(2 μονάδες – 11/09/2024)
Σας δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις:

Αν έχει ήλιο, τότε η Αλίκη πηγαίνει για τρέξιμο.
Αν η Αλίκη πάει για τρέξιμο, τότε ο Μπομπ δεν διαβάζει.-
Αν ο Μπομπ δεν διαβάζει, τότε η Κάρολ πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
Η Κάρολ δεν πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
Έχει ήλιο ή βρέχει. *(μπορεί ταυτόχρονα να έχει ήλιο και να βρέχει)*
Δεν βρέχει.

Να κάνετε τα εξής:
α) (1) Αφού δημιουργήσετε προτασιακά σύμβολα, να εκφράσετε τις παραπάνω προτάσεις χρησιμοποιώντας τα προτασιακά σύμβολα που ορίσατε και τις πράξεις $\wedge$,$\vee$, $\neg$.
β) (1) Να δείξετε αν υπάρχει κάποια αντίφαση ή όχι στις παραπάνω προτάσεις. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει περίπτωση από τις παραπάνω προτάσεις να φτάσετε σε συμπεράσματα που μία πρόταση s και η αντίθετή της $\neg s$ έχουν την ίδια τιμή αληθείας; (προφανώς κάτι τέτοιο δεν μπορεί να ισχύει)

Λύση:
Καταρχάς ορίζουμε τα προτασιακά σύμβολα:
S: «Έχει ήλιο.»
A: «Η Αλίκη πηγαίνει για τρέξιμο.»
B: «Ο Μπομπ διαβάζει.»
C: «Carol πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
N: «Βρέχει.»

1. $S \to A$ Αν έχει ήλιο, τότε η Αλίκη πηγαίνει για τρέξιμο.
2. $A \to \neg B$ Αν η Αλίκη πάει για τρέξιμο, τότε ο Μπομπ δεν διαβάζει.
3. $\neg B \to C$ Αν ο Μπομπ δεν διαβάζει, τότε η Κάρολ πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
4. $\neg C$ Η Κάρολ δεν πηγαίνει στη βιβλιοθήκη.
5. $S \vee N$ Έχει ήλιο ή βρέχει. *(μπορεί ταυτόχρονα να έχει ήλιο και να βρέχει)*
6. $\neg N$ Δεν βρέχει.

β)
Θα προσπαθήσουμε να συνδυάσουμε τις παραπάνω προτάσεις για να δούμε αν φτάνουμε σε κάποια αντίφαση.
7. S (από (6) και (5) και διάζευξη)
8. A (από (7) και (1) και modus ponens)
9. $\neg B$ (από (8) και (2) και modus ponens)
10. C (από (9) και (3) και modus ponens)
Εδώ βρίσκουμε την αντίφαση μεταξύ της (10) και της (4), που και οι δύο επιβάλλουν τη λογική πρόταση C να είναι ταυτόχρονα Αληθής και Ψευδής.

(Σεπτέμβριος 2022 – 0,8) Έστω η πρόταση $\exists x \forall y P(x, y)$. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις αυτή ικανοποιείται και γιατί;

1. Το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ με το $P(x, y)$ να σημαίνει τη συνήθη διάταξη $x \leq y$.
2. Το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ με το $P(x, y)$ να σημαίνει «το y διαιρείται από το x».
3. Το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ με το $P(x, y)$ να σημαίνει τη συνήθη διάταξη $x \leq y$.
4. Το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ με το $P(x, y)$ να σημαίνει ότι «το x είναι τετράγωνο του y».

Λύση:

1. **Σωστό:** Πράγματι υπάρχει ένας αριθμός που είναι μικρότερος ή ίσος από όλους τους φυσικούς αριθμούς και αυτός είναι το 1.
2. **Σωστό:** Πράγματι, υπάρχει ένας αριθμός που διαιρεί όλους τους φυσικούς αριθμούς και αυτός είναι το 1.
3. **Λάθος:** Ο τύπος εδώ αναφέρει ότι υπάρχει ελάχιστος στο σύνολο των πραγματικών αριθμών – κάτι που δεν ισχύει.
4. **Λάθος:** Δεν υπάρχει κάποιος ακέραιος που να είναι το τετράγωνο όλων των ακέραιων αριθμών.

(Παλαιό Θέμα: 2 μονάδες)

α) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις αναφέρει ότι αν ένας αριθμός είναι θετικός και ένας δεύτερος αριθμός είναι μεγαλύτερος από τον αρχικό αριθμό τότε και ο δεύτερος αριθμός είναι θετικός (τομέας αναφοράς όλοι οι πραγματικοί).

1. $\forall x \exists y \big((x > 0) \rightarrow (y > 0)\big)$
2. $\forall x \forall y \Big(\big((x > 0) \wedge (y > x)\big) \rightarrow (y > 0)\Big)$
3. $\forall x \forall y \big((x > 0) \wedge (y > x)\big)$
4. $\forall x \exists y \Big((x > 0) \rightarrow \big((y > 0) \wedge (y > x)\big)\Big)$

β) Έστω ότι P(x,y) είναι ένα κατηγόρημα όπου ο τομέας αναφοράς για τα x και y είναι το {1,2,3}. Επιπλέον, έστω ότι το κατηγόρημα είναι Αληθές μόνο στις εξής περιπτώσεις: P(1,3), P(2,1), P(3,1), P(3,2), P(3,3). Να αναφέρετε ποια από τις παρακάτω λογικές προτάσεις είναι Ψευδής.

1. $\exists x \forall y P(x, y)$
2. $\forall x \exists y P(x, y)$
3. $\exists y \forall x P(x, y)$
4. $\forall y \exists x P(x, y)$

γ) Έστω η πρόταση: $\exists y \forall x \big(C(x) \rightarrow \neg C(x, y)\big)$, όπου C(x) σημαίνει «Ο x είναι φοιτητής Πληροφορικής», C(x,y) σημαίνει ότι «ο x τελείωσε την y» και ο τομέας αναφοράς της x είναι όλοι οι φοιτητές και της y είναι όλες οι ασκήσεις. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις αποτελεί την μετάφραση σε φυσική γλώσσα αυτής της λογικής πρότασης;

1. Υπάρχει μία άσκηση που κανένας δεν τελείωσε.
2. Υπάρχει μία άσκηση που κανένας φοιτητής της Πληροφορικής δεν τελείωσε.
3. Κάποιος φοιτητής Πληροφορικής δεν τελείωσε καμία άσκηση.
4. Κάθε φοιτητής Πληροφορικής απέτυχε να τελειώσει τουλάχιστον μία άσκηση.

<u>Λύση:</u>

α) Αναλύουμε αυτό που εκφράζει η κάθε πρόταση και αν είναι ίδιο το νόημα με το ζητούμενο.

1. «Για κάθε θετικό αριθμό υπάρχει ένα αριθμός που είναι θετικός.» Αυτή η πρόταση είναι προφανώς ΑΛΗΘΗΣ. Όμως δεν εκφράζει το ζητούμενο.
2. «Για κάθε ζεύγος αριθμών ώστε ο πρώτος να είναι θετικός και ο δεύτερος μεγαλύτερος του πρώτου σημαίνει ότι και ο δεύτερος είναι θετικός.» Αυτή η πρόταση είναι ΑΛΗΘΗΣ και εκφράζει το ζητούμενο. ΆΡΑ ΕΠΙΛΕΓΟΥΜΕ ΑΥΤΗ.
3. «Για κάθε ζεύγος αριθμών, ο πρώτος είναι θετικός και ο δεύτερος μεγαλύτερος από τον πρώτο.» Αυτή είναι ΨΕΥΔΗΣ (π.χ., x=0, y=1) και δεν εκφράζει το ζητούμενο.
4. «Για κάθε θετικό αριθμό υπάρχει ένας θετικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του αρχικού.» Αυτή είναι ΑΛΗΘΗΣ. Δεν εκφράζει όμως το ζητούμενο.

β) Αναλύουμε αυτό που εκφράζει η κάθε πρόταση και απαντάμε.

1. ΑΛΗΘΗΣ: Πράγματι για x=3 και για όλα τα y η P(3,y) είναι αληθής.
2. ΑΛΗΘΗΣ: Πράγματι για x=1 ισχύει ότι P(1,3), για x=2 ισχύει ότι P(2,1) και για x=3 ισχύει ότι P(3,1) (στην τελευταία μπορώ να επιλέξω οτιδήποτε από τα τρία).
3. ΨΕΥΔΗΣ: Αν επιλέξω y=1, τότε το P(1,1) δεν ισχύει. Αν επιλέξω y=2, τότε το P(1,2) δεν ισχύει. Αν επιλέξω Αν επιλέξω y=3, τότε το P(2,3) δεν ισχύει. Άρα η πρόταση είναι ψευδής.
4. ΑΛΗΘΗΣ: Αν επιλέξω y=1, τότε το P(3,1) ισχύει. Αν επιλέξω y=2, τότε το P(3,2) ισχύει. Αν επιλέξω y=3, τότε το P(3,3) ισχύει.

γ) Κοιτάμε τι σημαίνει η λογική πρόταση. Πρώτη μετάφραση:

«Υπάρχει y για κάθε x ώστε αν ο x είναι φοιτητής του τμήματος Πληροφορικής τότε αυτός δεν έχει τελειώσει την εργασία y»
Δεύτερη μετάφραση:
«Υπάρχει μία άσκηση, την οποία κάθε φοιτητής του τμήματος Πληροφορικής δεν την έχει τελειώσει.»
Από την τελευταία είναι προφανές ότι η σωστή απάντηση είναι η (2).
Παρακάτω εκφράζω και τις υπόλοιπες προτάσεις (εκτός από τη (2) που την ξέρουμε) με κατηγορήματα:
1. Υπάρχει μία άσκηση που κανένας δεν τελείωσε. Προσέξτε ότι ο τομέας αναφοράς είναι όλοι οι φοιτητές και δεν περιορίζομαι στους φοιτητές του τμήματος Πληροφορικής.

$$\exists y \forall x \big(\neg C(x, y) \big)$$

3. Κάποιος φοιτητής Πληροφορικής δεν τελείωσε καμία άσκηση.

$$\exists x \forall y \big(C(x) \wedge \neg C(x, y) \big)$$

4. Κάθε φοιτητής Πληροφορικής απέτυχε να τελειώσει τουλάχιστον μία άσκηση.

$$\forall x \exists y \big(C(x) \rightarrow \neg C(x, y) \big)$$

(1.5 Μονάδες) Έστω ότι $S(n)$ είναι ένα κατηγόρημα στους φυσικούς αριθμούς n και έστω ότι ισχύει:

$$\forall k \in \mathbb{N}\big(S(k) \to S(k+2)\big) \quad (1)$$

Αν η (1) είναι αληθής, τότε κάποιες από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να ισχύουν **Π**άντα (είναι αληθείς), κάποιες μπορεί να ισχύουν **Μ**ερικές φορές (είναι ψευδείς) και κάποιες να μην ισχύουν πο**Τ**έ (είναι και αυτές οι προτάσεις ψευδείς). Να αναφέρετε για κάθε μία πρόταση αν είναι Π, Μ ή Τ με αιτιολόγηση.

1. $\forall n \geq 0\ \big(S(n)\big)$
2. $\big(\neg S(0)\big) \wedge \Big(\forall n \geq 1\ \big(S(n)\big)\Big)$
3. $\forall n \geq 0\ \big(\neg S(n)\big)$
4. $\Big(\forall n \leq 100\ \big(S(n)\big)\Big) \wedge \Big(\forall n > 100\ \big(\neg S(n)\big)\Big)$
5. $\Big(\forall n \leq 100\ \big(\neg S(n)\big)\Big) \wedge \Big(\forall n > 100\ \big(S(n)\big)\Big)$
6. $S(0) \to \big(\forall n\ S(n+2)\big)$
7. $S(1) \to \big(\forall n\ S(2n+1)\big)$
8. $\Big(\exists n\big(S(2n)\big)\Big) \to \big(\forall n\ S(2n+2)\big)$
9. $\exists n \exists m > n\big(S(2n) \wedge \neg S(2m)\big)$
10. $\Big(\exists n\big(S(n)\big)\Big) \to \Big(\forall n \exists m > n\ \big(S(m)\big)\Big)$

Λύση:

1. **Μ:** η πρόταση σημαίνει ότι η S είναι πάντα αληθής. Επομένως και το $S(k+2)$ είναι αληθές και άρα ισχύει ότι η πρόταση $S(k) \to S(k+2)$ είναι πάντα αληθής (δεδομένης της συγκεκριμένης πρότασης βέβαια). Το πρόβλημα είναι ότι ο τύπος (1) ισχύει ακόμα και όταν η S είναι πάντα ψευδής και επομένως η τρέχουσα πρόταση δεν ισχύει πάντα όταν η (1) ισχύει.
2. **Μ:** η πρόταση υπονοεί ότι η S είναι ψευδής στο 0 αλλά αληθής οπουδήποτε αλλού. Επομένως η $S(k) \to S(k+2)$ ισχύει πάντα αφού το $S(k+2)$ είναι πάντα αληθές. Επομένως, αυτή η πρόταση μπορεί να ισχύει αλλά όχι πάντα αφού το $S(0)$ μπορεί να είναι αληθές και βέβαια η (1) να συνεχίσει να ισχύει.
3. **Μ:** η πρόταση σημαίνει ότι η S είναι πάντα ψευδής. Επομένως και το $S(k+2)$ είναι ψευδές και άρα ισχύει ότι η πρόταση $S(k) \to S(k+2)$ είναι πάντα αληθής (δεδομένης της συγκεκριμένης πρότασης βέβαια). Το πρόβλημα είναι ότι ο τύπος (1) ισχύει ακόμα και όταν η S είναι πάντα αληθής και επομένως η τρέχουσα πρόταση δεν ισχύει πάντα όταν η (1) ισχύει.
4. **Τ:** σε αυτή την περίπτωση η S είναι αληθής μέχρι το 100 αλλά ψευδής από το 101 και μετά. Επομένως, η $S(99)$ είναι αληθής και η $S(101)$ ψευδής. Άρα $S(99) \nrightarrow S(99+2)$ και επομένως αυτή η πρόταση δεν ισχύει ποτέ.
5. **Μ:** σε αυτή την περίπτωση η S είναι ψευδής μέχρι το 100 αλλά αληθής από το 101 και μετά. Άρα ισχύει $S(k) \to S(k+2)$, $k \leq 100$ αφού η $S(k)$ είναι ψευδής και $S(k) \to S(k+2)$, $k \geq 99$ αφού η $S(k+2)$ είναι αληθής. Βεβαίως η (1) ισχύει ακόμα και όταν όλα τα $S(k)$ είναι αληθή και επομένως η συγκεκριμένη πρόταση δεν ισχύει πάντα.
6. **Μ:** αν όλα τα $S(k)$ είναι αληθή τότε η πρόταση είναι αληθής. Όμως, αν η $S(k)$ είναι αληθής για άρτια n τότε η (1) συνεχίζει να ισχύει αλλά η $S(1+2)$ είναι ψευδής.
7. **Π:** αυτή η πρόταση αναφέρει ότι αν η $S(1)$ ισχύει τότε η $S(k)$ ισχύει για όλα τα περιττά k. Αυτό προκύπτει άμεσα από την (1).
8. **Μ:** αν η $S(k)$ ισχύει πάντα τότε η πρόταση αυτή ισχύει. Αν όμως η $S(k)$ ισχύει για άρτια $k \geq 4$ τότε η πρόταση αυτή δεν ισχύει (προσέξτε ότι στο συμπέρασμα δεν έχουμε δώσει περιορισμό αν το n που έχουμε εκεί είναι μεγαλύτερο από το n που έχουμε επιλέξει στην υπόθεση).

9. **Τ:** αυτή η πρόταση αναφέρει ότι η S ισχύει για κάποιο άρτιο αριθμό $2n$ αλλά δεν ισχύει για κάποιον μεγαλύτερο άρτιο αριθμό $2m$. Όμως, αν η $S(2n)$ ισχύει τότε εφαρμόζοντας την (1) $m - n$ φορές δείχνουμε την αλήθεια της $S(2m)$ που είναι αντίφαση.
10. **Π:** αυτή η πρόταση αναφέρει ότι αν η S ισχύει για κάποιο n, τότε για κάθε αριθμό υπάρχει κάποιος μεγαλύτερός του m για τον οποίο η S ισχύει. Αφού η (1) αναφέρει ότι αν υπάρχει τέτοιο n για το οποίο η $S(n)$ να είναι αληθής υπάρχουν άπειρα k (αυξανόμενα) έτσι ώστε $S(k)$ να ισχύει και άρα είναι πάντα αληθής αυτή η πρόταση.

(2 Μονάδες)

Α. Έστω ότι ο τομέας αναφοράς είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί και έστω η δήλωση $P(x,y) =$ "$y^2 = x$". Να αιτιολογήσετε σχετικά με το αν είναι αληθής η ψευδής η εξής δήλωση: $\forall x \exists y\, P(x,y)$.

Β. Να δείξετε ότι η λογική πρόταση $\neg\Big(\big(\forall x\big(Q(x) \wedge P(x)\big)\big) \wedge \big(\exists y\big(\neg P(y)\big)\big)\Big)$ είναι ταυτολογία.

<u>Λύση:</u>

Α. Είναι ψευδής. Για παράδειγμα, αν $x = -1$ τότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός y έτσι ώστε $y^2 = -1$.

Β. Έχουμε τα εξής:

$$\neg\Big(\big(\forall x\big(Q(x) \wedge P(x)\big)\big) \wedge \big(\exists y\big(\neg P(y)\big)\big)\Big) \equiv \neg\Big(\forall x\big(Q(x) \wedge P(x)\big)\Big) \vee \neg\Big(\exists y\big(\neg P(y)\big)\Big)$$
$$\equiv \Big(\exists x\big(\neg Q(x) \vee \neg P(x)\big)\Big) \vee \Big(\forall y\big(P(y)\big)\Big)$$

Ας δούμε λίγο την εξωτερική διάζευξη. Το δεύτερο μέρος είναι αληθές αν το $P(y)$ είναι αληθές σε όλο τον τομέα αναφοράς. Αν ισχύει αυτό τότε η πρόταση είναι αληθής. Αν δεν ισχύει, τότε σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο *y* έτσι ώστε να είναι αληθές το $\neg P(y)$. Για να το γράψουμε λίγο διαφορετικά, θα σημαίνει ότι η πρόταση $\exists x\big(\neg P(x)\big)$ είναι αληθής. Αυτό όμως ακριβώς υπάρχει στην πρώτη παρένθεση – σε διάζευξη βέβαια με το $\neg Q(x)$ που είναι όμως άσχετο. Επομένως, η λογική πρόταση είναι ταυτολογία.