

Ο Πλανήτης των Vulcan και η Απόδειξη των Γαλανομάτηδων

3



Στη χώρα του Σποκ, κάθε κάτοικος έχει καστανά ή μπλε μάτια. Όλοι μπορούν να δουν το χρώμα των ματιών όλων των άλλων, αλλά όχι το δικό τους. Αν κάποιος συμπεράνει ποτέ ότι έχει μπλε μάτια, φεύγει από τον πλανήτη τα μεσάνυχτα. Μια μέρα, ο άρχων του πλανήτη λέει δημόσια:

«Τουλάχιστον ένας από εσάς έχει μπλε μάτια»

Τι συμβαίνει στη συνέχεια;

Ο Σποκ καλείται να αποδείξει την εξής πρόταση για τον πλανήτη του:

Αν υπάρχουν n γαλανομάτηδες στον Vulcan, τότε όλοι θα φύγουν την n -οστή μέρα.

Η Απόδειξη

Μια **απόδειξη** είναι ένα έγκυρο σύνολο επιχειρημάτων που καθιερώνει την αλήθεια μιας δήλωσης-πρότασης.

Μια απόδειξη μπορεί να χρησιμοποιήσει:

- ▣ τις **υποθέσεις** (αν υπάρχουν),
- ▣ τα **αξιώματα** που θεωρούνται ότι αληθεύουν (χωρίς απόδειξη),
- ▣ και προηγουμένως **αποδεδειγμένα θεωρήματα ή προτάσεις**.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα συστατικά και τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων, καταγράφεται βήμα προς βήμα η απόδειξη που καθιερώνει την αλήθεια της δήλωσης-πρότασης.

Είδη αποδεικτικών προτάσεων

Θεώρημα (theorem): Είναι μία δήλωση-πρόταση η οποία **μπορεί να αποδειχθεί**. Στα μαθηματικά ονομάζουμε θεωρήματα τις προτάσεις που έχουν σημαντικές εφαρμογές.

Πρόταση (proposition): Είναι όπως το θεώρημα αλλά είναι **λιγότερο σημαντική**.

Λήμμα (lemma): Είναι μία πρόταση η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως **βοηθητική** για την απόδειξη ενός άλλου θεωρήματος ή πρότασης.

Πόρισμα (corollary): Είναι μία πρόταση η οποία **παράγεται άμεσα ή σχεδόν άμεσα** από κάποιο θεώρημα ή πρόταση.

Εικασία (conjecture): Είναι μία πρόταση η οποία φαίνεται να αληθεύει για μερικές περιπτώσεις και **υποθέτουμε ότι αληθεύει** για όλες χωρίς όμως να υπάρχει απόδειξη γι' αυτό. Αν μία εικασία αποδειχθεί τότε γίνεται θεώρημα.

Παραδείγματα

Θεώρημα (theorem): [Πυθαγόρειο] Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A τότε: $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$.

Πρόταση (proposition): Αν $x^2 = a^2$ τότε $x = a$ ή $x = -a$.

Λήμμα (lemma): Το τετράγωνο κάθε κάθετης πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της κάθετης πλευράς πάνω στην υποτείνουσα.

Πόρισμα (corollary): Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι: $B\Gamma^2 \neq AB^2 + A\Gamma^2$ τότε η γωνία A δεν είναι ορθή.

Εικασία (conjecture): Μία από τις πιο διάσημες «πρώην» εικασίες είναι το τελευταίο θεώρημα του Fermat: «Καμία τριάδα a, b, c θετικών ακεραίων δεν μπορεί να είναι λύση της εξίσωσης: $a^n + b^n = c^n$ για κάθε ακέραιο $n > 2$ » (γενίκευση του Πυθαγορείου). Η εικασία έγινε το 1637 από τον Fermat στο περιθώριο των σημειώσεών του και αποδείχθηκε το 1995 από τον Andrew Wiles.



Pierre de Fermat



Andrew Wiles

Μέθοδοι Απόδειξης Θεωρημάτων

7

Άμεση Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $p \rightarrow q$, αρκεί να δείξουμε με διαδοχικά βήματα ότι αν p είναι Αληθής τότε και η q είναι αληθής.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι αν ο n είναι περιττός τότε και ο n^2 είναι περιττός.

Αντιθετοαντίστροφη – Έμμεση Απόδειξη

8

Για να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $p \rightarrow q$, αρκεί να δείξουμε ότι η αντιθετοαντίστροφή της $\neg q \rightarrow \neg p$ είναι Αληθής.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι αν ο $3n+2$ είναι περιττός τότε και ο n είναι περιττός.

Απόδειξη με Αντίφαση

9

Έστω ότι μπορεί να βρεθεί μία **αντίφαση** (F) q έτσι ώστε $\neg p \rightarrow q$ να είναι Αληθής. Άρα η πρόταση $\neg p$ είναι Ψευδής και άρα η p θα πρέπει να είναι Αληθής.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι ο αριθμός $2^{1/2}$ είναι άρρητος χρησιμοποιώντας απόδειξη με αντίφαση.

Παράδειγμα

11

Θέμα 6^ο: (1,5 Μονάδες)

Να αποδειχθεί ότι αν ο n είναι ακέραιος και ο n^3+5 είναι περιττός, τότε ο n είναι άρτιος χρησιμοποιώντας και τους δύο τρόπους απόδειξης: α) έμμεση απόδειξη (αντιθετοαντίστροφο) και β) απόδειξη με αντίφαση.

Στρατηγική

12

Συνήθως τα θεωρήματα έχουν τη μορφή
συνεπαγωγών: $p \rightarrow q$

1^η Προσπάθεια: *Άμεση*

2^η Προσπάθεια: *Αντιθετοαντίστροφη*

3^η Προσπάθεια: *Αντίφαση*

4^η Προσπάθεια: *Εξάντληση;;; – Άλλες Μέθοδοι;;;*

Αποδείξεις κατά Περίπτωση

13

Για να αποδείξουμε μία συνεπαγωγή τη μορφής

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q$$

χρησιμοποιούμε την ταυτολογία:

$$((p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q) \leftrightarrow (p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)$$

Παραδείγματα:

1. Να χρησιμοποιηθεί απόδειξη κατά περίπτωση για να δειχτεί ότι $|xy|=|x||y|$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί.

Αποδείξεις Ισοδυναμίας

14

Για να αποδείξουμε θεώρημα που είναι ισοδυναμία, δηλαδή της μορφής $p \leftrightarrow q$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ταυτολογία:

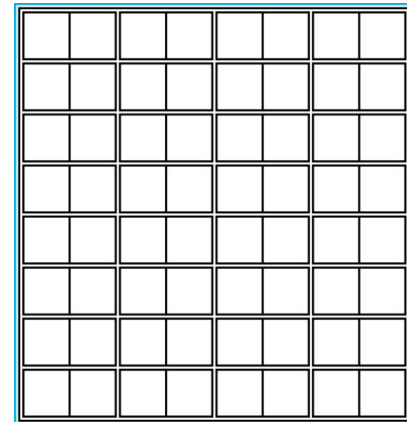
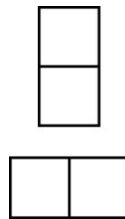
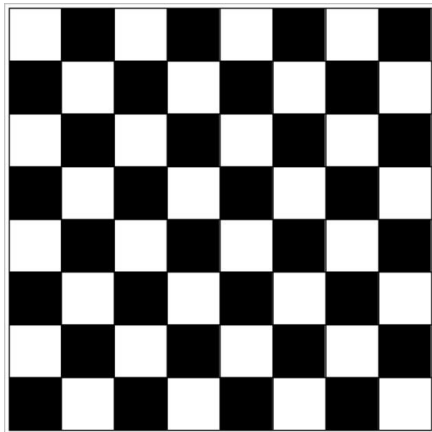
$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

Παράδειγμα: Να αποδειχθεί ότι ο ακέραιος n είναι περιττός *αν και μόνο αν* ο n^2 είναι περιττός.

Ντόμιнос

Μπορεί μία σκακιέρα 8×8 να καλυφθεί πλήρως από ντόμινο μεγέθους 1×2 ;

Λύση: Ναι! Το παρακάτω παράδειγμα είναι μία κατασκευαστική απόδειξη.



Ντόμιнос

Μπορεί μία σκακιέρα 8×8 να καλυφθεί πλήρως από ντόμινο μεγέθους 1×2 αν αφαιρέσουμε μία γωνία;

Λύση:

(Έστω ότι μπορεί να καλυφθεί)

Η σκακιέρα έχει $64 - 1 = 63$ τετράγωνα.

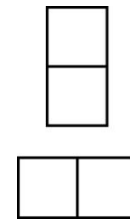
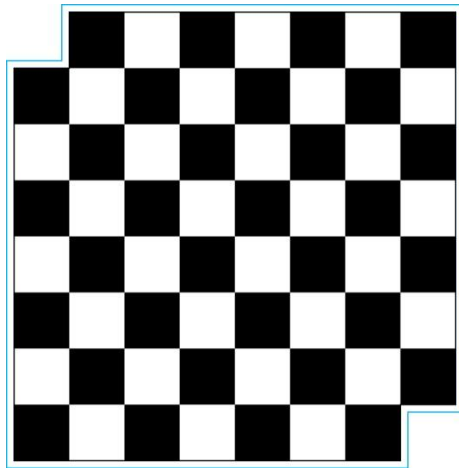
Αφού κάθε ντόμινο έχει 2 τετράγωνα, η σκακιέρα θα πρέπει να έχει άρτιο πλήθος τετραγώνων.

Το 63 δεν είναι άρτιος.

Άτοπο.

Ντόμιнос

Μπορεί μία σκακιέρα 8×8 να καλυφθεί πλήρως από ντόμινο μεγέθους 1×2 αν αφαιρέσουμε δύο αντιδιαμετρικές γωνίες;



Αποδείξεις για Ποσοτικοποιημένες Προτάσεις

Αποδείξεις Ύπαρξης:

Πολλά θεωρήματα κάνουν ισχυρισμούς ότι υπάρχουν αντικείμενα συγκεκριμένου τύπου.

$$\exists xP(x)$$

Εποικοδομητική απόδειξη ύπαρξης: εύρεση στοιχείου a ώστε η $P(a)$ να είναι Αληθής.



Μη Εποικοδομητική απόδειξη ύπαρξης: δεν βρίσκουμε στοιχείο a ώστε η $P(a)$ να είναι Αληθής, αλλά με άλλο τρόπο (π.χ. αντίφαση) βρίσκουμε ότι η $\exists xP(x)$ είναι Αληθής.

Παραδείγματα

Παράδειγμα: Ναδειχθεί ότι υπάρχει θετικός ακέραιος που μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα κύβων θετικών ακεραίων με δύο διαφορετικούς τρόπους.

$$1729=10^3+9^3=12^3+1^3$$

Παράδειγμα: Ναδειχθεί ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί x και y έτσι ώστε ο x^y να είναι ρητός.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι ένας από τους δύο αριθμούς $2 \times 10^{500} + 15$ και $2 \times 10^{500} + 16$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο

Αποδείξεις Μοναδικότητας

Κάποια θεωρήματα ισχυρίζονται ύπαρξη μοναδικού σημείου με συγκεκριμένη ιδιότητα.

Ο τρόπος απόδειξης είναι:

1. **Ύπαρξη:** αποδεικνύουμε ότι υπάρχει στοιχείο x με την ιδιότητα
2. **Μοναδικότητα:** Δείχνουμε ότι αν $x \neq y$, τότε το y δεν έχει την ιδιότητα.

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg P(y))) \quad \text{ή} \quad \exists! x(P(x))$$

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι κάθε ακέραιος έχει έναν μοναδικό προσθετικό αντίθετο.

Αντιπαράδειγμα

Μπορούμε να δείξουμε ότι η δήλωση της μορφής $\forall xP(x)$ είναι ψευδής αν μπορούμε να βρούμε μία τιμή a για την οποία η $P(a)$ να είναι ψευδής (το **αντιπαράδειγμα**).

Παράδειγμα: Ναδειχθεί ότι η δήλωση «Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα των τετραγώνων τριών ακεραίων» είναι Ψευδής.

Παράδειγμα: Όλοι οι πρώτοι είναι περιττοί. (κάντε το παίρνοντας το συμπλήρωμα)

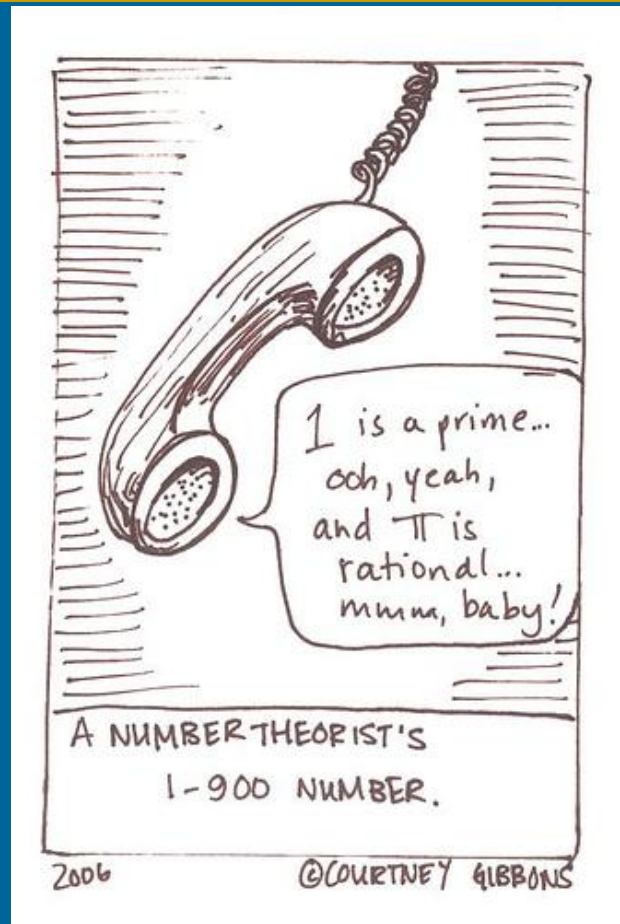
Εξάντληση

Όταν η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε δεν γίνεται με τις προηγούμενες μεθόδους:

Εξαντλητική Απόδειξη (Exhaustive Proof)

- Αποδεικνύουμε το ζητούμενο εξετάζοντας **κάθε μία** τιμή της μεταβλητής (ή συνδυασμούς των μεταβλητών) στο πεδίο ορισμού της πρότασης.

Παράδειγμα: Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \leq 4$ ισχύει: $(n+1)^3 \geq 3^n$

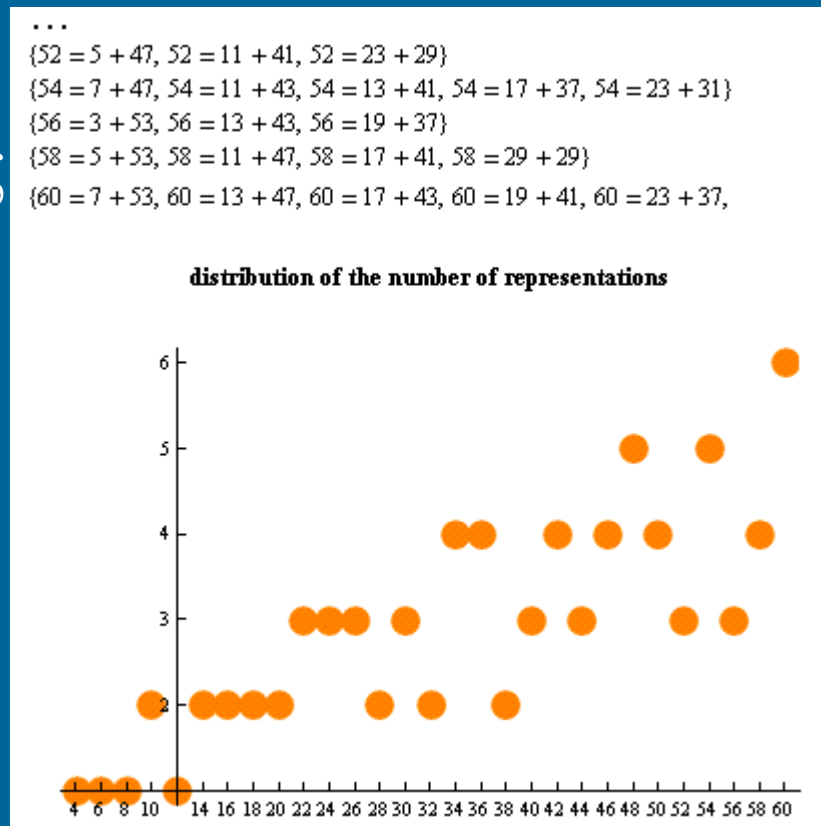


ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

Θεωρία Αριθμών

- Κλάδος μαθηματικών που ασχολείται με τους ακέραιους και τις ιδιότητές τους.

- Πολλά και εξαιρετικά δύσκολα προβλήματα – Εικασία του Goldbach



Κάποιες Εφαρμογές

- Συναρτήσεις Κατακερματισμού (Hashing Functions)
 - Ψευδοτυχαίοι Αριθμοί
 - Ψηφίο Ελέγχου
-

Η Διαίρεση

Ένας ακέραιος a διαιρεί τον b όταν υπάρχει c έτσι ώστε $b=ac$.

$a \rightarrow$ παράγοντας του b

$b \rightarrow$ πολλαπλάσιο του a

$$a \mid b \equiv \exists c(ac=b)$$

$$a \nmid b \equiv \forall c(ac \neq b)$$

Ιδιότητες

1. Αν $a \mid b$ και $a \mid c$ τότε $a \mid (b+c)$
2. Αν $a \mid b$ τότε $a \mid bc$ για όλους τους ακεραίους c
3. Αν $a \mid b$ και $b \mid c$ τότε $a \mid c$

Πόρισμα:

Αν $a \mid b$ και $a \mid c$ τότε $a \mid (mb+nc)$ όπου m και n ακέραιοι.

Πρώτοι Αριθμοί

Ένας θετικός ακέραιος p λέγεται *πρώτος* αν οι μόνοι θετικοί του παράγοντες είναι το 1 και το p . Αν ένας θετικός ακέραιος δεν είναι πρώτος λέγεται *σύνθετος*.

Θεμελιώδες θεώρημα αριθμητικής:

Κάθε θετικός ακέραιος μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο σαν πρώτος αριθμός ή σαν γινόμενο πρώτων αριθμών όπου οι πρώτοι παράγοντες γράφονται σε σειρά μη ελαττούμενου μεγέθους.

Θεωρήματα

1. Αν ο n είναι σύνθετος ακέραιος, τότε ο n έχει διαιρέτη πρώτο αριθμό μικρότερο από ή ίσο με $n^{1/2}$. (Απόδειξη)
 1. Ναδειχτεί ότι ο 101 είναι πρώτος.
2. Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί. (Απόδειξη)

Βαθμιδωτή Αριθμητική

$(a \bmod n)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του a από το n .

$$a \bmod n = r$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a = dn + r \text{ για κάποιον ακέραιο } d \quad \text{Απόδειξη}$$

Αν a, b και n είναι ακέραιοι αριθμοί τότε ο a είναι ισοδύναμος του $b \bmod n$ αν ο n διαιρεί το $a-b$.

$$a \equiv b \pmod{n}$$

$$\begin{aligned} 31 &\equiv 81 \pmod{2} \\ 31 &\equiv_2 81 \end{aligned}$$

Επίσης:

$$a \equiv b \pmod{n} \leftrightarrow a \bmod n = b \bmod n$$

$$\begin{aligned} 31 &\equiv 80 \pmod{7} \\ 31 &\equiv_7 80 \end{aligned}$$

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

$$\text{ΜΚΔ}(x,y) = \text{μέγιστο } k \geq 1 : k \mid x \text{ και } k \mid y$$

Αν οι a και b είναι θετικοί ακέραιοι, τότε υπάρχουν ακέραιοι s και t έτσι ώστε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a και b $\text{gcd}(a,b)=sa+tb$.

a, b είναι
σχετικά πρώτοι
αν $\text{gcd}(a,b)=1$

Αποτελέσματα:

1. Αν $\text{gcd}(a,b)=1$ και $a \mid bc$, τότε $a \mid c$
2. Αν ο p είναι πρώτος και $p \mid a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$, όπου κάθε a_i είναι ακέραιος, τότε $p \mid a_i$ για κάποιο i . (με επαγωγή)
3. Αν $ac \equiv bc \pmod{m}$ και $\text{gcd}(c,m)=1$ τότε $a \equiv b \pmod{m}$

Ιδιότητες

$$a \equiv b \pmod{m} \leftrightarrow \exists k(a=b+km)$$

Έστω ότι ο m είναι θετικός ακέραιος. Αν

$$a \equiv b \pmod{m}$$

και

$$c \equiv d \pmod{m},$$

τότε

$$a+c \equiv b+d \pmod{m} \text{ και } ac \equiv bd \pmod{m}$$

Ιδιότητες (2)

Αν $(x \equiv_n y)$ και $(k \mid n)$, τότε : $x \equiv_k y$

Παράδειγμα: $10 \equiv_6 16 \Rightarrow 10 \equiv_3 16$

Απόδειξη:

$x \equiv_n y$ αν και μόνο αν $x = in + y$ για κάποιο ακέραιο i

Έστω $n = jk$ Τότε:

$$x = ijk + y$$

$$x = (ij)k + y \quad \text{και άρα } x \equiv_k y$$

Ψευδοτυχαίοι Αριθμοί

- Οι *ψευδοτυχαίοι αριθμοί* δεν είναι πραγματικά τυχαίοι αφού παράγονται με συστηματικές μεθόδους.
- Η γραμμική αναλογική μέθοδος χρησιμοποιείται συχνά για την παραγωγή τέτοιων αριθμών.
- Απαιτούνται 4 ακέραιοι: ο συντελεστής m , ο πολλαπλασιαστής a , η αύξηση c , και ο σπόρος x_0 , όπου $2 \leq a < m, 0 \leq c < m, 0 \leq x_0 < m$.
- Παράγουμε μία ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών $\{x_n\}$, $0 \leq x_n < m$ χρησιμοποιώντας αναδρομικά την εξής συνάρτηση:

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m$$

Ψευδοτυχαίοι Αριθμοί

Παράδειγμα: Βρείτε την ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών που παράγεται από τη γραμμική αναλογική μέθοδο όπου $m = 9$, $a = 7$, $c = 4$, και $x_0 = 3$.

Λύση: Υπολογίζουμε διαδοχικά την $x_{n+1} = (7x_n + 4) \bmod 9$, $x_0 = 3$.

$$x_1 = 7x_0 + 4 \bmod 9 = 7 \cdot 3 + 4 \bmod 9 = 25 \bmod 9 = 7,$$

$$x_2 = 7x_1 + 4 \bmod 9 = 7 \cdot 7 + 4 \bmod 9 = 53 \bmod 9 = 8,$$

$$x_3 = 7x_2 + 4 \bmod 9 = 7 \cdot 8 + 4 \bmod 9 = 60 \bmod 9 = 6,$$

$$x_4 = 7x_3 + 4 \bmod 9 = 7 \cdot 6 + 4 \bmod 9 = 46 \bmod 9 = 1,$$

$$x_5 = 7x_4 + 4 \bmod 9 = 7 \cdot 1 + 4 \bmod 9 = 11 \bmod 9 = 2,$$

$$x_6 = 7x_5 + 4 \bmod 9 = 7 \cdot 2 + 4 \bmod 9 = 18 \bmod 9 = 0,$$

$$x_7 = 7x_6 + 4 \bmod 9 = 7 \cdot 0 + 4 \bmod 9 = 4 \bmod 9 = 4,$$

$$x_8 = 7x_7 + 4 \bmod 9 = 7 \cdot 4 + 4 \bmod 9 = 32 \bmod 9 = 5,$$

$$x_9 = 7x_8 + 4 \bmod 9 = 7 \cdot 5 + 4 \bmod 9 = 39 \bmod 9 = 3.$$

Η παραγόμενη ακολουθία είναι η 3,7,8,6,1,2,0,4,5,3,7,8,6,1,2,0,4,5,3,...

Η ακολουθία επαναλαμβάνεται μετά από 9 όρους.

Συνήθως, οι γλώσσες προγραμματισμού χρησιμοποιούν τη γραμμική αναλογική μέθοδο με $c = 0$. Μία τέτοια γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών που έχει $m = 2^{31} - 1$ και $a = 7^5 = 16,807$, παράγει μία ακολουθία με $2^{31} - 2$ αριθμούς πριν επαναληφθεί.

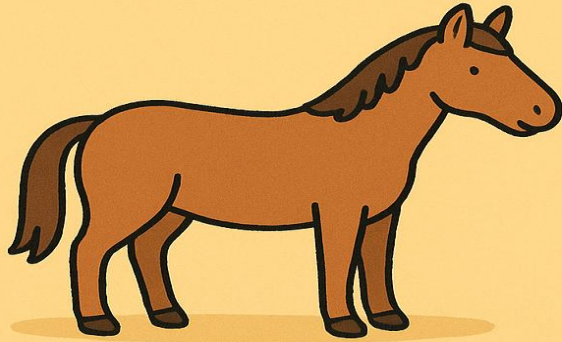
Θέμα 6^ο: (0,5 Μονάδες) (2/2/2017)

Όταν ένας $n \in \mathbb{Z}$ διαιρεθεί με το 7 τότε το υπόλοιπο είναι 4. Ποιο είναι το υπόλοιπο αν ο $5n$ διαιρεθεί με το 7;

Θέμα 4^ο: (1,5 Μονάδες) (15/9/2017)

Να αποδείξετε με αντίφαση την εξής πρόταση: Για κάθε ακέραιο a και έναν πρώτο αριθμό p , αν $p \mid a$ τότε $p \nmid (a + 1)$.

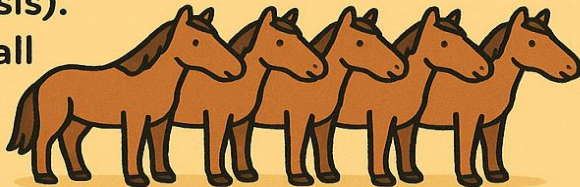
THEOREM: ALL HORSES ARE THE SAME COLOR



PROOF (BY INDUCTION)

- Base case: In a set of 1 horse, all horses trivially have the same color. ✓
- Inductive step: Assume for a set of n horses they're all the same color. Now take $n+1$ horses. Compare the first n (all same color by hypothesis) and the last n (all same color by hypothesis).

Therefore, all $n+1$ horses are the same color.



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Αποδείξεις Ιδιοτήτων για Διακριτά Αντικείμενα

Χρήση

47

Η Μαθηματική Επαγωγή χρησιμοποιείται μόνο για την απόδειξη αποτελεσμάτων που έχουν ληφθεί με κάποιο άλλο τρόπο.

- ▣ Δεν αποτελεί εργαλείο ανακάλυψης τύπων ή θεωρημάτων

Μία Ισοδύναμη Ιδιότητα με τη Μαθηματική Επαγωγή

48

Η Ιδιότητα (Αξίωμα) της *Καλής Διάταξης*:

Κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου των θετικών ακέραιων έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

49

- Ιδιότητα $P(n)$ στους φυσικούς αριθμούς
- Θέλουμε να δείξουμε ότι $\forall n P(n)$, όπου το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων

$$[P(1) \wedge \forall s (P(s) \rightarrow P(s+1))] \rightarrow \forall n P(n)$$

Αν

(α) $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \in \mathbb{N}$

(β) Για κάθε $n \geq k$, αν η $P(n)$ είναι αληθής τότε και η $P(n+1)$ είναι αληθής

τότε η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geq k$

Παράδειγμα

50

$$P(n) = \{n^3 + 2n \text{ διαιρείται από το } 3, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$$

$$P(1) = 1 + 2 = 3 \text{ — Αληθές}$$

Έστω ότι ισχύει το $P(n-1)$

$$\begin{aligned} P(n-1) &= (n-1)^3 + 2(n-1) = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 2n - 2 = \\ &= n^3 - 3n^2 + 5n - 3 = 3\kappa \text{ για } \kappa \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$P(n) = (n^3 - 3n^2 + 5n - 3) + (3n^2 - 3n + 3) = 3\kappa + 3(n^2 - n + 1)$$

Αποδείχτηκε.

Παράδειγμα Επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ναδειχθεί ότι το άθροισμα των n μικρότερων θετικών περιττών αριθμών (δηλ., $1, 3, 5, \dots, 2n-1$) ισούται με n^2 , $n \geq 1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο n -οστός μικρότερος θετικός περιττός αριθμός είναι ο $2n-1$, για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ:

Παράμετρος επαγωγής: ακέραιος $n \geq 1$

[ΒΑΣΗ] $n = 1$

Προφανώς ισχύει ότι $1 = 1^2$. ✓

[ΕΠ. ΥΠΟΘ.] Έστω ότι για κάποιο $k \geq 1$ ισχύει: $1+3+\dots+[2k-1] = k^2$.

[ΕΠ. ΒΗΜΑ] Θδο $1 + 3 + \dots + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$.

Πράγματι:

$$1 + 3 + \dots + [2k-1] + [2(k+1)-1] = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Χρήση Επαγωγικής Υπόθεσης

Παράδειγμα Επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ναδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό $n \geq 10$ ισχύει ότι $2^n > n^3$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ:

Παράμετρος Επαγωγής = ακέραιος $n \geq 10$

[ΒΑΣΗ] $n=10$:

$$2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000 \quad \checkmark$$

[ΕΠ. ΥΠΟΘ.] Έστω για κάποιον ΑΥΘΑΙΡΕΤΟ ακέραιο αριθμό $k \geq 10$
 $2^k > k^3$.

[ΕΠ. ΒΗΜΑ]

Θεωρώ τον ακέραιο αριθμό $k+1$. Θα δείξω ότι: $2^{k+1} > (k+1)^3$.

ΠΩΣ;

$$2^{k+1} = 2 * 2^k > 2 k^3 \geq (k + 1)^3$$

(για $k \geq 10$, $2k^3 = k^3 + k^3 \geq k^3 + 10k^2 > k^3 + 3k^2 + 3k^2 + k^2 > (k+1)^3$)

Χρήση Επαγωγικής Υπόθεσης

Παράδειγμα Επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Νδο χρησιμοποιώντας ΜΟΝΟ χαρτονομίσματα των 20 και 50 ευρώ, μπορούμε να σχηματίσουμε οποιοδήποτε ποσό που είναι πολλαπλάσιο του 10 και μεγαλύτερο ή ίσο του 40.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ:

Παράμετρος Επαγωγής;

[ΒΑΣΗ] Για ποσό 40 = 4*10 Ευρώ: $40 = 2*20 + 0*50$ ✓

[ΕΠ. ΥΠΟΘ.] Έστω ότι ΓΙΑ ΚΑΠΟΙΟ ποσό $10*\Lambda \geq 40$ ισχύει ότι:

$10*\Lambda = \varepsilon(\Lambda)*20 + \pi(\Lambda)*50$ για ακέрайους αριθμούς $\varepsilon(\Lambda), \pi(\Lambda) \geq 0$.

[ΕΠ. ΒΗΜΑ] Θεωρώ το ποσό $10*(\Lambda+1)$. Θδο $\exists$ ακέрайοι αριθμοί $\varepsilon(\Lambda+1), \pi(\Lambda+1) \geq 0$ τ.ώ. $10*(\Lambda+1) = \varepsilon(\Lambda+1)*20 + \pi(\Lambda+1)*50$.

(α) $\pi(\Lambda) = 0$: τότε $\varepsilon(\Lambda) \geq 2$

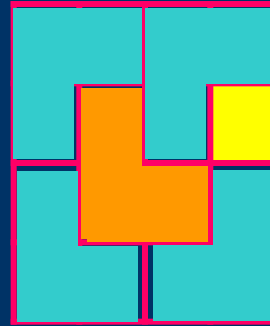
$$10*(\Lambda+1) = 10*\Lambda + 10 = \varepsilon(\Lambda)*20 + 0*50 + 10 = [\varepsilon(\Lambda)-2]*20 + 1*50.$$

(β) $\pi(\Lambda) \geq 1$:

$$\begin{aligned} 10*(\Lambda+1) &= 10*\Lambda + 10 = \varepsilon(\Lambda)*20 + \pi(\Lambda)*50 + 10 \\ &= [\varepsilon(\Lambda)+3]*20 + [\pi(\Lambda)-1]*50. \end{aligned}$$

Παράδειγμα Επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Κάθε σκακιέρα διαστάσεων $2^n \times 2^n$ στην οποία υπάρχει οπουδήποτε ένα ΑΠΑΓΟΡΕΥΜΕΝΟ τετράγωνο, μπορεί να καλυφθεί πλήρως με τριόμινα (= γωνίες από τρία εφαπτόμενα τετράγωνα) τα οποία δεν επικαλύπτονται ούτε εκτείνονται εκτός της σκακιέρας.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ:

[ΒΑΣΗ] $n=0$: σκακιέρα $2^0 \times 2^0 = 1 \times 1$ (τετριμμένη περίπτωση). ✓

[ΕΠ. ΥΠΟΘ.] Έστω ότι για κάποιο $k \geq 0$ ισχύει πως μπορώ να καλύψω τη $2^k \times 2^k$ σκακιέρα εκτός ενός τετραγώνου με τριόμινα.

[ΕΠ. ΒΗΜΑ] Θδο ότι μπορώ να καλύψω και τη $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ σκακιέρα εκτός ενός τετραγώνου με τριόμινα.

- (α) Χωρίζω τη $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ σκακιέρα σε τέσσερις $2^k \times 2^k$ σκακιέρες.
- (β) Κάθε $2^k \times 2^k$ σκακιέρα εκτός ενός τετραγώνου καλύπτεται πλήρως από τριόμινα (επαγ. υπόθεση).
- (γ) Για τις τρεις από τις $2^k \times 2^k$ σκακιέρες, θεωρώ ότι τα απαγορευμένα τετράγωνα τους σχηματίζουν ένα τριόμινο. Το απαγορευμένο τετράγωνο της τέταρτης $2^k \times 2^k$ σκακιέρας είναι το απαγορευμένο τετράγωνο της $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ σκακιέρας.

Ποιο είναι το Σφάλμα;

Mathematician: "I can prove anything by induction... if you let me skip the base case."

56

Απόδειξη ότι όλα τα αλόγα έχουν το ίδιο χρώμα:

Έστω $P(n)$ η πρόταση «Ένα σύνολο n αλόγων έχουν το ίδιο χρώμα»

$P(1)$ προφανώς ισχύει.

Έστω $P(k)$. Θεωρήστε οποιοδήποτε αριθμημένο σύνολο $k+1$ αλόγων. Τα πρώτα k αλόγα έχουν το ίδιο χρώμα όπως και τα τελευταία k αλόγα έχουν το ίδιο χρώμα. Επειδή αυτά τα δύο σύνολα επικαλύπτονται σημαίνει ότι και τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο χρώμα και άρα η $P(k+1)$ είναι αληθής.

Ισχυρή Επαγωγή

57

Αν

(α) $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \in \mathbb{N}$

(β) Για κάθε $n \geq k$, αν οι $P(k), P(k+1), \dots, P(n)$ είναι αληθείς τότε και η $P(n+1)$ είναι αληθής

τότε η $P(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geq k$

$$\left[P(1) \wedge \forall k ((P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)) \rightarrow P(k+1)) \right] \rightarrow \forall n P(n)$$

Άσκηση

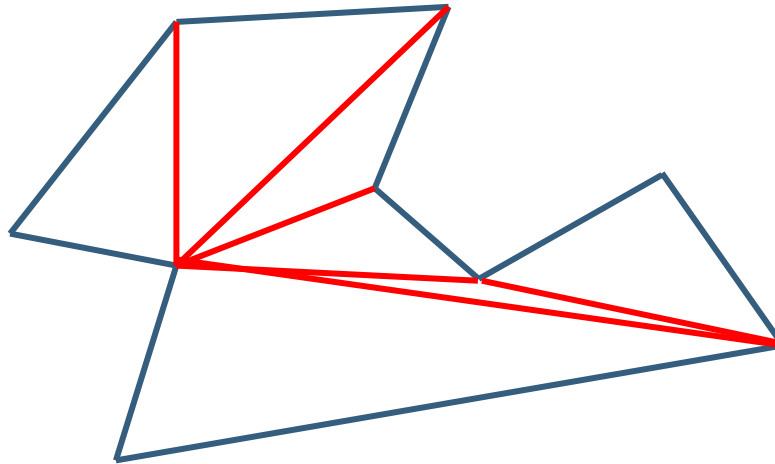
58

Rosen (Παράδειγμα 3) Θεωρήστε ένα παιχνίδι όπου δύο παίκτες με τη σειρά αφαιρούν ένα θετικό πλήθος σπύριτων από έναν εκ των δύο σωρών με σπύριτα που υπάρχουν. Ο παίκτης που θα αφαιρέσει το τελευταίο σπύριτο κερδίζει. Να δείξετε ότι, αν οι δύο σωροί έχουν το ίδιο πλήθος σπύριτων στην αρχή, ο δεύτερος παίκτης μπορεί πάντοτε να νικήσει.

Ισχυρή Επαγωγή και Υπολογιστική Γεωμετρία

60

Απλό Πολύγωνο



Τριγωνοποίηση



61

Θεώρημα: Ένα απλό πολύγωνο με n πλευρές, όπου $n \geq 3$ ακέραιος, μπορεί να τριγωνοποιηθεί σε $n - 2$ τρίγωνα.

Λήμμα: Κάθε απλό πολύγωνο με τουλάχιστον 4 πλευρές, έχει μία εσωτερική διαγώνιο.
(χωρίς απόδειξη)

Παράδειγμα Ισχυρής Επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Νδο κάθε ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 2, είτε είναι πρώτος αριθμός, είτε είναι γινόμενο πρώτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ:

[ΒΑΣΗ] $K=2$: Ο 2 είναι πρώτος αριθμός. ✓

[ΕΠ.ΥΠΟΘ.] Έστω ότι για κάποιο ακέραιο $K \geq 2$ ισχύει ότι:
ΓΙΑ ΚΑΘΕ $2 \leq \Lambda \leq K$, ο Λ είναι πρώτος ή είναι γινόμενο πρώτων.

[ΕΠ.ΒΗΜΑ] Αν ο $K+1$ είναι πρώτος, έχουμε τελειώσει. Εάν όχι,
 $K+1 = \Lambda * M$ για κάποιους ακέραιους $2 \leq \Lambda, M \leq (K+1) / 2$.
Για $K \geq 2$, $2K \geq K+2 \geq K+1 \Rightarrow (K+1)/2 \leq K$.

ΤΟΤΕ:

- από ΕΠ.ΥΠΟΘΕΣΗ ($2 \leq \Lambda \leq K$), $\Lambda = P_1 * P_2 * \dots * P_\lambda$
(ακέραιος $\lambda \geq 1$ και πρώτοι αριθμοί $P_1, P_2, \dots, P_\lambda$).
- από ΕΠ.ΥΠΟΘΕΣΗ ($2 \leq M \leq K$), $M = \Sigma_1 * \Sigma_2 * \dots * \Sigma_\mu$
(ακέραιος $\mu \geq 1$ και πρώτοι αριθμοί $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\mu$).
- Άρα, $K+1 = P_1 * P_2 * \dots * P_\lambda * \Sigma_1 * \Sigma_2 * \dots * \Sigma_\mu$ για κάποιους πρώτους αριθμούς $P_1, P_2, \dots, P_\lambda, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_\mu$.

Παράδειγμα Ισχυρής Επαγωγής

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Νδο για κάθε $N \geq 8$, μπορούμε να στείλουμε ένα γράμμα που κοστίζει N Ευρώ με γραμματόσημα ΜΟΝΟ των 3 και 5 Ευρώ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ IND.8:

[ΒΑΣΗ] $K=8$: Προφανές. ✓

[ΕΠ.ΥΠΟΘ.] Έστω ότι για κάποιο ακέραιο $K \geq 8$ ισχύει ότι:

ΓΙΑ ΚΑΘΕ $8 \leq \Lambda \leq K$, $\Lambda = \tau(\Lambda)*3 + \pi(\Lambda)*5$, όπου $\tau(\Lambda), \pi(\Lambda)$ είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

[ΕΠ.ΒΗΜΑ] Εξετάζω την περίπτωση του αριθμού $K+1$:

ΑΝ $K \geq 10$

ΤΟΤΕ $K+1 = (K-2) + 3 = \tau(K-2)*3 + \pi(K-2)*5 + 3$
 $= [\tau(K-2)+1]*3 + \pi(K-2)*5$

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ

// $K = 8$ ή $9...$

ΑΝ $K = 8$

ΤΟΤΕ $K+1 = 9 = 3*3$

ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ

// $K == 9...$

$K+1 = 10 = 5*2.$

Παράδειγματα

64

- Να αποδειχθεί ότι $n < 2^n$.
- Αν ο p είναι πρώτος και $p \mid a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$, όπου κάθε a_i είναι ακέραιος, τότε $p \mid a_i$ για κάποιο i .
- Να δειχτεί ότι το παρακάτω είναι ταυτολογία:

$$[(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n)] \rightarrow [(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow p_n]$$

Ο Πλανήτης των Vulcan και η Απόδειξη των Γαλανομάτηδων

65



Στη χώρα του Σποκ, κάθε κάτοικος έχει καστανά ή μπλε μάτια. Όλοι μπορούν να δουν το χρώμα των ματιών όλων των άλλων, αλλά όχι το δικό τους. Αν κάποιος συμπεράνει ποτέ ότι έχει μπλε μάτια, φεύγει από τον πλανήτη τα μεσάνυχτα. Μια μέρα, ο άρχων του πλανήτη λέει δημόσια:

«Τουλάχιστον ένας από εσάς έχει μπλε μάτια»

Τι συμβαίνει στη συνέχεια;

Ο Σποκ καλείται να αποδείξει την εξής πρόταση για τον πλανήτη του:

Αν υπάρχουν n γαλανομάτηδες στον Vulcan, τότε όλοι θα φύγουν την n -οστή μέρα.