

1. (1.3.43 Rosen)

Να δειχτεί ότι η $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$

Λύση:

Και οι δύο δηλώσεις είναι αληθής ακριβώς όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα x από τον τομέα αναφοράς έτσι ώστε μία εκ των δύο προτάσεων να είναι αληθής.

2. (1.3.42 Rosen)

Να δειχτεί ότι η $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$

Λύση:

Με την ίδια λογική όπως στην (1). Για να είναι αληθής και οι δύο θα πρέπει για όλα τα x να είναι αληθής.

3. (1.3.31 Rosen)

Να εκφραστούν οι παρακάτω τύποι με χρήση ποσοτικοποιητών. Έπειτα να σχηματιστεί η άρνηση της δήλωσης (ώστε η άρνηση να είναι αριστερά του ποσοτικοποιητή) και να εκφραστεί η άρνηση σε απλή καθομιλουμένη γλώσσα.

1. «Κάποιοι γέρικοι σκύλοι μαθαίνουν νέα κόλπα.»
2. «Κανένας λαγός δεν γνωρίζει ανώτερα μαθηματικά.»
3. «Κάθε πουλί πετά.»
4. «Δεν υπάρχει σκύλος που ομιλεί.»
5. «Δεν υπάρχει κανείς στην τάξη που να ομιλεί Γαλλικά και Ρωσικά.»

Λύση:

1. Τομέας αναφοράς: όλοι οι σκύλοι και $T(x)$ «ο x μπορεί να μάθει νέα κόλπα». Άρα η 1:

$$\exists xT(x)$$

Ενώ η άρνησή της:

$$\forall x\neg T(x)$$

«Δεν μπορούν όλοι οι σκύλοι να μάθουν νέα κόλπα.»

2. Τομέας αναφοράς: όλοι οι λαγοί και $T(x)$ «ο x γνωρίζει ανώτερα μαθηματικά». Άρα η 2:

$$\neg(\exists xT(x))$$

Ενώ η άρνησή της:

$$\exists x T(x)$$

«Υπάρχει λαγός που γνωρίζει ανώτερα μαθηματικά.»

...

5. Τομέας αναφοράς: όλοι οι μαθητές και $T(x)$ «ο x γνωρίζει Γαλλικά» και $P(x)$ «ο x γνωρίζει Ρωσικά». Άρα η 5:

$$\neg (\exists x (T(x) \wedge P(x)))$$

Ενώ η άρνησή της:

$$\exists x (T(x) \wedge P(x))$$

«Υπάρχει κάποιος στην τάξη που γνωρίζει Γαλλικά και Ρωσικά.»

4. (1.4.9 Rosen)

Έστω ότι $L(x,y)$ η δήλωση «ο x αγαπάει τον y » με τομέα αναφοράς όλους τους ανθρώπους του κόσμου. Να εκφραστούν οι παρακάτω δηλώσεις:

1. Ο καθένας αγαπά τον Γιάννη.
2. Ο καθένας αγαπάει κάποιον.
3. Υπάρχει κάποιος που τον αγαπάει καθένας.
4. Κανένας δεν αγαπάει τον καθένα.
5. Υπάρχει κάποιος που η Άννα δεν τον αγαπάει.
6. Υπάρχει κάποιος που δεν τον αγαπάει κανείς.
7. Υπάρχει ακριβώς ένα άτομο που αγαπάει ο καθένας.
8. Υπάρχουν ακριβώς δύο άτομα που αγαπάει η Γιώτα.
9. Ο καθένας αγαπάει τον εαυτό του.
10. Υπάρχει κάποιος που δεν αγαπάει κανέναν εκτός του εαυτού του.

Λύση:

1. $\forall x L(x, \text{Γιάννη})$
2. $\forall x \exists y L(x, y)$
3. $\exists x \forall y L(y, x)$
4. $\forall x \exists y \neg L(x, y)$
5. $\exists y \neg L(\text{Άννα}, y)$
6. $\exists y \forall x \neg L(x, y)$
7. $\forall x (\exists y L(x, y) \wedge \forall w ((y \neq w) \rightarrow \neg L(x, w)))$
8. $\exists x \exists y (x \neq y \wedge L(\text{Γιώτα}, y) \wedge L(\text{Γιώτα}, x) \wedge \forall z (L(\text{Γιώτα}, z) \rightarrow (z = x \vee z = y)))$
9. $\forall x L(x, x)$
10. $\exists x \forall y (L(x, y) \leftrightarrow x = y)$