

1. Σχέσεις (1.7.26)

Δίνεται $A = \{1, 2, \dots, 10\}$. Έστω η σχέση R : «ο α διαιρεί τον β », ($\alpha, \beta \in A$).

1. Να γραφεί η σχέση σαν σύνολο διατεταγμένων ζευγαριών

$$R = \{(\alpha, \beta) : \beta = \kappa\alpha, \kappa \in N, \alpha, \beta \in A\} \subseteq A^2$$

$$= \{(1,1), (1,2), \dots, (1,10), (2,2), (2,4), \dots, (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10)\}$$

2. Να γίνει ο πίνακας της σχέσης.

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$$|R|=27.$$

3. Να περιγραφεί η R^{-1} και να γραφεί ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών.

R^{-1} : «ο β διαιρείται από τον α » ή «ο β είναι πολλαπλάσιο του α »

$$R^{-1} = \{(\beta, \alpha) : \beta = \kappa\alpha, \kappa \in N, \alpha, \beta \in A\} \subseteq A^2$$

$$= \{(1,1), (2,1), \dots, (10,1), (2,2), (4,2), \dots, (10,2), (3,3), (6,3), (9,3), (4,4), (8,4), (5,5), (10,5), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10)\}$$

4. Να εξεταστούν οι R και R^{-1} ως προς τις ιδιότητες.

Ανακλαστική: Είναι γιατί $(a, a) \in R$ και $(a, a) \in R^{-1}$, $\forall a \in R$

Μη-ανακλαστική: Δεν είναι και οι δύο.

Συμμετρική: Δεν είναι και οι δύο.

Αντισυμμετρική: Είναι και οι δύο. Αν $(\alpha, \beta) \in R$ και $(\beta, \alpha) \in R$, τότε $\beta = \kappa\alpha$ και $\alpha = \lambda\beta$ από όπου προκύπτει ότι $\alpha = \kappa\lambda\alpha$ και άρα $\kappa = \lambda = 1$, οπότε και $\beta = \alpha$. Ομοίως για R^{-1} .

Μεταβατική: $\left. \begin{array}{l} (\alpha, \beta) \in R \Rightarrow \beta = \kappa\alpha, \kappa \in N \\ (\beta, \gamma) \in R \Rightarrow \gamma = \lambda\beta, \lambda \in N \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma = \kappa\lambda\alpha \Rightarrow \gamma = \mu\alpha, \mu \in N \Rightarrow (\alpha, \gamma) \in R$

Ομοίως για R^{-1} .

5. Να εξεταστεί αν οι R και R^{-1} είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

Εφόσον και οι δύο δεν είναι συμμετρικές δεν είναι και σχέσεις ισοδυναμίας.

6. Να εξεταστεί αν R και R^{-1} είναι συναρτήσεις.



Και οι δύο δεν είναι συναρτήσεις.

2. Σχέσεις (1.7.28)

Δίνεται το σύνολο $B = \{0,1\}$.

1. Να βρεθούν όλες οι σχέσεις που είναι δυνατό να οριστούν στο B .
Οποιαδήποτε σχέση θα είναι υποσύνολο του $B \times B = B^2$.

$$B^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \quad |B^2| = |B|^2 = 4$$

Το B^2 έχει συνολικά $P(B^2) = 2^4 = 16$ δυνατά υποσύνολα που καθορίζουν και το πλήθος των σχέσεων. Οι πίνακες των σχέσεων είναι οι εξής:

R	0	1	R	0	1	R	0	1	R	0	1	R	0	1	R	0	1	R	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1

R	0	1	R	0	1	R	0	1	R	0	1	R	0	1	R	0	1	R	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

R	0	1	R	0	1
0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0

$= B^2$ $= \emptyset$

2. Ποιες είναι οι συναρτήσεις;

Παρατηρώντας τους παραπάνω πίνακες θα πρέπει κάθε γραμμή να έχει ακριβώς ένα «1».

Αυτές αναπαρίστανται από τους κοκκινισμένους πίνακες.

$\{(0,1), (1,1)\}, \{(0,0), (1,0)\}, \{(0,0), (1,1)\}, \{(0,1), (1,0)\}$

3. Συνάρτηση

Η συνάρτηση $g: Q \rightarrow Q$, όπου $g(x) = 5x - 1$ είναι επί.

Έστω $y \in Q$. Έστω ότι $x = \frac{y+1}{5}$. Αφού $y \in Q$ συνεπάγεται ότι και $x \in Q$. Άρα:

$$g(x) = g\left(\frac{y+1}{5}\right) = 5\left(\frac{y+1}{5}\right) - 1 = (y+1) - 1 = y$$

Επομένως, κάθε y του πεδίου τιμών είναι έξοδος του g και άρα η g είναι επί.

4. Κλάσεις Ισοδυναμίας (Wiley 4.5-10)

Έστω $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $R = \{(x, y) \in A \times A : x - y \text{ διαιρείται από το } 3\}$.

a. Αποδείξτε ότι η R είναι ανακλαστική.

Έστω $\alpha \in A$. Αφού $\alpha - \alpha = 0$ και το 0 διαιρείται από το 3, συνεπάγεται ότι $(\alpha, \alpha) \in R$.

b. Αποδείξτε ότι η R είναι συμμετρική.

Έστω $\alpha \in A$ και $\beta \in A$ έτσι ώστε $(\alpha, \beta) \in R$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha - \beta = 3\kappa$, για κάποιον ακέραιο κ . Επομένως, $\beta - \alpha = 3(-\kappa)$ και άρα και το $\beta - \alpha$ διαιρείται από το 3. Άρα $(\beta, \alpha) \in R$.

c. Αποδείξτε ότι η R είναι μεταβατική.

Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in A$ έτσι ώστε $(\alpha, \beta) \in R$ και $(\beta, \gamma) \in R$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha - \beta = 3\kappa$ και $\beta - \gamma = 3\lambda$ για κάποιους ακέραιους κ, λ . Άρα:

$$\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) = 3\kappa + 3\lambda = 3(\kappa + \lambda)$$

Άρα το $\alpha - \gamma$ διαιρείται από το 3 και άρα το $(\alpha, \gamma) \in R$.

d. Ποιά είναι η διαμέριση του A βάση της σχέσης ισοδυναμίας R :

$\{\{0, 3, 6\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\}$

5. Κλάσεις Ισοδυναμίας (Wiley 4.5-10)

Έστω R μία σχέση στο $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ έτσι ώστε $(x, y) R (p, q)$ αν και μόνο αν $x + q = y + p$. Να δείξετε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Η συγκεκριμένη σχέση είναι:

α) ανακλαστική: αφού $(x, y) R (x, y)$ σημαίνει ότι $x + y = y + x$ που ισχύει.

β)συμμετρική: αφού $(x, y)R(p, q)$ σημαίνει ότι $x + q = y + p$ που μπορεί να γραφεί σαν $y + p = x + q$ που σημαίνει $(p, q)R(x, y)$. Άρα $(x, y)R(p, q)$ δίνει $(p, q)R(x, y)$ και άρα η R είναι συμμετρική.

γ)μεταβατική: Έστω $(x, y)R(p, q)$ και $(p, q)R(a, b)$ το οποίο σημαίνει ότι $x + q = y + p$ και $p + b = q + a$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $(x + q) + (p + b) = (y + p) + (q + a)$ από όπου προκύπτει ότι $(x + b) + (p + q) = (y + a) + (p + q)$ και αφαιρώντας το $(p + q)$ και από τα δύο μέλη παίρνουμε $x + b = y + a$ οπότε $(x, y)R(a, b)$

Άρα η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Άλυτες Ασκήσεις

1. (Wiley 4.1-10) Αποφασίστε ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι συναρτήσεις και γιατί.
 - a. Η σχέση $R=\{(1,5),(2,3),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ στο $A \times A$, όπου $A=\{1,2,3,4,5\}$.
 - b. Για $A=\{1,2,3,4,5\}$, η σχέση $R=\{(1,5),(2,3),(3,3),(1,2),(4,1)\}$ στο $A \times A$.
 - c. Η σχέση R στο $Q \times Z$, όπου $(r, z) \in R$ δηλώνει αν μπορεί ο ρητός αριθμός r να γραφεί σαν κλάσμα με αριθμητή z .
2. (Wiley 4.2-10) Έστω ότι B είναι το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών μήκους 5. Ορίζουμε την συνάρτηση $f: B \rightarrow \{0,1,2,3,4,5\}$, όπου $f(s)$ είναι το πλήθος των 1 στην δυαδική ακολουθία s . Ορίζουμε την συνάρτηση $g: \{0,1,2,3,4,5\} \rightarrow B$, όπου $g(n)$ είναι η δυαδική ακολουθία που αποτελείται από n 1 ακολουθούμενα από $5-n$ 0.
 - a. Υπολογίστε τα $f(11011)$, $f(01101)$ και $f(11000)$. Είναι η f αντιστρέψιμη; Αν όχι γιατί;
 - b. Υπολογίστε τα $g(0)$, $g(2)$ και $g(4)$. Είναι η g αντιστρέψιμη; Αν όχι γιατί;
 - c. Υπολογίστε τα $(f \circ g)(2)$, $(f \circ g)(0)$, $(g \circ f)(11010)$ και $(g \circ f)(11100)$.
 - d. Είναι οι f και g αντίστροφες η μία της άλλης;
3. (Wiley 4.3-5) Έστω ότι $S=\{a,b,c\}$ και η συνάρτηση $c: P(S) \rightarrow P(S)$ όπου $c(A) = S - A$.
 - a. Είναι η c ένα-προς-ένα;
 - b. Είναι η c επί;
 - c. Είναι η c αντιστρέψιμη και αν ναι ποια είναι η c^{-1} ; Αν όχι γιατί;