## 1. Δυναμοσύνολα (Παράδειγμα 1.6.12)

Δίνεται το σύνολο $P(S: A) = \{X \in P(S): A \subseteq X\}$, όπου $A \subseteq S$ και P(S) το δυναμοσύνολο του S. Αν

A={a,b}    S={a,b,c,d,e}    B={a,f}

Δηλαδή στο P(S:A) ανήκουν όλα τα υποσύνολα του S τα οποί α περιέχουν το A.

***Α) Να βρεθούν τα στοιχεία του P(S:A).***

$|\mathrm{S}|=5 \Rightarrow |\mathrm{P(S)}|=2^5 = 32$ όλα τα υποσύνολα του S.

Βρίσκουμε τα υποσύνολα του S που περιέχουν το A.

Με 2 στοιχεία:    {a,b}  (1 σύνολο)

Με 3 στοιχεία:    {a,b,*}  (3 σύνολα, όπου *=c,d,e)

Με 4 στοιχεία:    {a,b,*,*}  (3 σύνολα, όπου *,*=(c,d),(c,e)(d,e))

Με 5 στοιχεία:    {a,b,*,*,*}  (1 σύνολο, όπου *,*,*=c,d,e)

Άρα:

$$|\mathrm{P(S{:}A)}|=1+3+3+1=8$$

P(S:A)={{a,b},{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,b,c,d},{a,b,c,e},{a,b,d,e},{a,b,c,d,e}}

***Β) Να βρεθεί το  P(A:B).***

Αναζητούμε όλα τα υποσύνολα του A που «περιέχουν» το B.

P(A)={Ø,{a},{b},{a,b}}

Επειδή το B={a,f} δεν υπάρχουν τέτοια υποσύνολα του A.

Άρα P(A:B)= Ø.

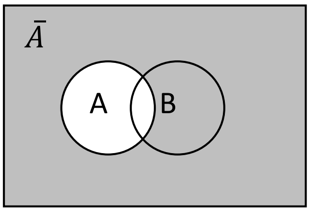
***Γ) Να δειχτεί οτι για κάθε C ισχύει  P(C: Ø)=P(C).***

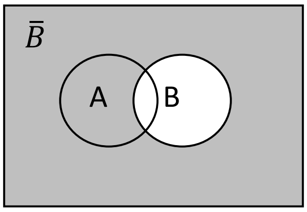
Επειδή το Ø είναι υποσύνολο κάθε συνόλου ισχύει P(C: Ø)=P(C).

## 2. Διαγράμματα Venn (Παράδειγμα 1.6.14 – δεν περιέχει Venn)

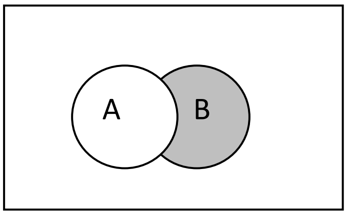
***Α) Να δειχτεί ότι*** $\bar{A}$-$\bar{B}$=B-A

$$\bar{A}\text{-}\bar{B}=\{x:x\in\bar{A}, x\notin\bar{B}\}=\{x: x\notin A, x\in B\}=B-A$$



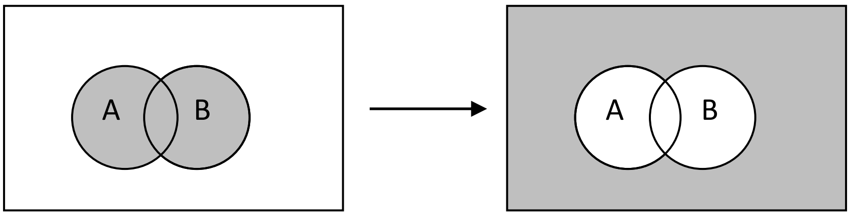

$\bar{A}$-$\bar{B}$ =



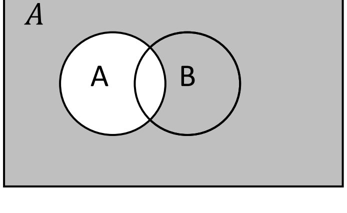

$= B - A$

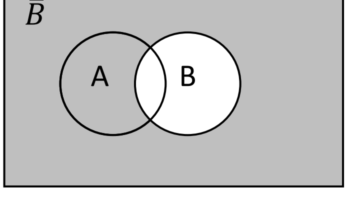
***Β) Να δειχτεί ότι*** $\overline{A\cup B}$=$\bar{A}$∩$\bar{B}$

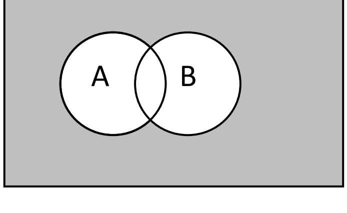
$$\overline{A\cup B}=\{x:x\notin A\cup B\}=\{x: x\notin A\ \kappa\alpha\iota\ x\notin B\}=\{x: x\in\bar{A}\ \kappa\alpha\iota\ x\in\bar{B}\}=\bar{A}\cap\bar{B}$$




$A\cup B$ $\qquad$ $\overline{A\cup B}$




$\bar{A}\cap\bar{B}$

## 3. Να αποδειχτεί ότι $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$ (1.7.21)

$$(A\cup B)-(A\cap B)=\{x: x\in A\cup B, x\notin A\cap B\}$$

$$=\{x: x\in A\ \acute{\eta}\ x\in B, x\in\overline{A\cap B}\}$$

$$= \{x : x \in A \text{ ή } x \in B, x \in \bar{A} \text{ ή } x \in \bar{B}\}$$

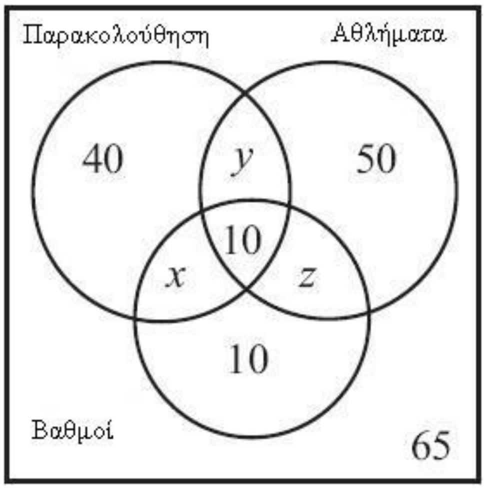
(επιμερισμός) $$= \{x : (x \in A \text{ και } x \notin B) \text{ ή } (x \in B \text{ και } x \notin A\}$$

$$= \{x : x \in (A - B) \text{ ή } x \in (B - A)\}$$

$$= (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A})$$

(και με διάγραμμα Venn)

4. Οι μαθητές του 1$^{ου}$ Δημοτικού Θεσσαλονίκης λαμβάνουν κάποια διπλώματα στο τέλος της χρονιάς στην τελετή λήξης της σχολικής χρονιάς. Αυτό το χρόνο 120 μαθητές πήραν δίπλωμα παρακολούθησης μαθημάτων (δεν έκαναν ούτε μία απουσία), 180 μαθητές δίπλωμα συμμετοχής στους σχολικούς αθλητικούς αγώνες και 80 δίπλωμα αριστείας. Από αυτούς, οι 40 μαθητές που πήραν δίπλωμα παρακολούθησης δεν πήραν κανένα άλλο δίπλωμα, οι 50 μαθητές που πήραν το δίπλωμα συμμετοχής στους αθλητικούς αγώνες δεν πήραν κανέναν άλλο δίπλωμα κια οι 10 μαθητές που πήραν δίπλωμα αριστείας δεν πήραν κανένα άλλο δίπλωμα. Επιπλέον, 10 μαθητές παίρνουν και τα τρία διπλώματα ενώ 65 μαθητές δεν παίρνουν κανένα δίπλωμα. Σχεδιάστε ένα Venn διάγραμμα και βρείτε πόσοι μαθητές είχε το σχολείο αυτή τη χρονιά. (Wiley άσκηση 3.1.30)




Οι εξής εξισώσεις μπορούν να γραφούν:
$x + y + 10 + 40 = 120$
$x + z + 10 + 10 = 80$
$y + z + 10 + 50 = 180$.

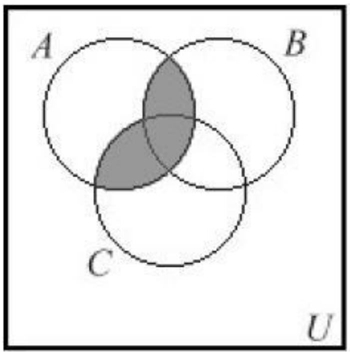
Η λύση σε αυτό το σύστημα είναι $x = 5$, $y = 65$ και $z = 55$. Επομένως το συνολικό πλήθος παιδιών της σχολικής χρονιάς είναι

$$65 + 40 + 50 + 10 + 10 + 5 + 65 + 55 = 300$$

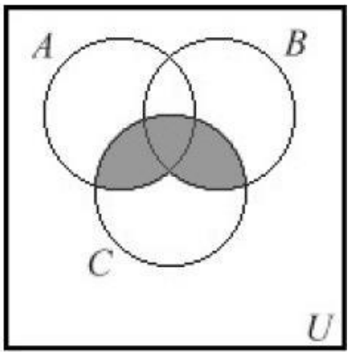
5. Είναι σωστές οι παρακάτω δύο προτάσεις; Για αυτές που δεν είναι δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο να φαίνεται ότι δεν ισχύει (χρησιμοποιείστε είτε Venn είτε αναλυτικά). (Wiley άσκηση 3.1.17)

$$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$$

$$(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) - \mathrm{A} = (\mathrm{B} - \mathrm{A}) \cup (\mathrm{C} - \mathrm{A})$$

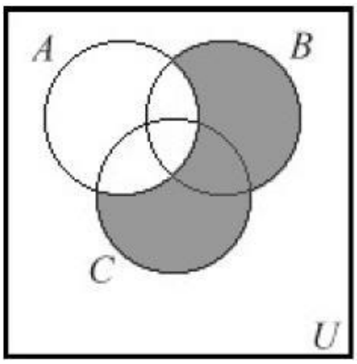



$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$

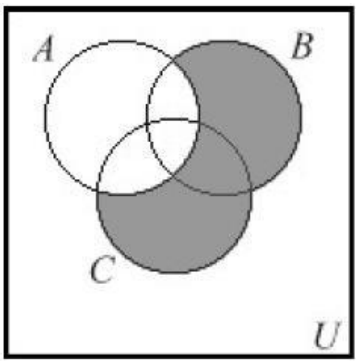



$(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$

Αντιπαράδειγμα: *A* = {1,2,3} *B* ={1,3,4} *C* = {1,2,4}




$(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) - \mathrm{A}$




$(\mathrm{B} - \mathrm{A}) \cup (\mathrm{C} - \mathrm{A})$

Αληθές.

$$\{x : x \in (B \cup C) \ \kappa\alpha\iota \ x \notin A\}$$

$$= \{x : x \in B \text{ ή } x \in C, x \in \bar{A}\}$$

(επιμερισμός) $$= \{x : (x \in B \ \kappa\alpha\iota \ x \in \bar{A}) \text{ ή } (x \in \bar{A} \ \kappa\alpha\iota \ x \in C\}$$

$$= (\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}) \cup (\mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{A}})$$

$$= (\mathrm{B} - \mathrm{A}) \cup (\mathrm{C} - \mathrm{A})$$

6. Για κάθε μία από τις παρακάτω απαιτήσεις δώστε μία διαμέριση του συνόλου {1,2,3,4,5,6} (Wiley άσκηση 3.2.8)

1. Κάθε υποσύνολο έχει ίδιο μέγεθος. {{1,3},{2,4},{5,6}}
2. Κανένα υποσύνολο δεν έχει ίδιο μέγεθος με άλλο. {{2},{3,6},{4,1,5}}
3. Υπάρχουν όσο το δυνατόν περισσότερα υποσύνολα. {{1},{2},{3},{4},{5},{6}}
4. Υπάρχουν όσο το δυνατό λιγότερα υποσύνολα. {{1,2,3,4,5,6}}

7. Δείξτε ότι: αν $A \cap B = A$ τότε $\bar{A} \cup B = U$, όπου τα A και B είναι υποσύνολα του σύμπαντος $U$. (Wiley άσκηση 3.4.18)

$$\bar{A} \cup B = (\overline{A \cap B}) \cup B = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup B = \bar{A} \cup (\bar{B} \cup B) = \bar{A} \cup U = U$$

8.Αναπαραστήστε τα παρακάτω σύνολα. (Wiley 3.1 Ex 4)

Το σύνολο των ακεραίων που είναι πολλαπλάσια του 3.

***Λύση:*** $\{3k : k \in \mathbb{Z}\}$

Το σύνολο των τέλειων τετραγώνων.

***Λύση:*** $\{\mu^2 : \mu \in \mathbb{Z}\}$

Το σύνολο των φυσικών αριθμών που τελειώνουν με 1.

***Λύση:*** $\{10k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$

Το σύνολο $\mathbb{Q}$.

***Λύση:*** $\{\frac{\alpha}{\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$

9. Στο παρακάτω πρόβλημα να βρείτε από την τριάδα συνόλων ποιο δεν είναι ίσο με τα υπόλοιπα. (Wiley 3.1.9)

$$A = \{a + b : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{a - b : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$$

$$C = \mathbb{N}$$

Αυτό που είναι διαφορετικό είναι το Β, αφού υπάρχει στοιχείο του που δεν ανήκει στο $N$. Για παράδειγμα, αν α=3 και b=5, τότε $3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}$

## <u>10. Καρτεσιανό Γινόμενο – Πλήθος (1.7.23)</u>

Δίνεται $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$  $B=\{\alpha,\delta\}$, όπου $|A|=3$ και $|B|=2$. Στα παρακάτω σύνολα να βρεθεί ο αριθμός των στοιχείων.

a) $|P(A)|=2^3=8$

b) $|P(B)|=2^2=4$

c) $|A \cup B|$. Τα $A$ και $B$ έχουν ένα κοινό στοιχείο (το $\alpha$). Αν αθροίσουμε το πλήθος των στοιχείων τους το $\alpha$ θα το μετρήσουμε δύο φορές. Άρα πρέπει να το αφαιρέσουμε μία φορά και γενικά πρέπει να αφαιρέσουμε μία φορά οτι,δήποτε βρίσκεται στην τομή των δύο συνόλων. Άρα:
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 + 2 - 1 = 4$$
Πράγματι, $|A \cup B| = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

d) $|(A \times \{\gamma\}) \cup (B \times \{\alpha\})|$
$$A \times \{\gamma\} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\gamma),(\gamma,\gamma)\} \rightarrow |A \times \{\gamma\}| = 3 \cdot 1 = 3$$
$$B \times \{\alpha\} = \{(\alpha,\alpha),(\delta,\alpha)\} \rightarrow |B \times \{\alpha\}| = 2 \cdot 1 = 2$$
$|(A \times \{\gamma\}) \cup (B \times \{\alpha\})| = 3 + 2 = 5$ αφού τα σύνολα που ενώνονται δεν έχουν κοινό στοιχείο.

e) $A \times B = \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\delta),(\beta,\alpha),(\beta,\delta),(\gamma,\alpha),(\gamma,\delta)\}$
$$|A \times B| = 3 \cdot 2 = 6$$

f) $A^2 = A \times A = \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma),(\beta,\alpha),(\beta,\beta),(\beta,\gamma),(\gamma,\alpha),(\gamma,\beta),(\gamma,\gamma)\}$
$$|A^2| = |A| \cdot |A| = 3^2 = 9$$

g) $B^2 = B \times B = \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\delta),(\delta,\alpha),(\delta,\delta)\}$
$$|B^2| = |B| \cdot |B| = 2^2 = 4$$

## <u>11. Καρτεσιανό Γινόμενο – Στοιχεία (1.7.24)</u>

Να περιγραφούν τα στοιχεία των $B^2$, $B^4$ αν $B=\{0,1\}$.

$$B^2 = B \times B = \{(b_1, b_2): b_1, b_2 \in \{0,1\}\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

Το $B^2$ έχει συνολικά 4 στοιχεία ($2^2$)

$$B^4 = B \times B \times B \times B = \{(b_1, b_2, b_3, b_4): b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0,1\}\}$$

Το σύνολο θα έχει $|B^4|=2^4=16$ στοιχεία. Απαρίθμηση των τετράδων.

Όλοι οι δυαδικοί αριθμοί από το 0 έως το 15 (μπορείς να το κάνεις και σε μορφή δέντρου)

## 12. Καρτεσιανό Γινόμενο – Απόδειξη (1.7.25)

Να δειχτεί ότι $(A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta) = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$

$$(A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta) = \{(x, y): x \in A \cap B \ \kappa\alpha\iota\ y \in \Gamma \cap \Delta\}$$

$$= \{(x, y): (x \in A \ \kappa\alpha\iota\ x \in B) \kappa\alpha\iota\ (y \in \Gamma \ \kappa\alpha\iota\ y \in \Delta)\}$$

$$= \{(x, y): (x \in A \ \kappa\alpha\iota\ y \in \Gamma) \kappa\alpha\iota\ (x \in B \ \kappa\alpha\iota\ y \in \Delta)\}$$

$$= \{(x, y): (x, y) \in A \times \Gamma \ \kappa\alpha\iota\ (x, y) \in B \times \Delta\}$$

$$= \{(x, y): (x, y) \in (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)\}$$

$$= (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$$

## 13. Καρτεσιανό Γινόμενο – Απόδειξη (1.7.25)

Να δειχτεί ότι $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$

$$A \times (B \cup \Gamma) = \{(x, y): x \in A \ \kappa\alpha\iota\ y \in B \cup \Gamma\}$$

$$= \{(x, y): x \in A \ \kappa\alpha\iota\ (y \in B \text{ ή } y \in \Gamma)\}$$

$$= \{(x, y): (x \in A \ \kappa\alpha\iota\ y \in B) \text{ή } (x \in A \ \ \kappa\alpha\iota\ y \in \Gamma)\}$$

$$= \{(x, y): (x, y) \in A \times B \text{ ή } (x, y) \in A \times \Gamma\}$$

$$= \{(x, y): (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times \Gamma)\}$$

$$= (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$$

## Άλυτες Ασκήσεις

1. Είναι σωστές οι παρακάτω προτάσεις; Για αυτές που δεν είναι δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο να φαίνεται ότι δεν ισχύει (χρησιμοποιείστε είτε Venn είτε αναλυτικά). (Wiley 3.1.17)
    a. $\mathrm{A} - (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} - \mathrm{C})$
    b. $(\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{C}) \subseteq (\mathrm{A} - \mathrm{C})$
    c. $(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) - \mathrm{A} = \mathrm{B} \cap (\mathrm{C} - \mathrm{A})$
    d. Αν $A \subseteq \mathrm{B}$, τότε $A - B = B - A$

2. Ποιες από τις παρακάτω διαμερίσεις του συνόλου Α={1,2,3,4,5,6,7,8} δεν είναι διαμέριση και γιατί; (Wiley 3.2.16)
    a. Σ={1,2,{3,4,5},{6,7,8}}
    b. Τ={{1,5},{6,7,2},{4,3,5},{8}}
    c. Υ={{1,8},{4,3,5},{7,2}}
    d. Φ={{4,2,3},{5,1,8},{6,7}}

3. Αποδείξτε ότι αν $(A \cup B) \subseteq B$ τότε $A \subseteq (A \cap B)$. (Wiley 3.3 Prop 2)

4. Δείξτε ότι αν $A \subseteq \mathrm{B}$ τότε $P(A) \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{B})$ (Wiley 3.3.21)

5. Δείξτε ότι αν $A \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$ τότε $A \cup \mathrm{B} = \mathrm{B}$ (Wiley 3.3.18)