένα κουβά έχουμε 8 λίτρα νερό και έχουμε επίσης δύο δοχεία όπου το πρώτο χωράει 5 λίτρα και το δεύτερο χωράει 3 λίτρα νερού. Χρησιμοποιώντας μόνο αυτά τα δοχεία βρείτε όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να χωρίσουμε το νερό ώστε στον κάδο να είναι 4 λίτρα και στο μεγάλο δοχείο 4 λίτρα.

Η λύση αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι στο γράφημα από το $(8,0,0)$ στο $(4,4,0)$ στο παρακάτω γράφημα. Προσέξτε ότι στο γράφημα κάθε κόμβος μέσα στο τετράγωνο έχει ακμές προς δύο κόμβους που βρίσκονται στις γωνίες του τετραγώνου αλλά τις αφήσαμε έξω για ευκολία. Το παιχνίδι έχει δύο λύσεις, η μία λίγο μικρότερη της άλλης.



9. Γραφήματα (Rosen 8.2.5)

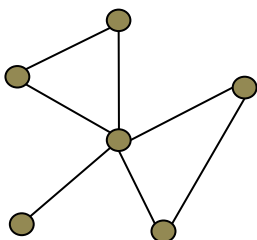
Μπορεί να υπάρξει γράφημα με 15 κορυφές, που η καθεμία έχει βαθμό 5;

Όχι, αφού $15 \cdot 5 = 75$ και το άθροισμα των βαθμών όλων των κόμβων δεν μπορεί να είναι περιττός αριθμός.

10. Γραφήματα (Rosen 8.2.27)

Πόσες ακμές έχει ένα γράφημα αν έχει κορυφές με βαθμό 5, 2, 2, 2, 2, 1. Να σχεδιαστεί το γράφημα.

$$2E = 5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 14 \rightarrow E = 7$$



11. Γραφήματα (Rosen 8.4.37)

Να δειχτεί ότι απλό γράφημα G με n κορυφές είναι συνεκτικό αν έχει περισσότερες από $(n-1)(n-2)/2$ ακμές.

Έστω ότι το G δεν είναι συνεκτικό. Τότε έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες όπου μία από τις δύο θα έχει k κόμβους, όπου $1 \leq k \leq n-1$. Το μέγιστο πλήθος ακμών σε αυτή την περίπτωση για τον G είναι:

$$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{k(k-1) + (n-k)(n-k-1)}{2} = k^2 - nk + \frac{n^2 - n}{2}$$

Αυτή η συνάρτηση ελαχιστοποιείται στο $k=n/2$ και μεγιστοποιείται για $k=1$ ή $k=n-1$. Για αυτές τις τιμές το πλήθος των ακμών είναι $(n-1)(n-2)/2$ και άρα αφού το G είναι συνεκτικό θα έχει σίγουρα περισσότερες από τόσες.

Άλυτες Ασκήσεις

1. (Wiley 7.5.4) Ένας θέλει να περάσει ένα ποτάμι και έχει μαζί του ένα τσακάλι, μία κατσίκਾ και ένα δέμα άχυρο. Το τσακάλι τρώει την κατσίκα και η κατσίκα το άχυρο. Αν υπάρχει μία βάρκα στην οποία χωράνε τρεις κάθε φορά να βρείτε όλους τους τρόπους με τους οποίους ο άνθρωπος θα περάσει απέναντι αυτά που έχει χωρίς να φαγωθούν. Ποια είναι η καλύτερη λύση;
2. (Rosen 8.2.6) Να δειχτεί ότι επί του συνόλου ανθρώπων σε μία γιορτή το άθροισμα του πλήθους των ανθρώπων με τους οποίους κάποιος έκανε χειραψία είναι άρτιος αριθμός. Θεωρείστε ότι κανένας δεν κάλεσε χειραψία με τον εαυτό του.
3. (Rosen 8.2.28) Υπάρχει απλό γράφημα με 6 κορυφές με τους παρακάτω βαθμούς; Αν ναι, να σχεδιαστεί το γράφημα.
 - a. 0,1,2,3,4,5
 - b. 1,2,3,4,5,6
 - c. 2,2,2,2,2,2
 - d. 3,2,3,2,3,2
 - e. 3,2,2,2,2,3
 - f. 1,1,1,1,1,1
 - g. 3,3,3,3,3,5
 - h. 1,2,3,4,5,5