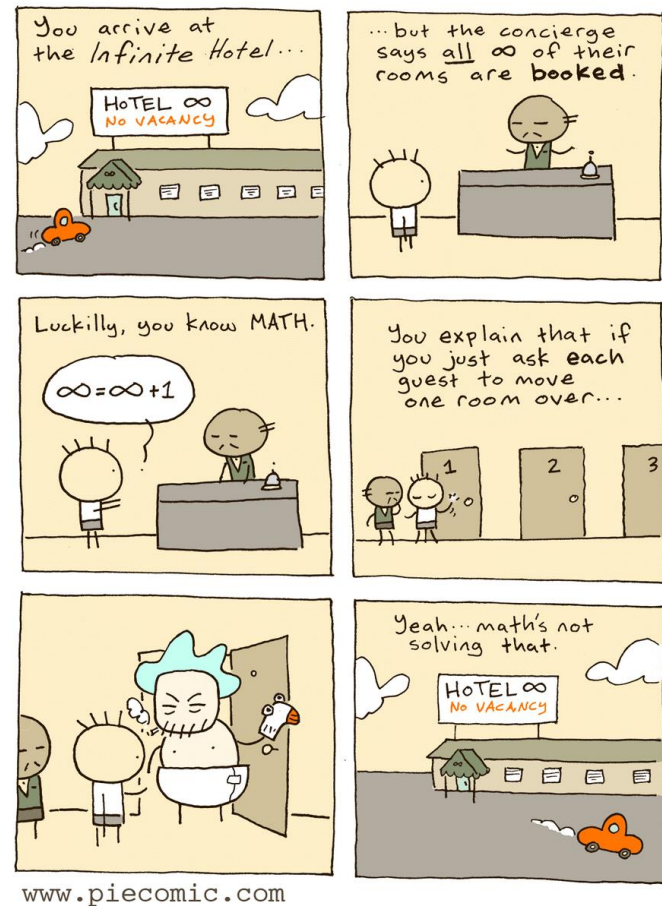


ΣΧΕΣΙΑΚΉ ΣΚΉΨΗ

Γραφήματα – Σύνολα

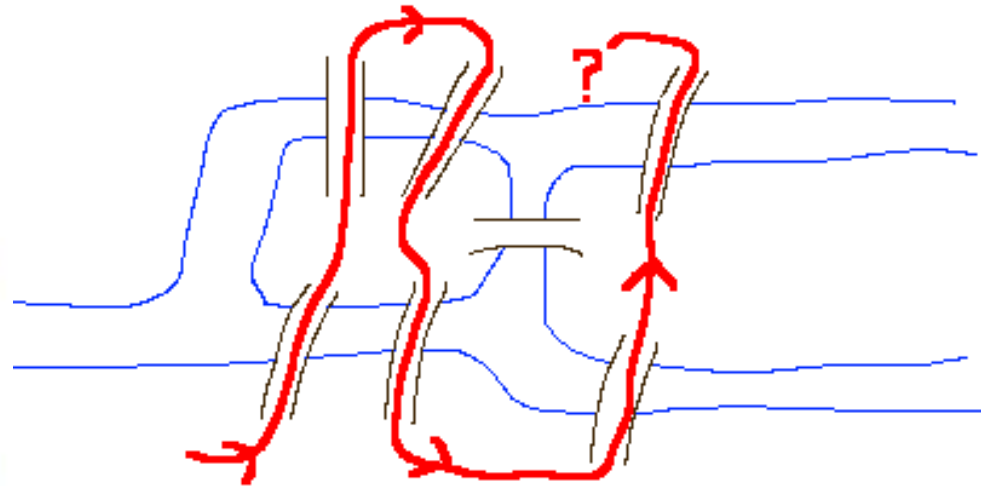
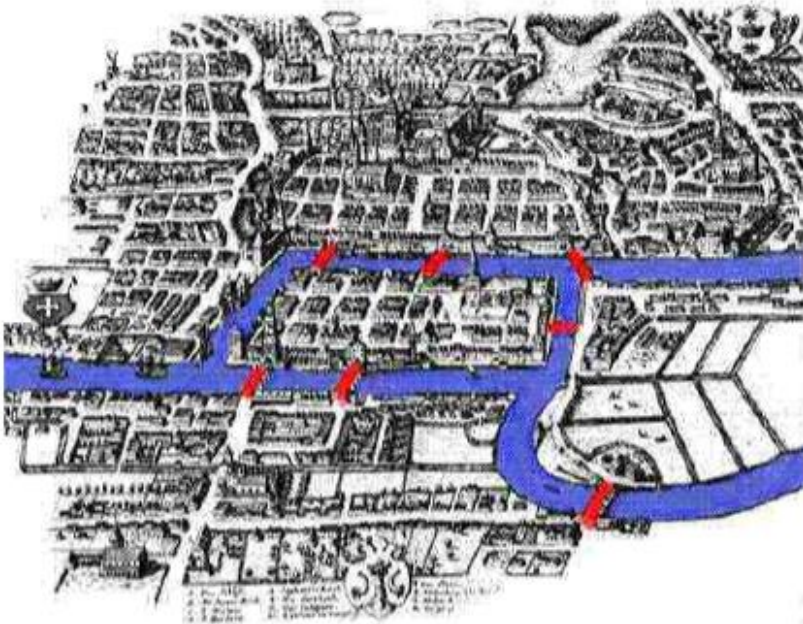


Εισαγωγή

- *Θεωρία γραφημάτων* (graph theory)
- Μαθηματικό εργαλείο
- Εφαρμογή σε πολλά επιστημονικά πεδία
- Χρησιμοποιούν για περιγραφή σχέσεων ανάμεσα σε αντικείμενα και οντότητες
- Θεμελίωση της Θεωρίας Γραφημάτων:
 - Ελβετός μαθηματικός Leonhard Euler (1707 - 1783)
 - Θεμελιώδης εργασία: "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*" (Η λύση ενός προβλήματος που αναφέρεται στη γεωμετρία της θέσης – 1736)

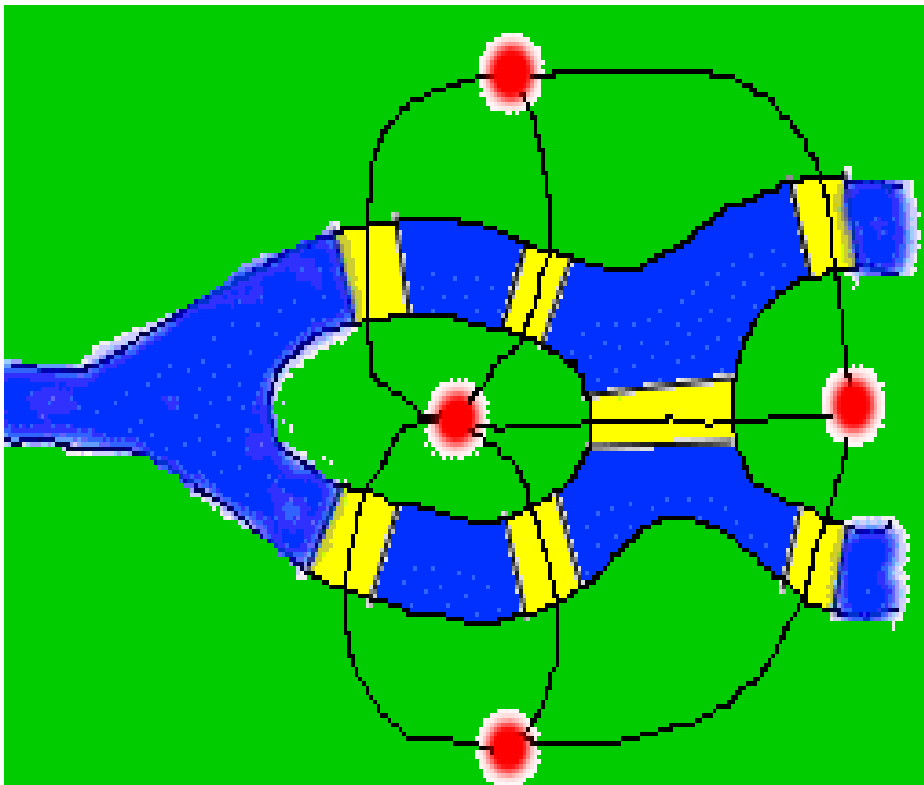


Οι γέφυρες του Königsburg

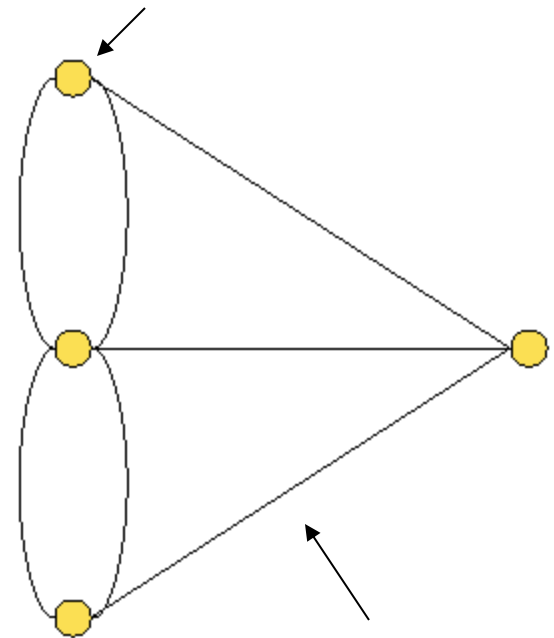


- Σημερινό Kaliningrad (στη Βαλτική μεταξύ Λιθουανίας και Πολωνίας)

Το γράφημα



κορυφή



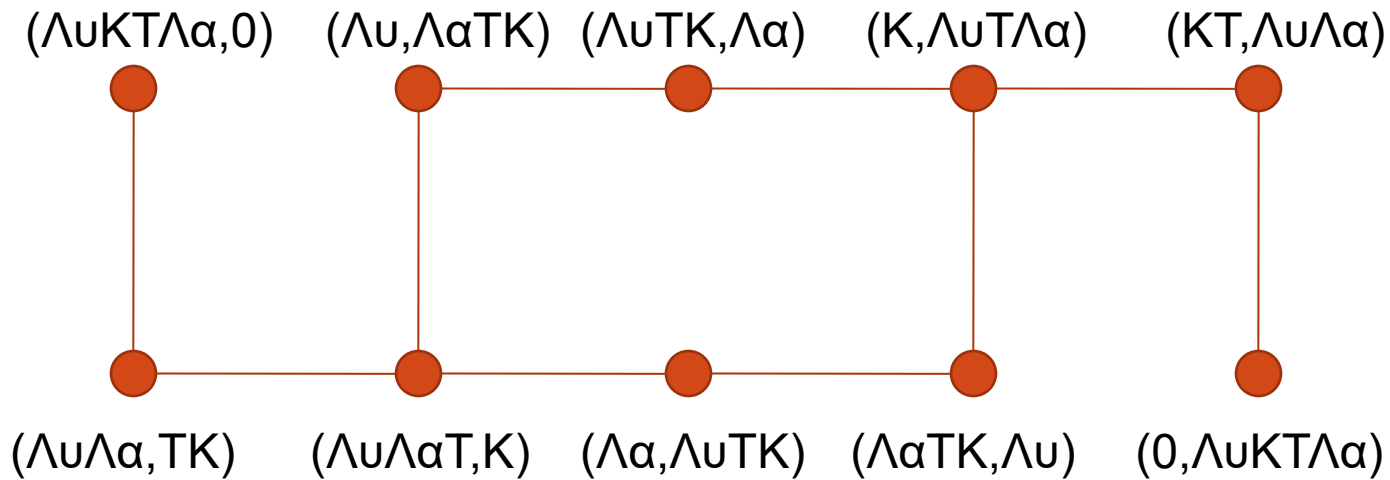
ακμή

Ο Λύκος, η κατσίκα και το λάχανο...

- Ένας ταξιδιώτης έχει έναν λύκο, μία κατσίκα και ένα λάχανο που πρέπει να περάσει από ένα ποτάμι. Το πρόβλημα είναι ότι αν μείνουν μόνα τους, ο λύκος τρώει το κατσίκι, ή το κατσίκι τρώει το λάχανο. Η βάρκα χωράει μόνο δύο, ένας εκ των οποίων είναι ο ταξιδιώτης.

Πώς θα τα περάσει ο ταξιδιώτης απέναντι;

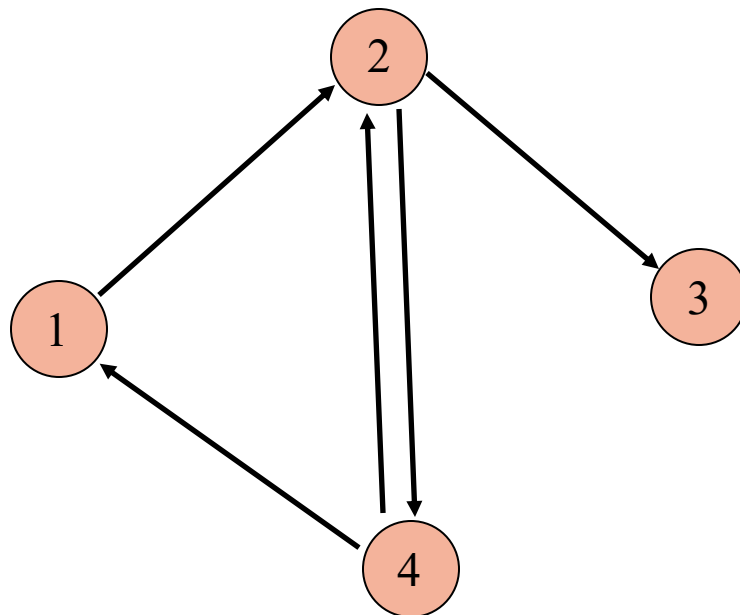
Ο Λύκος, η κατσίκια και το λάχανο...



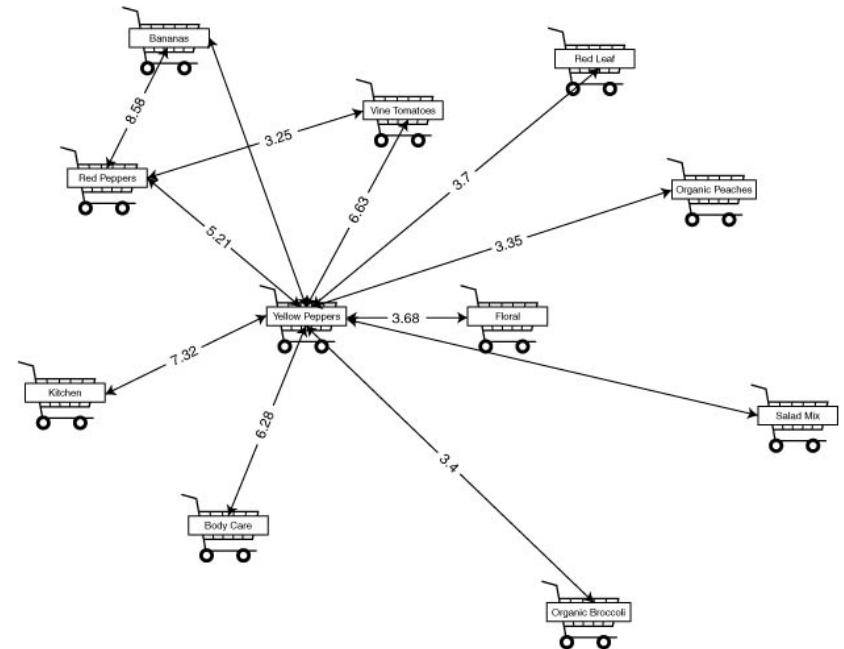
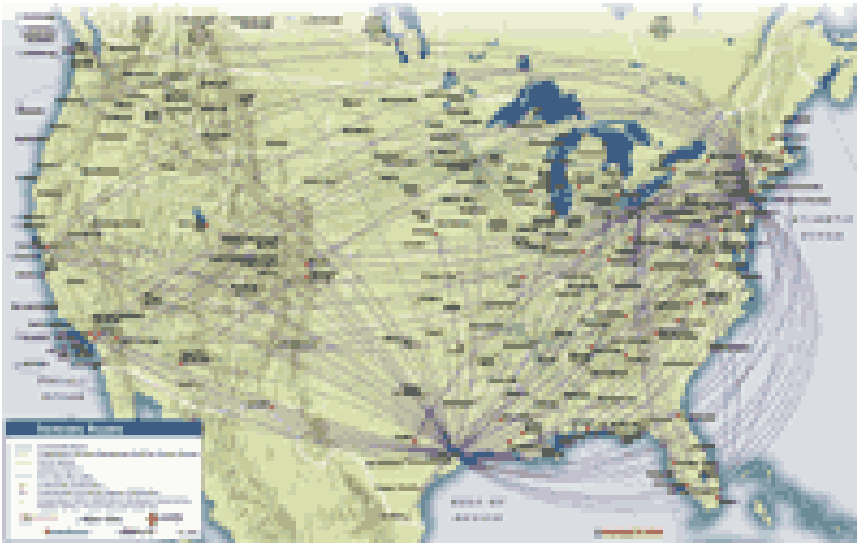
Μερικές Εφαρμογές γραφημάτων

Εφαρμογή	Κορυφές	Ακμές	Ροή
Επικοινωνία	Υπολογιστές, τηλεφωνικό δίκτυο, δορυφόροι	Καλώδια, οπτικές ίνες, ασύρματα	Φωνή, Εικόνα, πακέτα
Κυκλώματα	Πύλες, Καταχωρητές, CPU	Καλώδια	Ρεύμα
Μηχανική	Σύνδεσμοι	Δοκοί, ακτίνες, ελατήρια	Ενέργεια, Θερμότητα
Υδραυλική	Λίμνες, Ταμιευτήρες, Σταθμοί άντλησης	Σωληνώσεις	Νερό, Πετρέλαιο
Οικονομικά	Νόμισμα, Μετοχές	Συναλλαγές	Κεφάλαιο
Μεταφορές	Αεροδρόμια, διασταυρώσεις, σταθμοί τρένων	Αεροδιάδρομοι, γραμμές τρένου, δρόμοι	Φορτία, οχήματα, επιβάτες

Κατευθυντικό Γράφημα



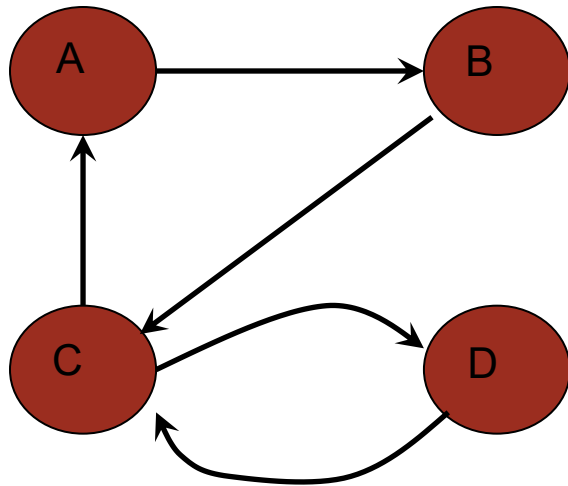
Συνδεσιμότητα



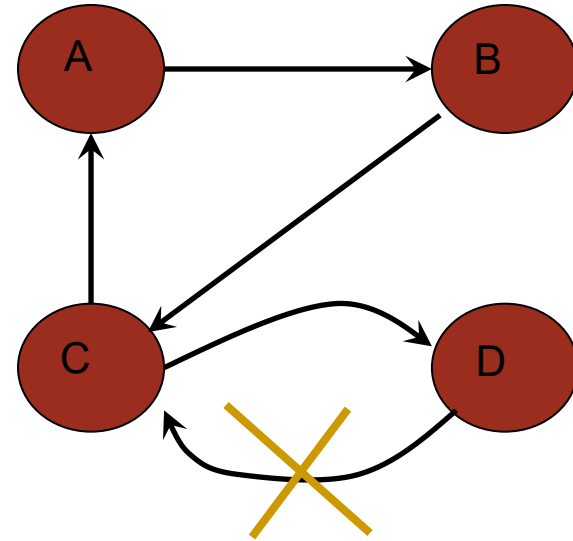
Μπορώ να πετάξω από την πόλη A στην πόλη B με την εταιρία;

Υπάρχει διαδρομή από την πόλη A στην πόλη B στο δίκτυο της;

Λειτουργία δικτύων

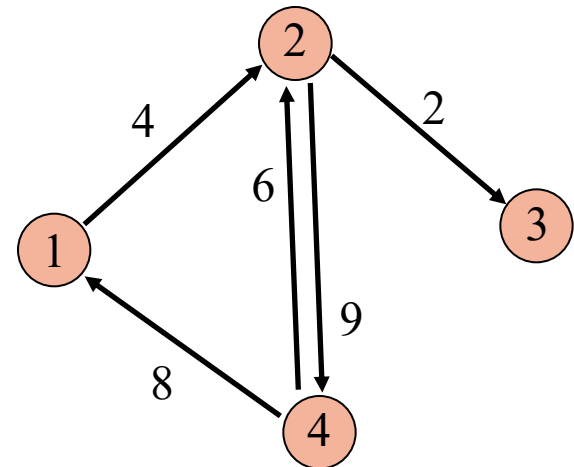
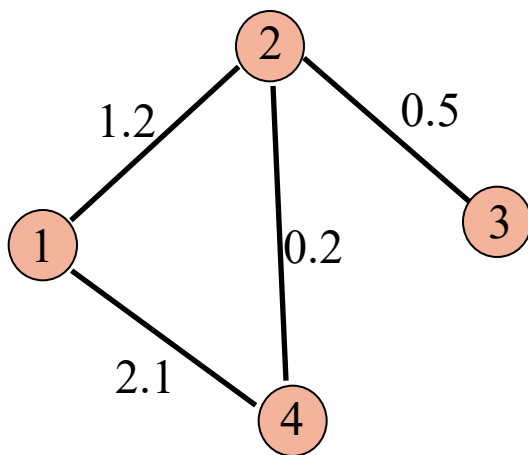


Μπορώ να πάω από κάθε κόμβο σε κάθε άλλον;

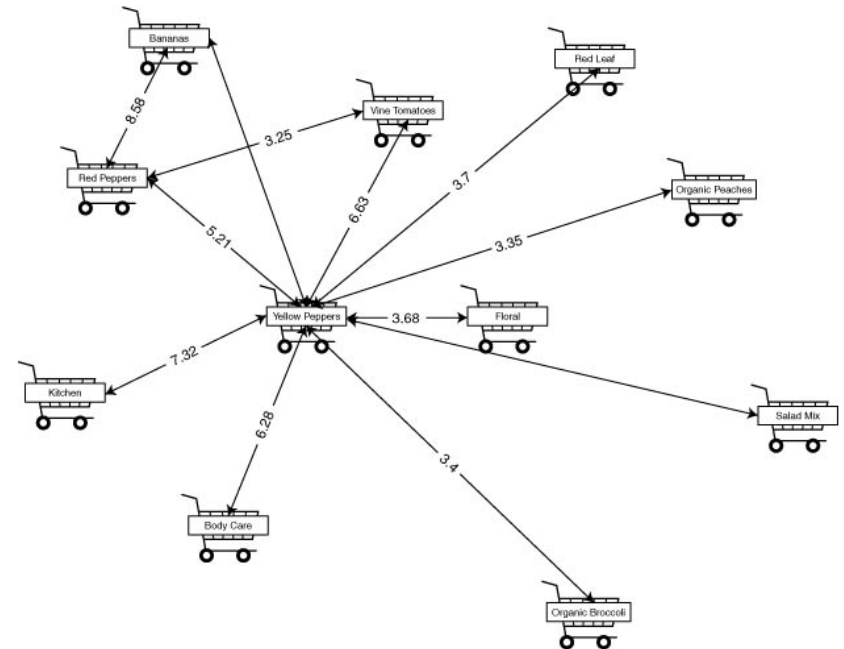
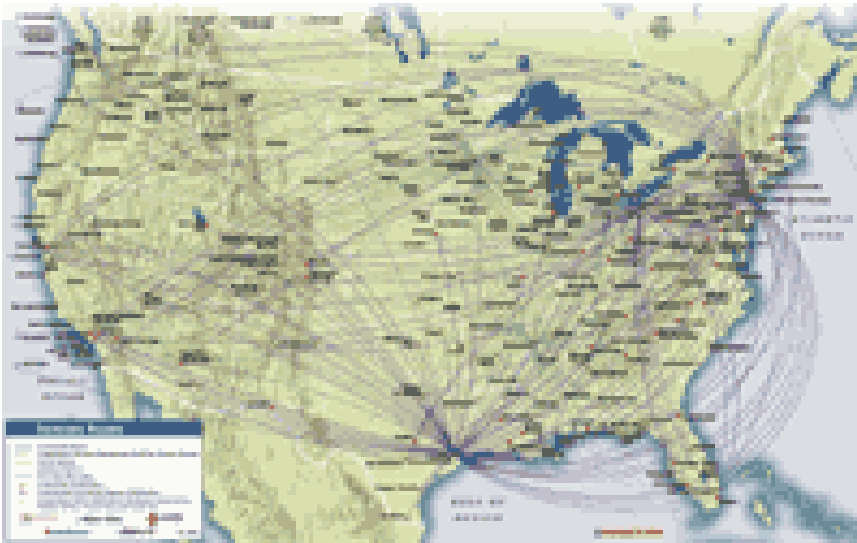


Βλάβη

Ζυγισμένο Γράφημα (weighted)



Συντομότερη Διαδρομή



Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή από την πόλη **A** στην πόλη **B** με την εταιρία;
Ποια διαδρομή από την πόλη **A** στην πόλη **B** έχει το μικρότερο βάρος;

GPS – Navigation



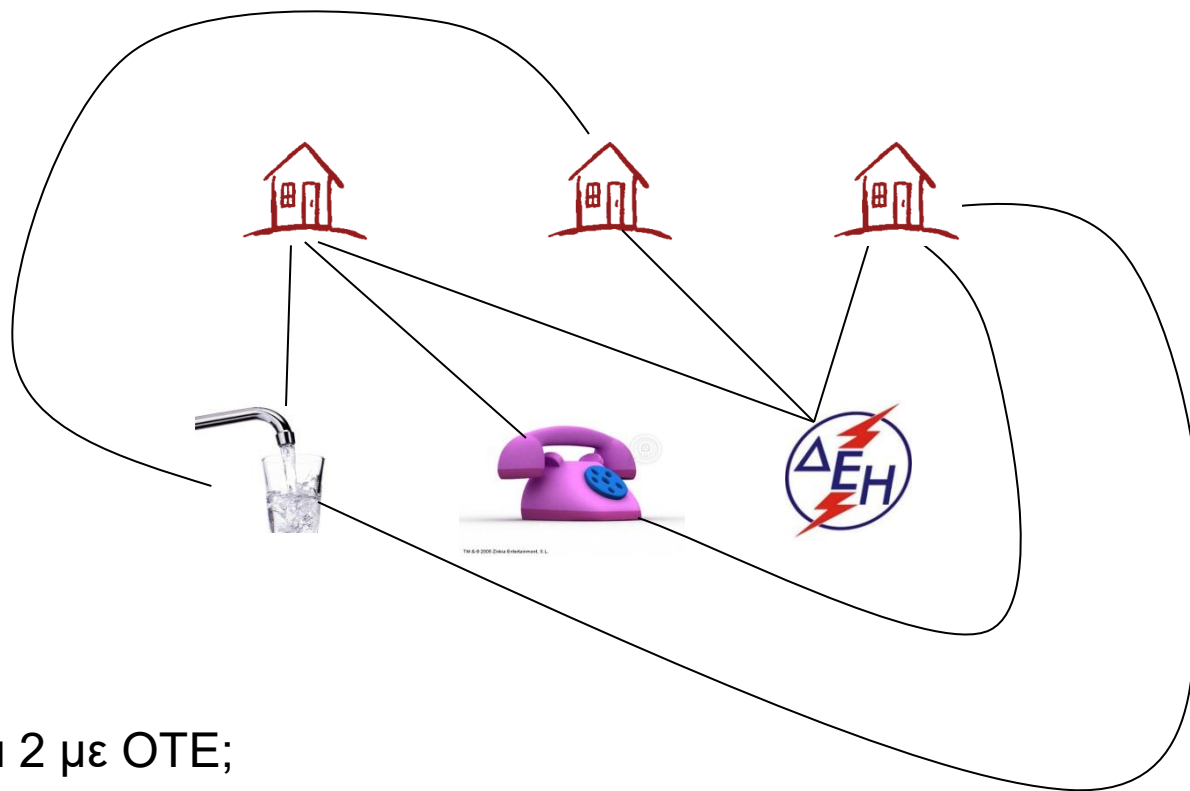
Εύρεση Ελαχίστων
Διαδρομών...

Το πρόβλημα των συνδέσεων

- Δοθέντων τριών σπιτιών, υπάρχει τρόπος να συνδεθούν όλα μέσω καλωδίου ή σωληνώσεων με τηλέφωνο, νερό και ηλεκτρισμό χωρίς τα καλώδια/σωλήνες να τέμνονται ή το ένα να περνά πάνω ή κάτω από το άλλο;



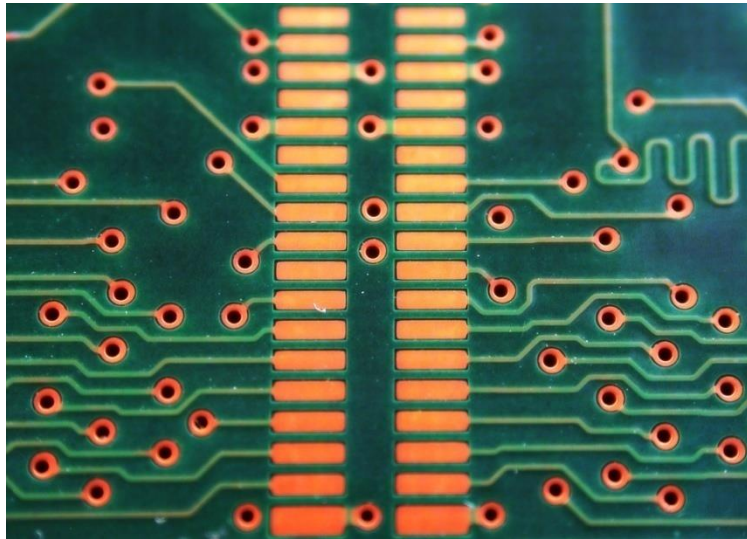
Προσπαθήστε...



Σπίτι 2 με ΟΤΕ;

Επιτιπεδικότητα

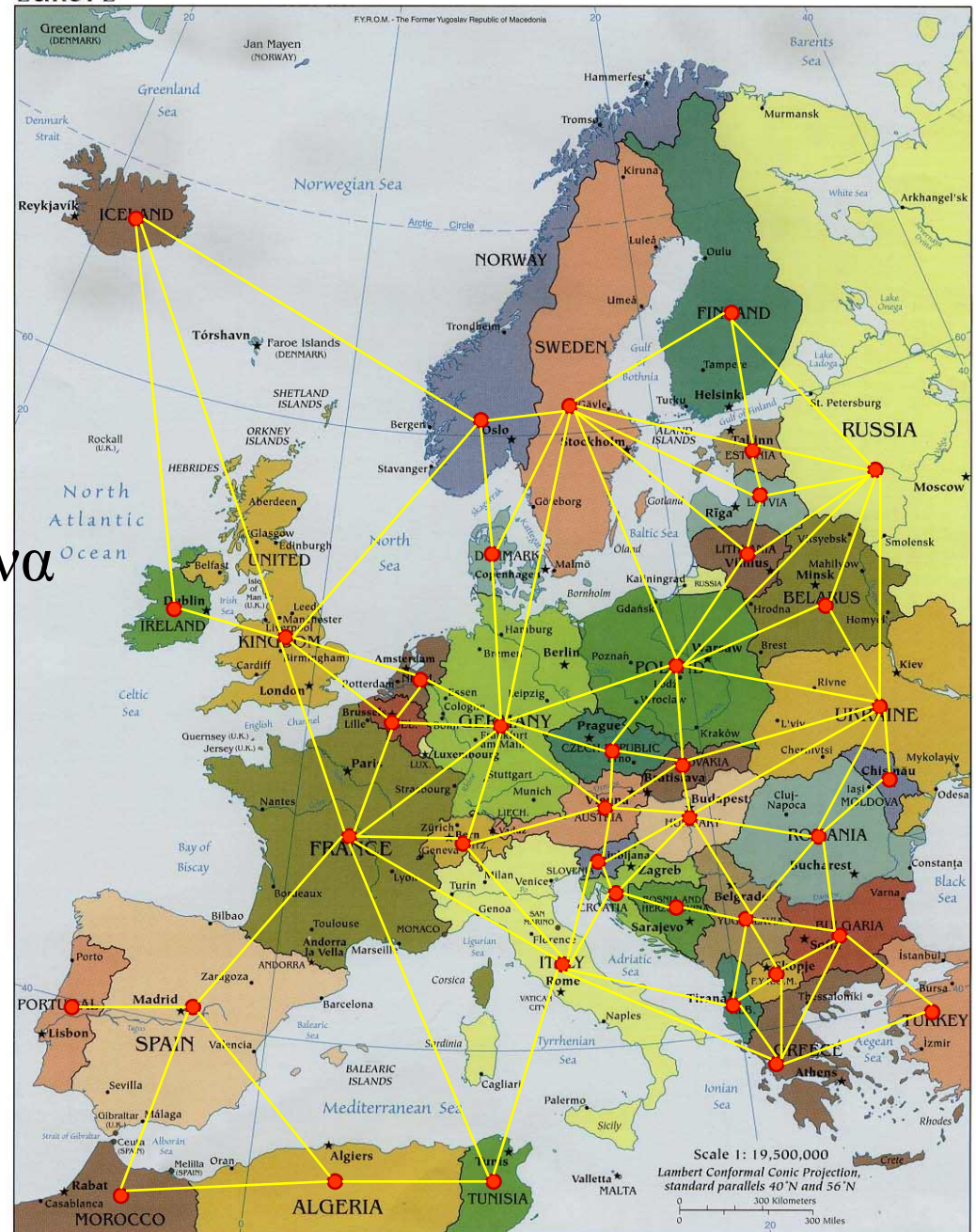
- Μπορεί ένα γράφημα να σχεδιαστεί ώστε να μην υπάρχουν τεμνόμενες ακμές;



Χάρτες (χρωματισμός)

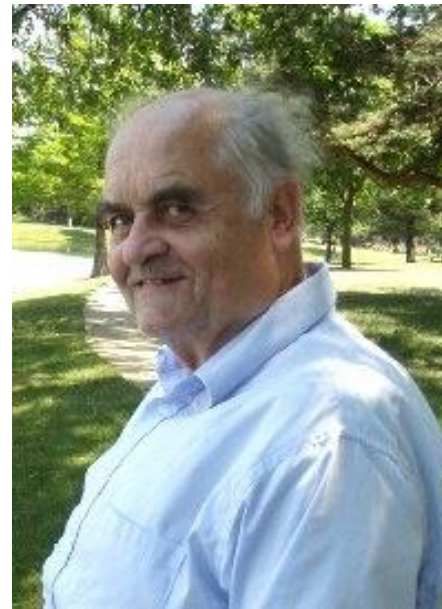
- Πως μπορώ να χρωματίσω κάθε χώρα ώστε γειτονικές χώρες να μην έχουν ίδιο χρώμα;
- Πόσα χρώματα χρειάζονται στο ελάχιστο;

EUROPE

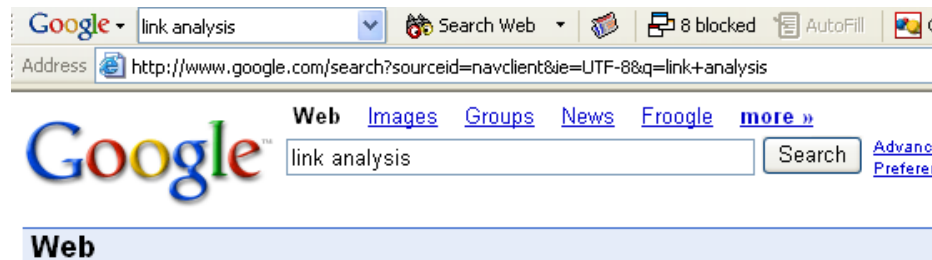


Η Εικασία των 4 χρωμάτων

- Το 1976, οι **Kenneth Appel** και **Wolfgang Haken** ανακοίνωσαν την απόδειξη (με τη βοήθεια υπολογιστή) της Εικασίας των 4 χρωμάτων, ένα άλυτο πρόβλημα επί αιώνες.



Ανάλυση Συνδέσμων



How Search Engines Use Link Analysis

... How Search Engines Use **Link Analysis**. ... **Link analysis** is used by several engines as part of their ranking algorithm, most notably Google. ... searchenginewatch.com/searchday/article.php/2158431 - 44k - Aug 7, 2004 - [Cached](#) - [Similar pages](#)

Wireless Network Link Analysis

Wireless Network **Link Analysis**. A service of Green Bay Professional Packet Radio ®. Transmitter Specifications. Highest Transmitted Frequency, MHz. ... my.athenet.net/~multiplx/cgi-bin/wireless.main.cgi - 23k - Aug 7, 2004 - [Cached](#) - [Similar pages](#)

link.springer.de/link/service/journals/10044/

[Similar pages](#)

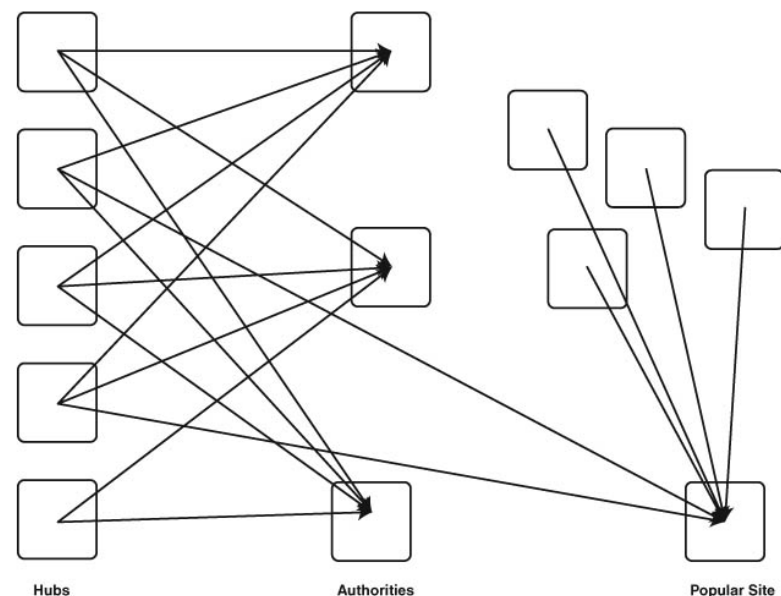
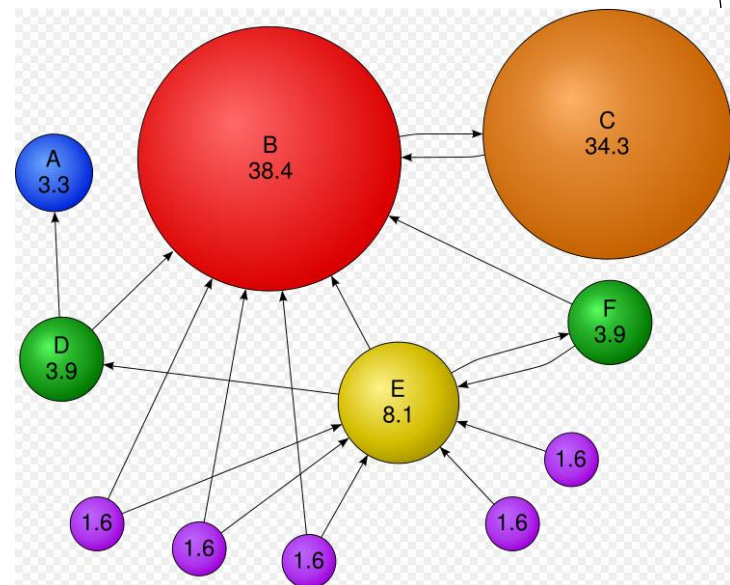
SDM 2004 Workshop on Link Analysis

Workshop on **Link Analysis**, Counter-terrorism, and Privacy. in conjunction with ... Performance evaluation measures; Innovative applications related to **Link Analysis**; ... www-users.cs.umn.edu/~aleks/sdm04w/ - 12k - [Cached](#) - [Similar pages](#)

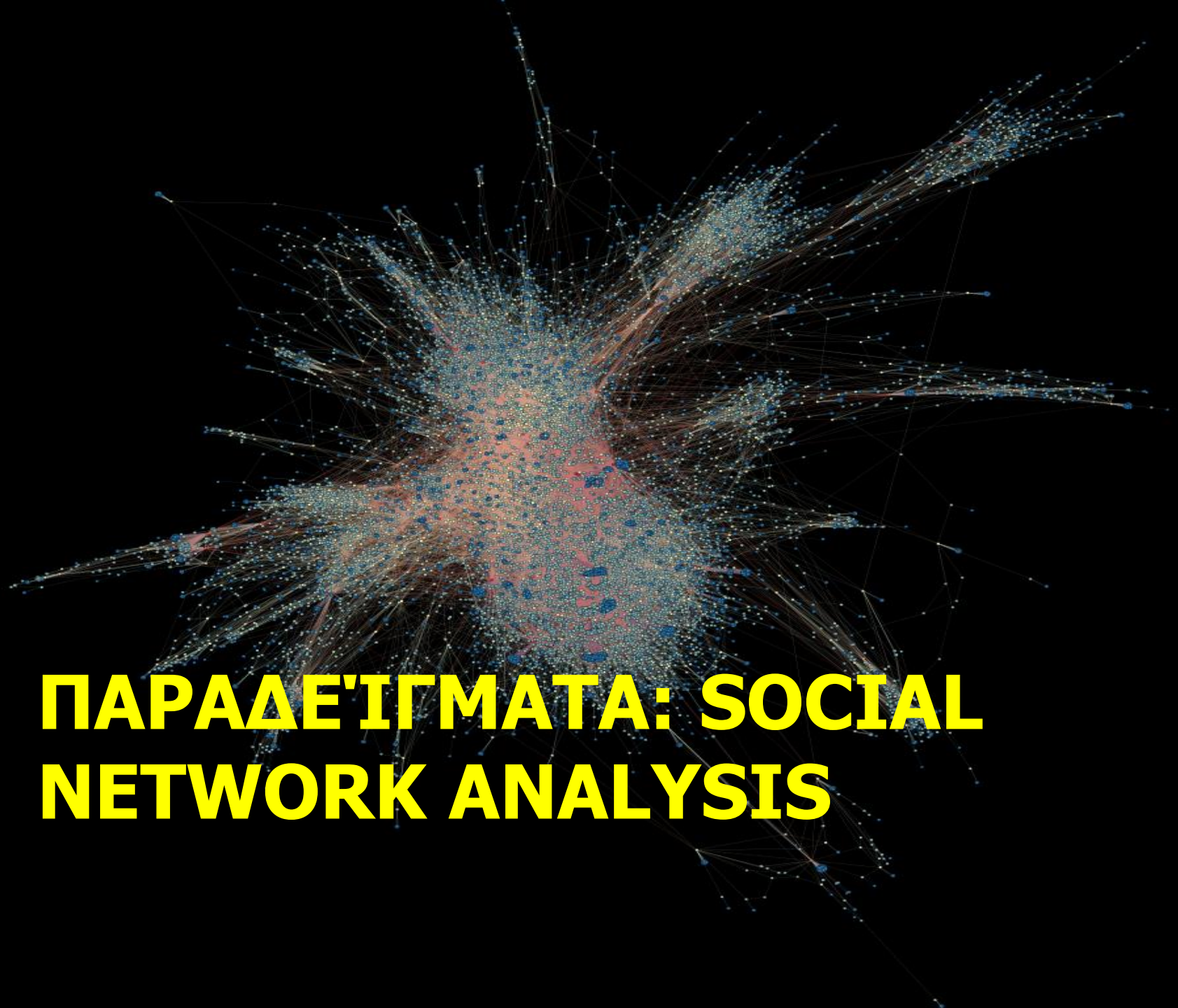
Data Mining Algorithm-Link Analysis

... **Link Analysis**. The **Link Analysis** (LA) exploration engine reveals and visually represents complex patterns of correlations between ...

megaputer.com/products/pa/algorithms/la.php3 - 10k - [Cached](#) - [Similar pages](#)



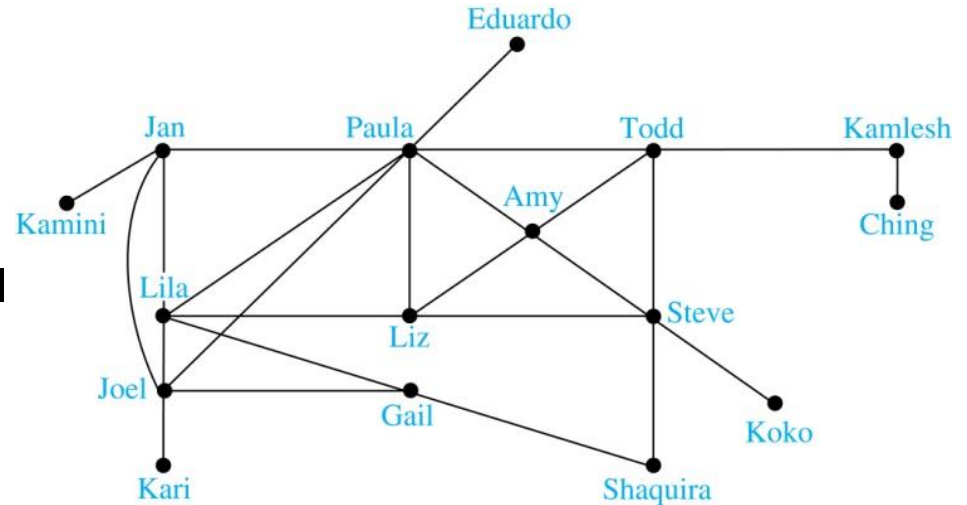
Ποιοι κόμβοι είναι *κεντρικοί*;



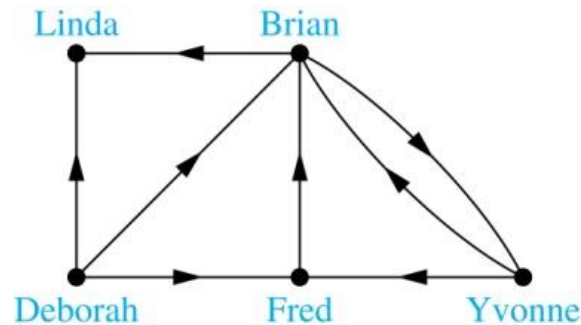
ΠΑΡΑΔΕΪΓΜΑΤΑ: SOCIAL NETWORK ANALYSIS

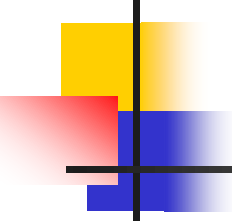
Κοινωνικά Δίκτυα

Ένα γράφημα φιλίας όπου δύο άνθρωποι συνδέονται αν είναι φίλοι στο Facebook.

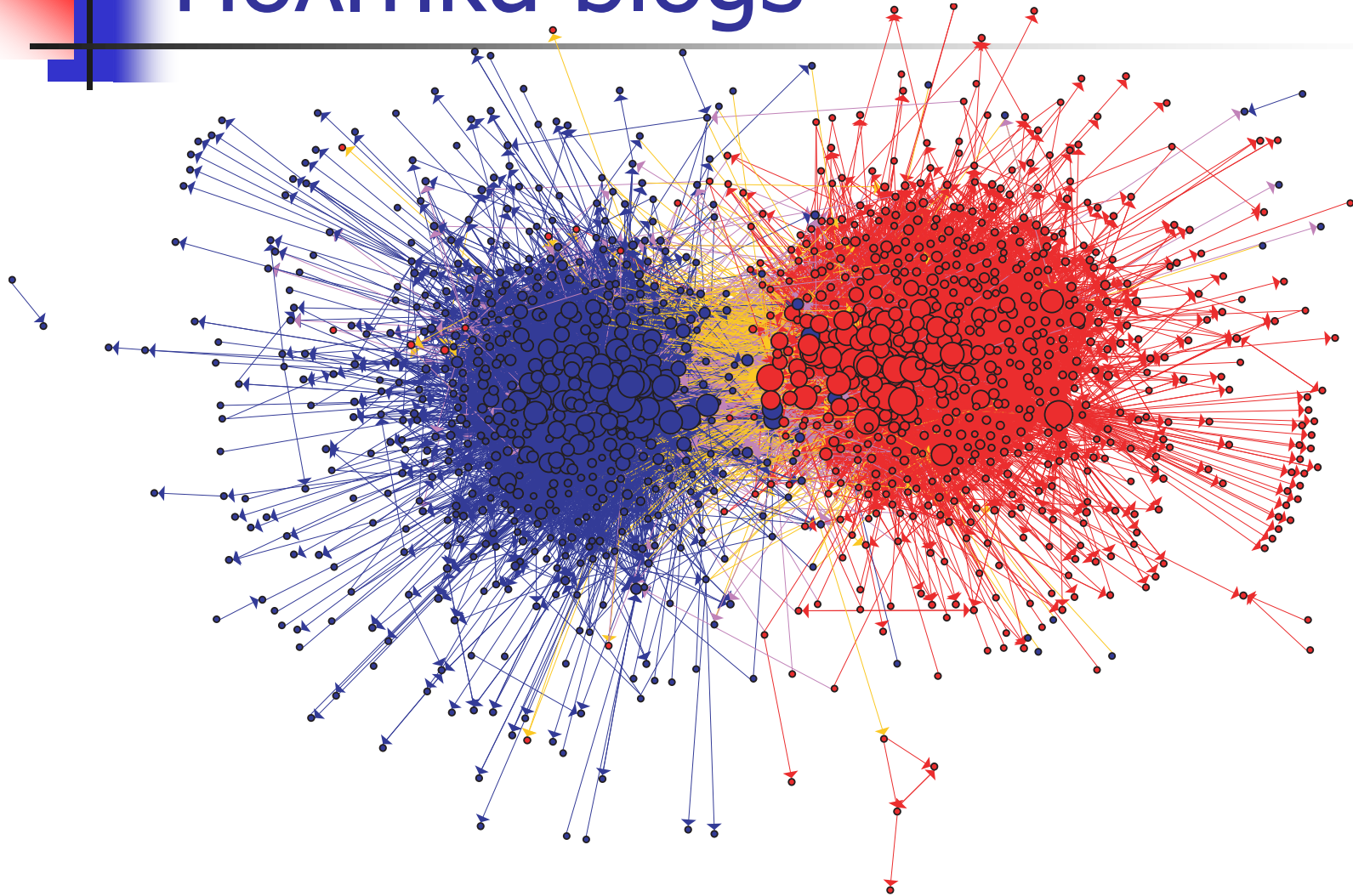


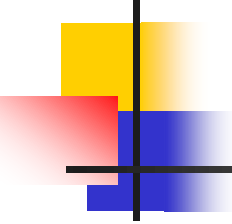
Ένα γράφημα επιρροής



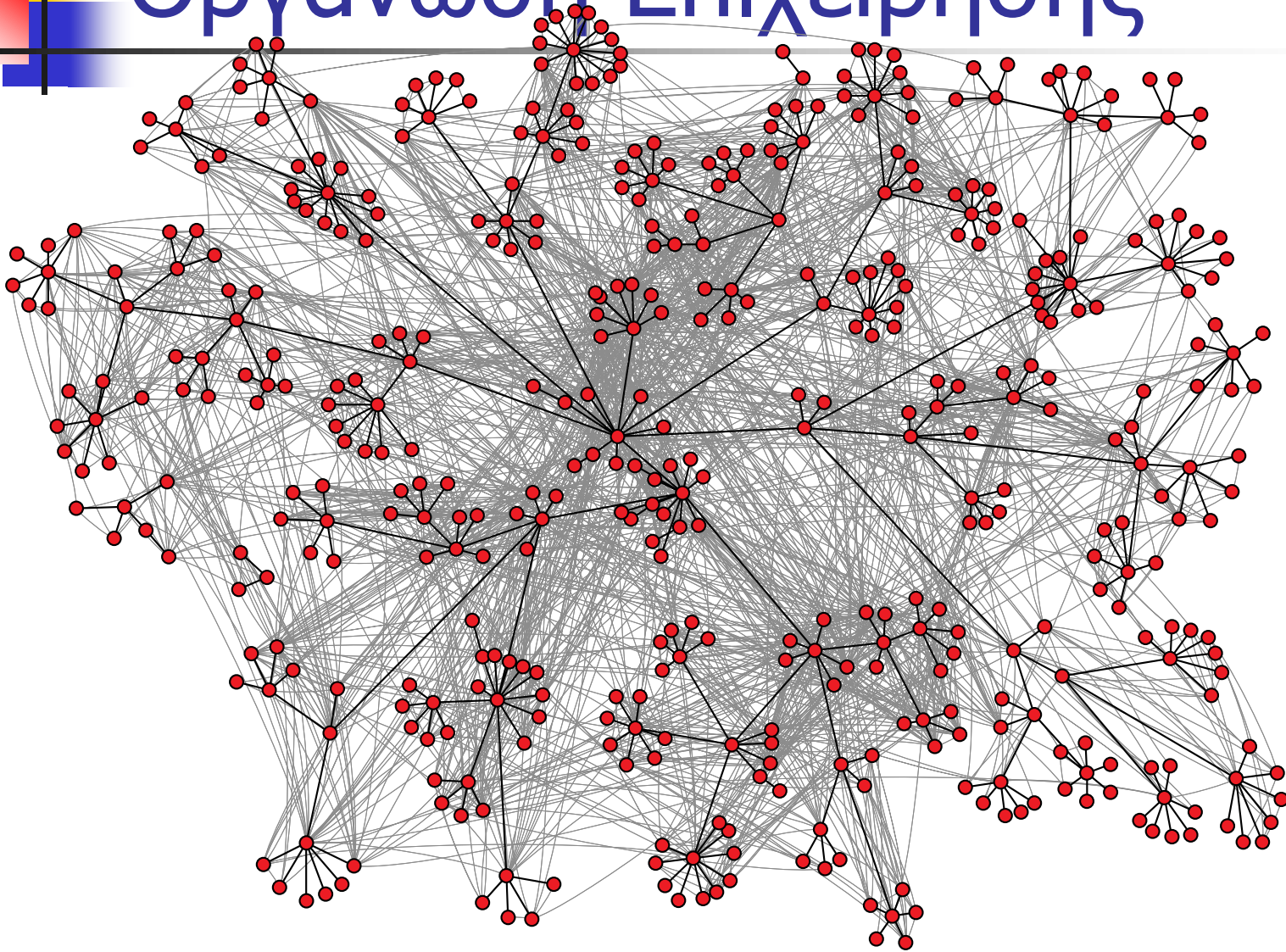


Πολιτικά blogs

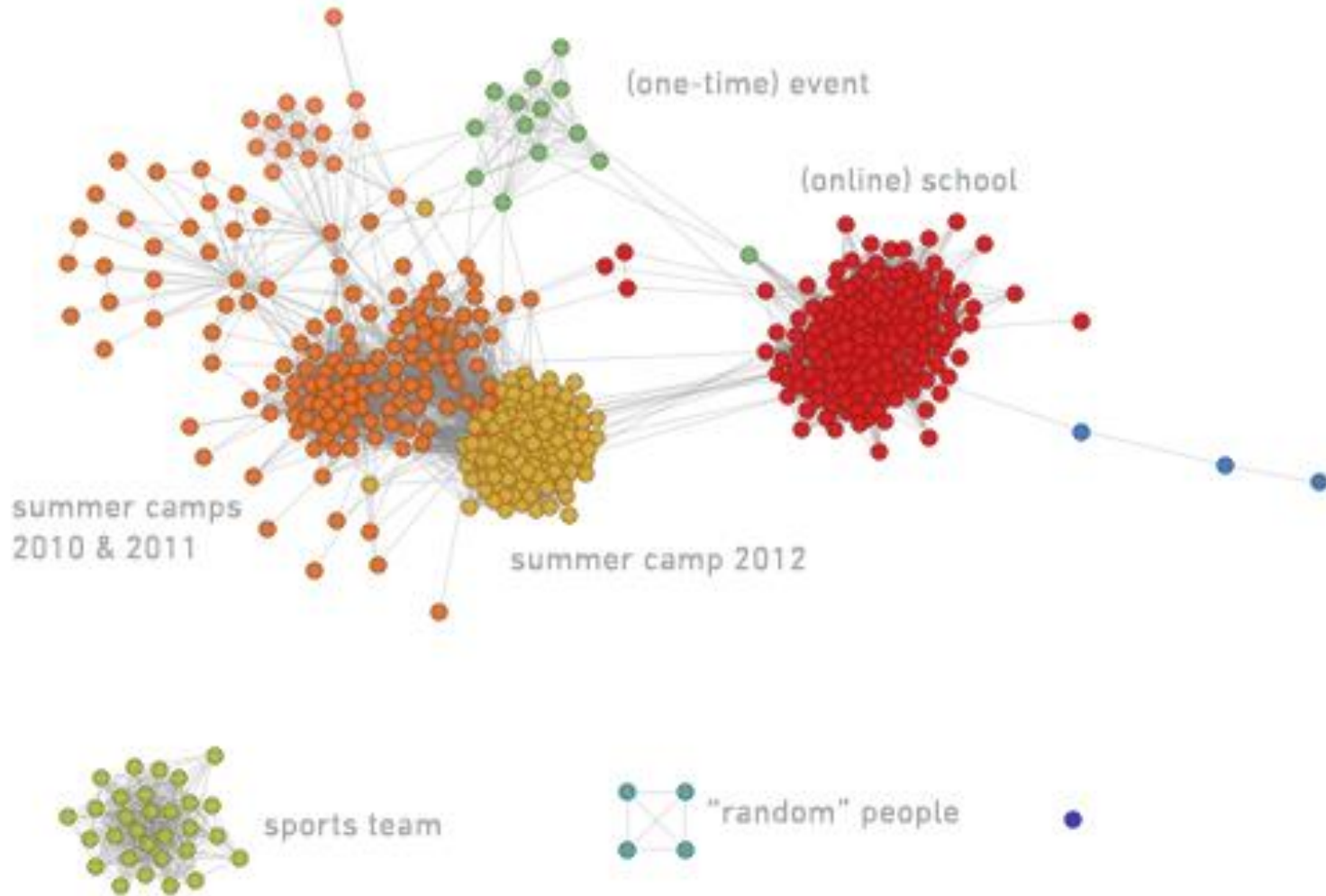




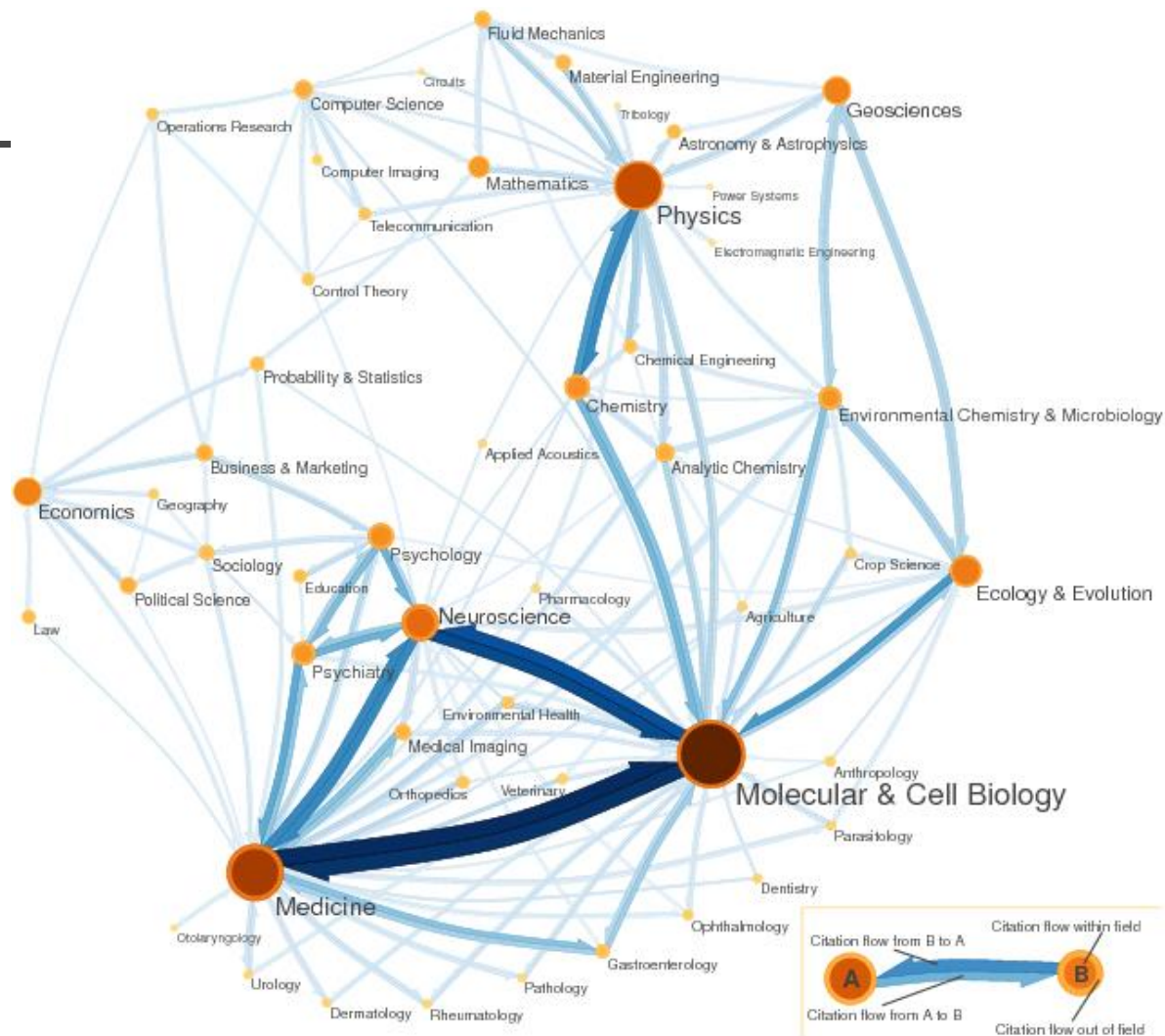
Οργάνωση Επιχείρησης

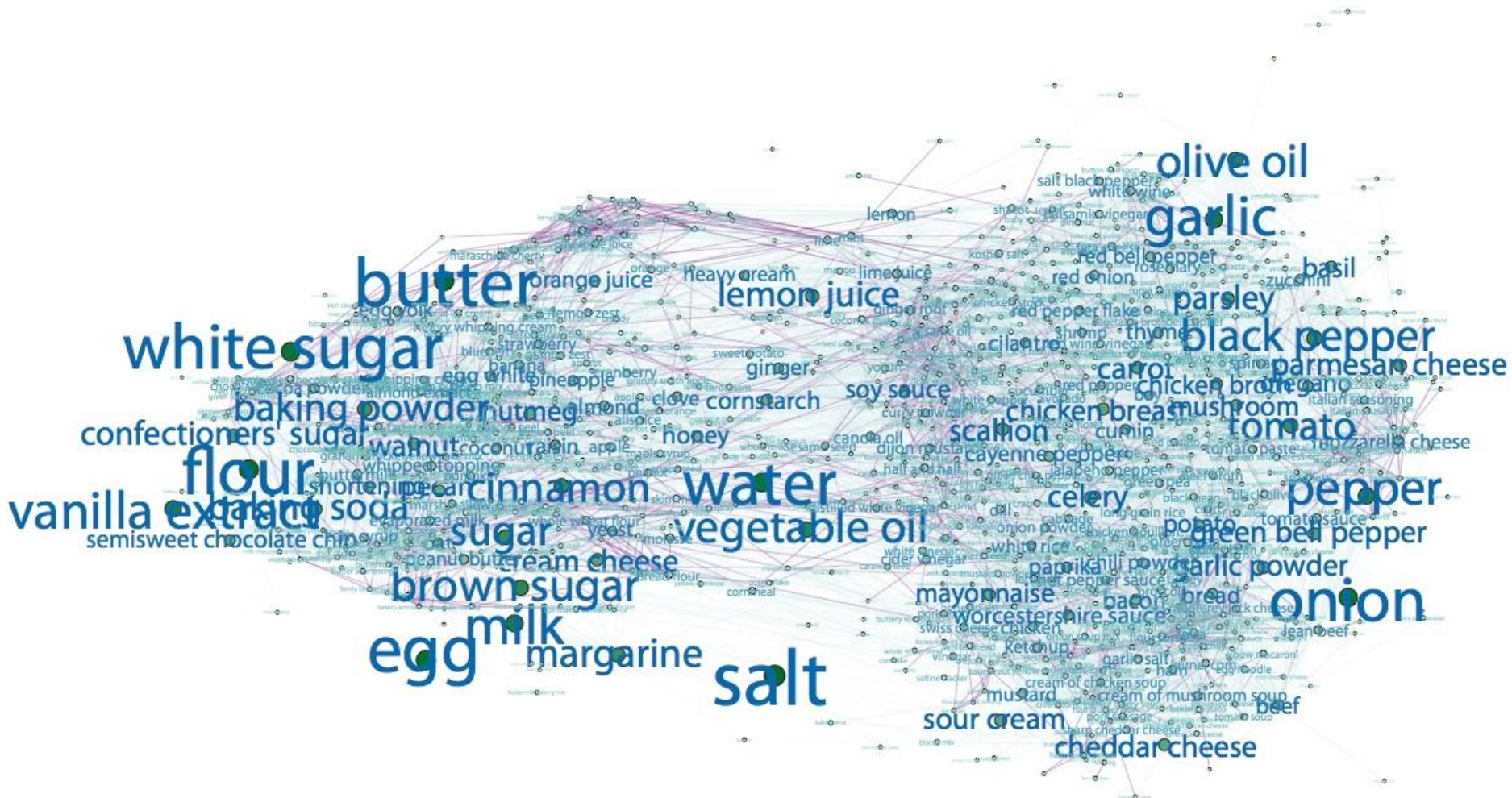


Facebook Δίκτυα Φιλίας (όχι πια)

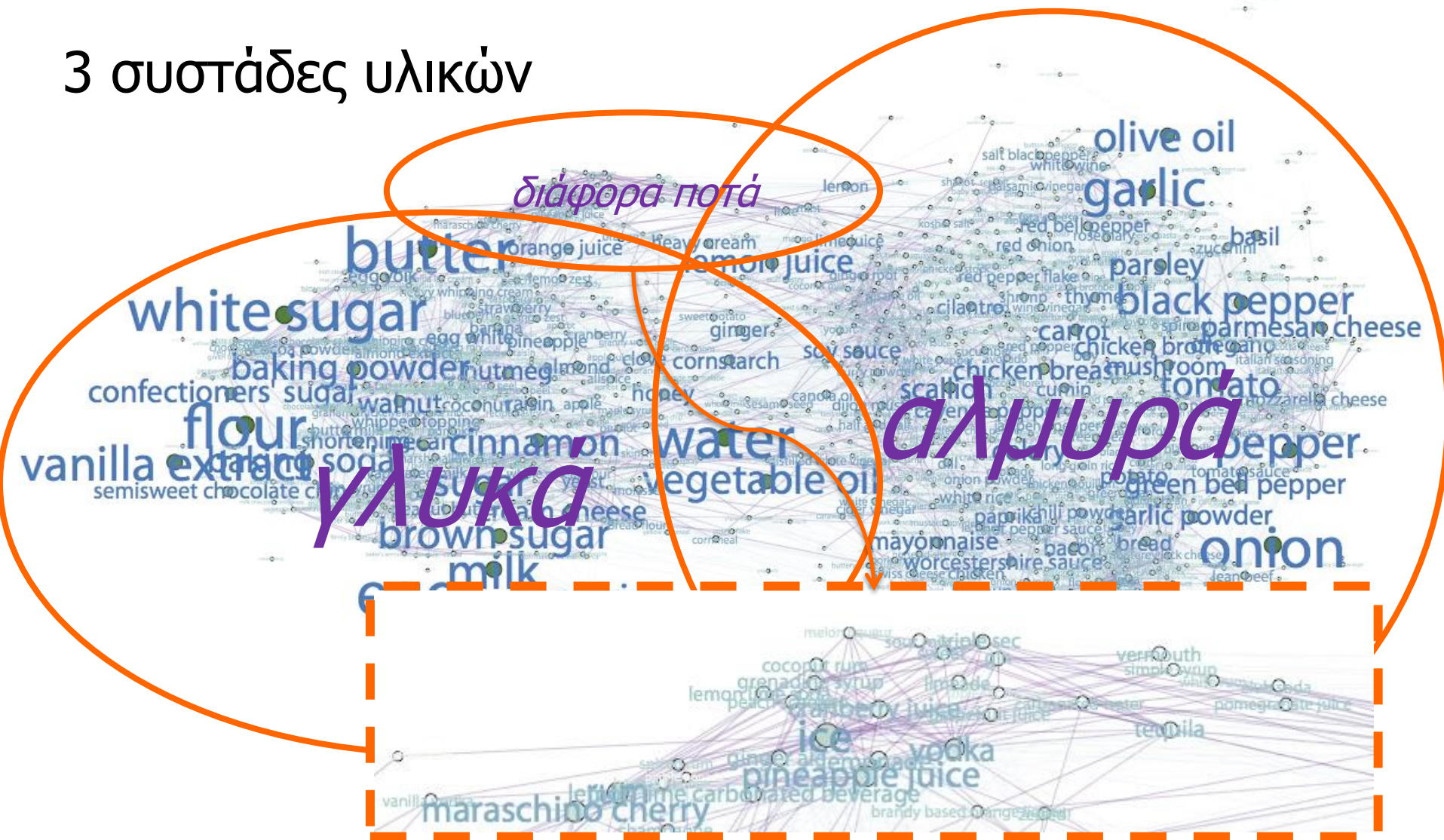


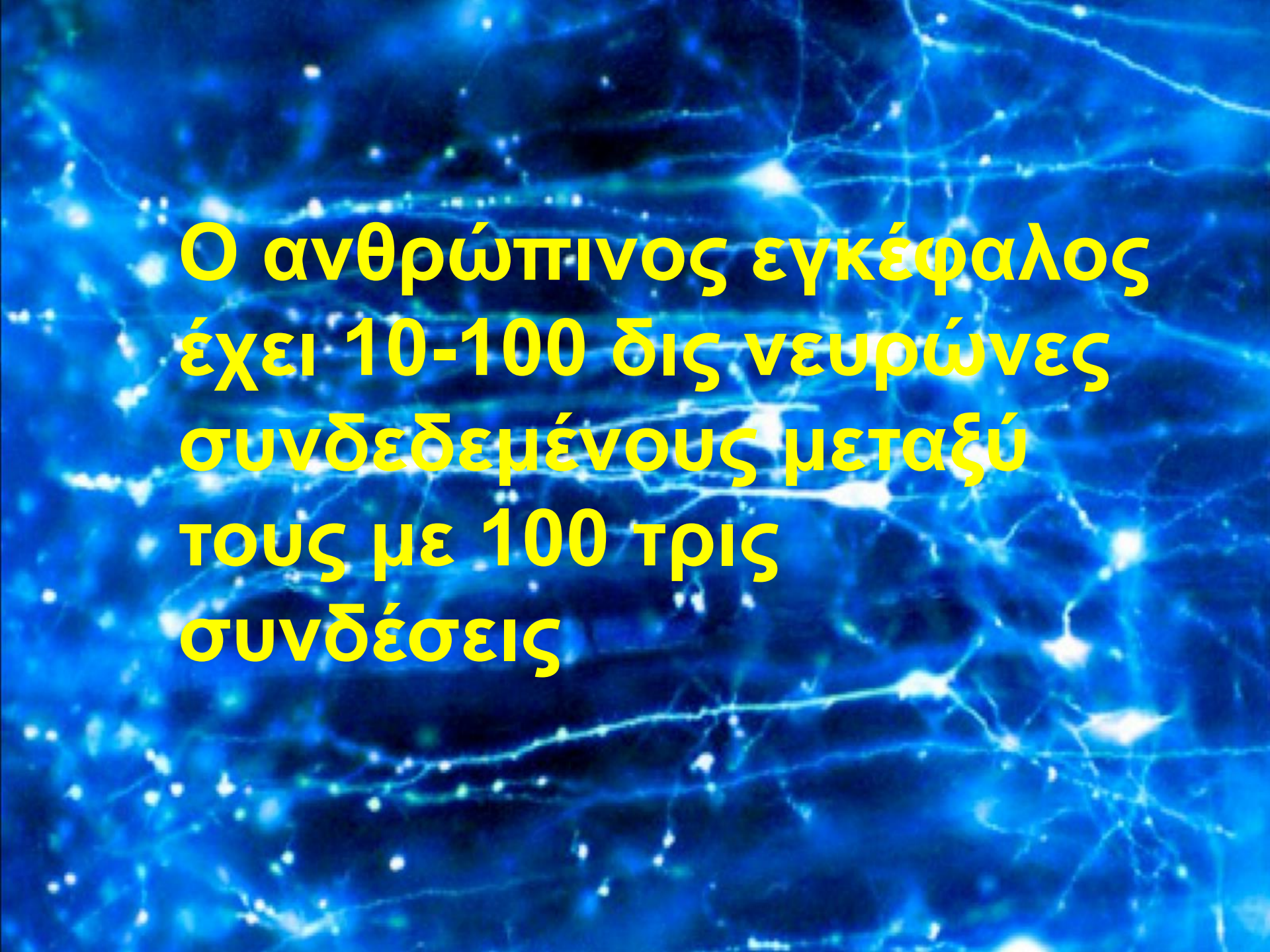
Χάρτης επιστήμης (science map)





3 συστάδες υλικών



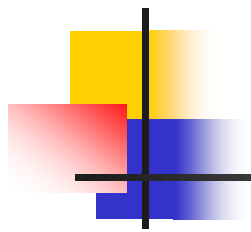
A microscopic image of neurons, showing cell bodies and branching processes, rendered in a blue color scheme. The text is overlaid in yellow.

**Ο ανθρώπινος εγκέφαλος
έχει 10-100 δις νευρώνες
συνδεδεμένους μεταξύ
τους με 100 τρις
συνδέσεις**

Ένας Γρίφος ακόμα...



Στη χώρα του μάγου του Οζ, όλοι οι δρόμοι είναι μονόδρομοι. Επιπλέον κάθε ζευγάρι πόλεων συνδέεται από έναν μόνο δρόμο. Δείξτε ότι υπάρχει κάποια πόλη (η πρωτεύουσα μάλλον) που είναι προσβάσιμη από όλες τις άλλες πόλεις απευθείας ή μέσω άλλης μίας πόλης.



Αν βάλετε μαζί έναν μαθηματικό και έναν σεφ, ποια πράξη συνόλου κάνετε;

→ Καρτεσιανό γινόμενο.

Τι προκύπτει;

→ Συνταγές με αποδείξεις.

ΣΥΝΟΛΑ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ



- Ιστορία 150 χρόνων
- Καθιέρωση από τον Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor (1845-1918)
 - **Σύνολο** (set): Συλλογή διακεκριμένων πραγμάτων για τα οποία έχουμε μια αντίληψη ότι αποτελούν, εξαιτίας μιας κοινής ιδιότητάς τους, μια ολότητα
 - ή μια πολλαπλότητα που μπορούμε να την αντιληφθούμε ως ενότητα
 - Τα αντικείμενα ονομάζονται **στοιχεία** (elements) του συνόλου



Ο ΜΠΑΡΜΠΕΡΗΣ ΤΗΣ ΣΕΒΙΛΛΗΣ

- Ο κ. Τσίχλας είναι ο μόνος μπαρμπέρης (άνδρας) στην Σεβίλλη. Ξυρίζει *όλους τους* άνδρες και *μόνο αυτούς* που δεν ξυρίζονται μόνοι τους.
- Αν ξυρίζεται μόνος του τότε...
 - Από την *υπόθεση που* γίνεται δεν μπορεί να ξυρίζει τον εαυτό του!
- Αν δεν ξυρίζεται μόνος του τότε...
 - Από την *υπόθεση που* γίνεται πρέπει να ξυρίζει τον εαυτό του!!



ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΟΥ RUSSELL

Αυτό το παράδοξο στην κανονική του συνολοθεωρητική μορφή γράφεται ως εξής:

Έστω X το σύνολο όλων των συνόλων που δεν περιέχουν τον εαυτό τους: $\{X: A, A \text{ είναι ένα σύνολο και } A \notin A\}$

- Είναι το X στο X ? Με άλλα λόγια, το X περιέχεται στον εαυτό του;
- Αν το $X \notin X$, τότε το X είναι σύνολο που δεν περιέχει τον εαυτό του και άρα περιέχει τον εαυτό του και άρα $X \in X$. **Άτοπο.**
- Αν $X \in X$ τότε είναι ένα σύνολο που δεν περιέχει τον εαυτό του και άρα $X \notin X$. **Άτοπο.**

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ

- Το Halting Problem αντίστοιχο του παραδόξου του Russell.
- *Δεν μπορούμε να φτιάξουμε ένα πρόγραμμα που να ελέγχει αν ένα πρόγραμμα τερματίζει ή όχι.*



ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΕΙΡΙΖΟΥΣΑΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Είσαι βαθμολογητής στην Python

- Οι φοιτητές δίνουν μία εργασία `γουαου.py`
 - Έχεις ένα σύνολο αρχείων για έλεγχο `1.inp... 100.inp`
 - Κάθε σωστό σημείο παίρνει 1 βαθμό
 - Για κάθε άπειρη επανάληψη η ποινή είναι 3 βαθμοί
- Θέλουμε να αυτοματοποιήσουμε την βαθμολόγηση
 - Γράφουμε ένα πρόγραμμα `ILT.py` με δύο εισόδους:
 - Τα αρχεία `γουαου.py` και `i.inp` – και ελέγχει αν

*Το `γουαου.py` μπαίνει σε άπειρη επανάληψη
με είσοδο `i.inp`*

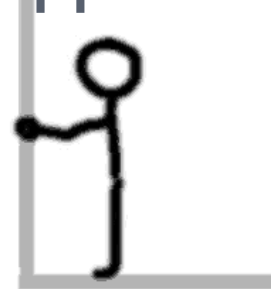
ΔΥΣΤΥΧΩΣ (ΕΥΤΥΧΩΣ) ΕΙΝΑΙ ΑΔΥΝΑΤΟ

- Το πρόγραμμα `ILT.py` δεν μπορεί να γραφεί!!!
- ❖ Αυτό δεν οφείλεται σε κάποιο περιορισμό της Python, απλά η εργασία αυτή δεν μπορεί να γίνει από υπολογιστή
- ❖ Πολύ περίεργο που ένα καλώς ορισμένο υπολογιστικό πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί από υπολογιστή!!!!

ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΓΕΥΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

- Έστω $P(I)$ ένα πρόγραμμα, όπου P τρέχει σε είσοδο I .
- Έστω ότι το πρόγραμμα ILT (το java πρόγραμμα για έλεγχο τερματισμού) **υπάρχει**
- Το $ILT(P, I)$ απαντάει «άπειρη επανάληψη» αν το $P(I)$ μπαίνει σε άπειρη επανάληψη, διαφορετικά λέει «τερματίζει».
- Θα κατασκευάζουμε ένα πρόγραμμα $KΛΑΨΕ$ (αποΚΛείεται να δουλέΨει) χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα ILT.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΕΙΣ ΑΤΟΠΟ ΑΠΑΓΩΓΗ



Το $KΛΑΨΕ(P)$ κάνει τα εξής:

1. Καλεί $ILT(P, P)$.
2. Αν ILT απαντά «άπειρη επανάληψη», τότε τερμάτισε.
3. Αν ILT απαντά «τερματίζει», τότε μπες σε άπειρη επανάληψη.

Τι γίνεται αν τρέξουμε $KΛΑΨΕ(KΛΑΨΕ)$;

- Αν η εκτέλεση τερματίσει, τότε στη γραμμή 1 ILT θα απαντούσε «τερματίζει», και άρα θα πηγαίναμε στην γραμμή 3 και...OOPS!
- Αν η εκτέλεση δεν τερματίσει, τότε μετά την γραμμή 1 θα πηγαίναμε στην γραμμή 2 και...OOPS!

Έχουμε **άτοπο** και άρα το ILT **δεν μπορεί να υπάρξει**

ΣΥΝΟΛΟ ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΗ

- Θεμελιώδης ιδιότητα με ρίζες στην Αριστοτέλεια λογική:
 - Για ένα στοιχείο x και ένα σύνολο A μία από τις δύο προτάσεις μπορεί να είναι αληθής:
 - το x ανήκει στο A (συμβολικά $x \in A$)
 - το x δεν ανήκει στο A (συμβολικά $x \notin A$)

Υπάρχουν βέβαια και τα **θολά σύνολα** (fuzzy sets)

ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\} = \{n : n \text{ είναι φυσικός αριθμός}\}$$

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{n : n \text{ είναι ακέραιος}\}$$

$$\mathbf{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbf{Z} \text{ και } b \neq 0\}$$

$$\mathbf{R} = \{x : x \text{ είναι πραγματικός αριθμός}\}$$

$$\mathbf{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbf{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Εναλλακτική παράσταση του $B = \{1, 2\}$

$$B = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \mathbb{R}\} = \{n: n \in \mathbb{N}, n < 3\}$$

- Το κενό σύνολο

$$\emptyset = \{x: x \neq x, x \in \mathbb{N}\}$$

ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ

Έστω δύο σύνολα $S \neq \emptyset$ και A .

Το A ονομάζεται υποσύνολο (subset) του S αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του S .

$$A \subseteq S \leftrightarrow (a \in A) \rightarrow (a \in S)$$

$$\forall x((x \in A) \rightarrow (x \in S))$$

ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα αν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Εναλλακτικός ορισμός: τα σύνολα είναι ίσα αν το A είναι υποσύνολο του B και το B είναι υποσύνολο του A .

$$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΥΝΟΛΩΝ

Αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$ δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A , τότε το A είναι **γνήσιο υποσύνολο** (proper subset) του B και συμβολίζουμε

$$A \subset B$$

Ισχύει $\emptyset \subseteq S$ και $S \subseteq S$ για κάθε σύνολο S

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ και $\{\{\emptyset\}\}$.

Το πρώτο είναι ένα σύνολο με 0 στοιχεία

Το δεύτερο και το τρίτο είναι σύνολα με 1 στοιχείο το καθένα.

1. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

2. $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$

3. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

4. $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$

5. $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

6. $\{\emptyset\} \not\subseteq \{\{\emptyset\}\}$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ - ΕΝΩΣΗ

Η *ένωση* (union) δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με

$$A \cup B$$

και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία και των δύο συνόλων A και B .

$$A \cup B = \{x: (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ - ΤΟΜΗ

Η **τομή** (intersection) δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με

$$A \cap B$$

και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν και στα δύο σύνολα A και B .

$$A \cap B = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ξένα** όταν η τομή τους είναι το $\emptyset$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Μεταθετική: $A \cap B = B \cap A$

$$A \cup B = B \cup A$$

Προσεταιριστική: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Επιμεριστική: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΟ

Το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα υποσύνολα ενός συνόλου S , ονομάζεται **δυναμοσύνολο** (power set) του S και συμβολίζεται με $P(S)$:

$$P(S) = \{A : A \subseteq S\}$$

$$S = \{a, b, c\}$$

$$P(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = S\}$$

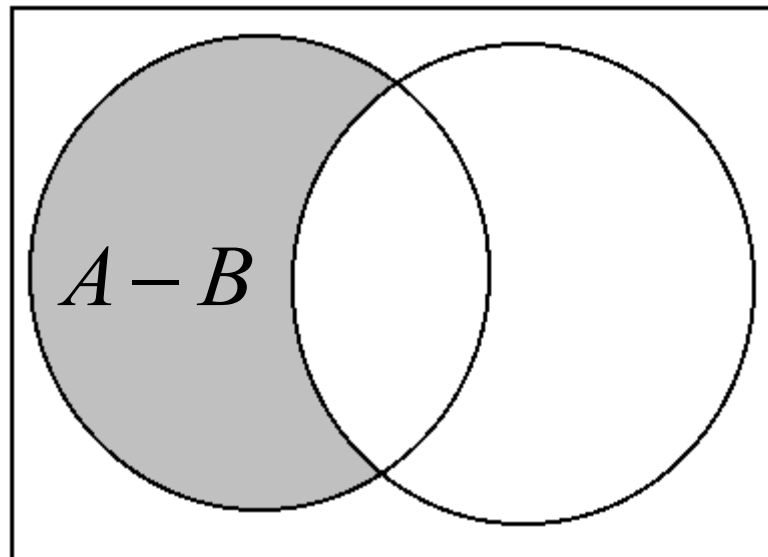
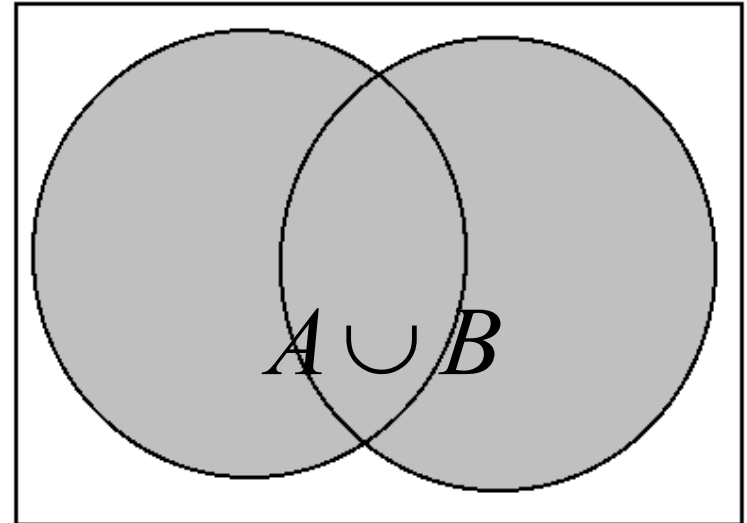
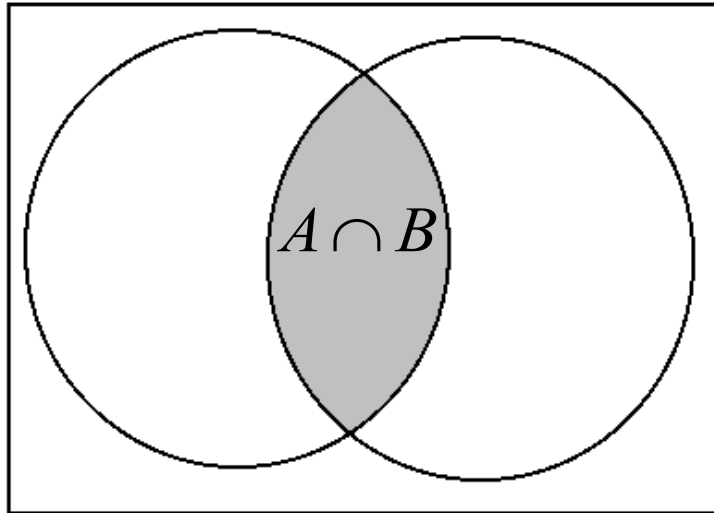
ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ - ΔΙΑΦΟΡΑ

- Η *διαφορά* (difference) δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με $A - B$ ή $A \setminus B$ και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B :

$$A - B = \{x: (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ VENN

(VENN DIAGRAMS)



ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ – ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

Αν $A \cap B = \emptyset$ ισχύει $A - B = A$.

Αν $B \subseteq U$, τότε το σύνολο $U - B$ συμβολίζεται με $\bar{B}$ και ονομάζεται **συμπληρωματικό (complement)** του B ως προς το U (Το U συνήθως το ονομάζουμε *σύμπαν*).

Ιδιότητες:

$$B \cup \bar{B} = U$$

$$B \cap \bar{B} = \emptyset$$

$$\bar{\bar{B}} = B$$

$$\bar{\emptyset} = U$$

$$\bar{U} = \emptyset$$

NOMOI DE MORGAN

(DE MORGAN'S LAWS)

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ΚΑΠΟΙΕΣ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$$A \cap U = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\overline{\bar{A}} = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$\bar{\bar{U}} = \emptyset$$

$$\bar{\emptyset} = U$$

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΕΝΩΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟΜΗΣ

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{a : \exists k \in \{1, 2, \dots, n\}, a \in A_k\}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{a : \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, a \in A_k\}$$

ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ

Το σύνολο $D = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ όπου:

$$A_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n \text{ και } A_i \subseteq S$$

αποτελεί ***n*-διαμέριση** (partition) του συνόλου S εάν:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

$$\forall i \forall j \left((i \neq j) \rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset) \right)$$

$$\text{Πιο απλά: } A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (1)

- A = το σύνολο των δυνατών ενδείξεων που μπορεί να προκύψουν από τη ρίψη δύο διαφορετικών ζαριών
- Να κατασκευαστεί διαμέριση του A σε υποσύνολα όπου το άθροισμα των ενδείξεων των δύο διαφορετικών ζαριών να είναι το ίδιο
- $A = \{(1,1), (1,2), (2,1), \dots, (6,6)\}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (2)

- Δυνατά αθροίσματα: 2, 3, 4, ..., 12
- Κατασκευή 11-διαμέρισης

$$A_1 = \{(1,1)\},$$

$$A_2 = \{(1,2), (2,1)\}$$

$$A_3 = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$$

$$A_4 = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$$

$$A_5 = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

$$A_6 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

$$A_7 = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$

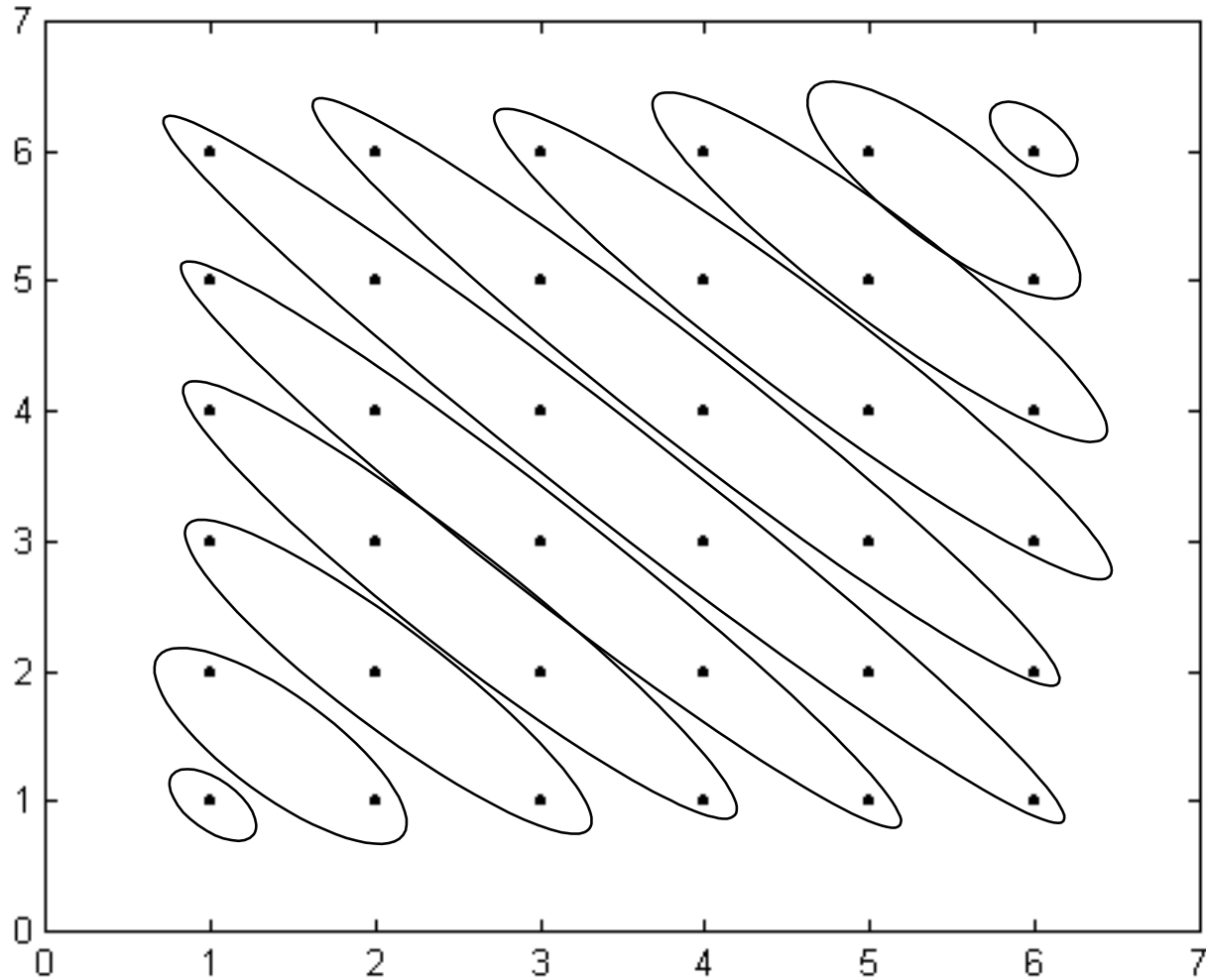
$$A_8 = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$$

$$A_9 = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$$

$$A_{10} = \{(5,6), (6,5)\}$$

$$A_{11} = \{(6,6)\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (3)



ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΖΕΥΓΟΣ

(ORDERED PAIR)

- Ζεύγος στοιχείων που είναι τοποθετημένα με συγκεκριμένη σειρά

$$(a, b)$$

$$((a, b) = (a', b')) \leftrightarrow (a = a' \wedge b = b')$$

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

(CARTESIAN PRODUCT)

- Το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (a, b) όπου $a \in A$ και $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$B = \{a, b, c\}$$

$$\Gamma = \{1, 2\}$$

$$B \times \Gamma = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$\Gamma \times B = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$$

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΟΛΛΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}$$

$$A^n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A, i = 1, \dots, n\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Αν $B = \{0,1\}$ τότε

$$B^n = \{(b_1, b_2, \dots, b_n) : b_i = 0,1\}$$

- n -άδες της μορφής $(0, 1, 1, 0, 0, \dots, 1)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδειχτεί ότι $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$
2. Να δείχτεί ότι $(A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta) = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$

ΜΕΣΑΪΑΣ ΔΥΣΚΟΛΙΑΣ (1,5 – 2/24)

Έστω το διμελές κατηγορημα $P(x, y) = \text{"το } x \text{ είναι υποσύνολο (όχι απαραίτητα γνήσιο) του } y \text{ (} x \subseteq y \text{)"}$, όπου ο τομέας αναφοράς είναι το δυναμοσύνολο των φυσικών αριθμών (δηλαδή όλα τα υποσύνολα του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$). Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λανθασμένες με αιτιολόγηση:

1. Η λογική πρόταση $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge P(y, x))$ είναι αληθής.
2. Η λογική πρόταση $\forall x \forall y ((x \cap y = x) \rightarrow P(x, y))$ είναι αληθής.
3. Η λογική πρόταση $\exists x \exists y \forall z (\neg P(x \cap y, z))$ είναι αληθής.
4. Η λογική πρόταση $\exists x \left((x \neq \emptyset) \wedge \left(\exists y \left(P(y, x) \wedge \left(\forall z (P(z, x) \rightarrow (z = y)) \right) \right) \right) \right)$ είναι αληθής.

..

