

Κώδικας Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας

Δεν ενεργείτε ανήθικα αν:

- συζητάτε όλο το υλικό του μαθήματος (βιβλία, διαφάνειες κτλ.) με άλλους φοιτητές
- συμβουλευέστε τον καθηγητή
- συνεργάζεσθε με άλλους φοιτητές στα πλαίσια μίας γενικής συζήτησης σχετικά με την εργασία.

Ενεργείτε ανήθικα αν:

- χρησιμοποιείτε την εργασία άλλου φοιτητή και την παρουσιάζετε ως δικιά σας
- επιτρέψετε συνειδητά σε άλλο φοιτητή να παρουσιάσει την εργασία σας (ή κομμάτια της) ως δικιά του
- αντιγράψετε υλικό από άλλο φοιτητή ή άλλη πηγή (διαδίκτυο)
- δεν αναφέρετε κάτι που γνωρίζετε και το οποίο χαρακτηρίζεται με βάση τα παραπάνω ως ακαδημαϊκά ανήθικο

Θα πρέπει να έχετε στον νου σας ότι ο στόχος της εργασίας είναι να σκεφτείτε κριτικά και να κατανοήσετε το αντίστοιχο μέρος της ύλης.

Σε περίπτωση που ο διδάσκων/βοηθός εντοπίσει περίπτωση αντιγραφής έχει το δικαίωμα να μηδενίσει τον φοιτητή στην εργασία ή και ακόμα στο βαθμό του μαθήματος για το ακαδημαϊκό έτος 2024-2025 ανάλογα με την έκταση της αντιγραφής.

Επειδή θα χρειαστεί να γράφετε μαθηματικά σύμβολα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον Equation Editor τόσο σε Microsoft Office όσο και σε Open Office. Γενικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε κειμενογράφο επιθυμείτε (σε Tex είναι επίσης ευπρόσδεκτο).

Ασκήσεις Κατανόησης

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 28/12/2025

(Η υποβολή θα γίνει στο eclass.upatras.gr. Το αρχείο που θα υποβάλλετε θα είναι .pdf και δεν θα περιέχει σαρωμένες εικόνες – **θα πρέπει να έχει γραφεί σε κειμενογράφο**, διαφορετικά δεν θα γίνει δεκτή. Στην 1^η σελίδα θα πρέπει να γράφετε το όνομά σας και το ΑΕΜ σας)

Άσκηση 1 (20%) Ορίζουμε τη σχέση R στο σύνολο των ανθρώπων A ως εξής:

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow \text{βάρους}(x) = \text{βάρους}(y)$$

όπου το βάρος μετριέται σε κιλά. Να δείξετε αν η παραπάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας. Στην περίπτωση που είναι σχέση ισοδυναμίας, να περιγράψετε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

Άσκηση 2 (30%)

α) Να δώσετε έναν αναδρομικό ορισμό της διαδικασίας $\text{ones}(x)$, η οποία μετράει το πλήθος των άσσων σε μία δυαδική ακολουθία. Για παράδειγμα, το $\text{ones}(1100011)$ είναι ίσο με 4, μιας και στην ακολουθία 1100011 υπάρχουν τέσσερις άσσοι. Για να το κάνετε αυτό χρησιμοποιήστε την πράξη της συνένωσης δύο συμβολοσειρών s και t που αναπαρίσταται ως st . Για παράδειγμα, αν $s = 101$ και $t = 0000$, τότε $st = 1010000$. Υπόδειξη: Στον αναδρομικό ορισμό θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε την κενή συμβολοσειρά ε – δηλαδή τη συμβολοσειρά που δεν περιέχει κανένα δυαδικό ψηφίο για την βάση της επαγωγής.

β) Να χρησιμοποιήσετε δομική επαγωγή για να αποδείξετε ότι $\text{ones}(st) = \text{ones}(s) + \text{ones}(t)$. Υπόδειξη: Να κάνετε επαγωγή ως προς τη συμβολοσειρά t για αυθαίρετη συμβολοσειρά s .

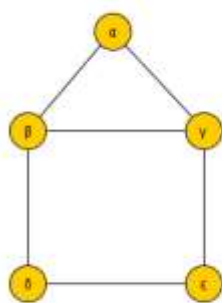
Άσκηση 3 (25%)

Σε ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα G ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις:

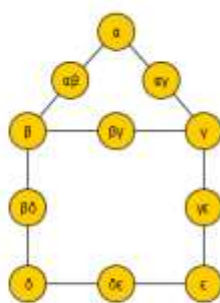
- υποδιαίρεση ακμής $\{u, v\}$ του G : διαγράφουμε την ακμή $\{u, v\}$ και προσθέτουμε μια νέα κορυφή που είναι γειτονική μόνο στις u και v .
- αληθής αντιγραφή κορυφής v του G : προσθέτουμε μια νέα κορυφή w στο G τέτοια ώστε η w να είναι γειτονική με την v και με όλες τις γειτονικές κορυφές της v . Δηλαδή, αντιγράφουμε την v και η αντιγραφή της v ενώνεται με τη v .

Συμβολίζουμε με $G(Y)$ το γράφημα που προκύπτει από το G αν εκτελέσουμε υποδιαίρεση ακμής σε κάθε ακμή του G . Συμβολίζουμε με $G(A)$ το γράφημα που προκύπτει από το G αν εκτελέσουμε διαδοχικές πράξεις αληθούς αντιγραφής σε κάθε κορυφή του G .

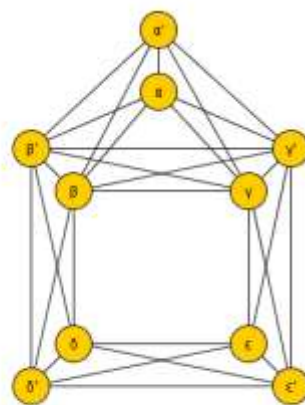
Στο ακόλουθο παράδειγμα δείχνουμε ένα γράφημα G και τα γραφήματα, $G(Y)$ και $G(A)$.



G



$G(Y)$



$G(A)$

α) Για οποιοδήποτε γράφημα G με n κορυφές και m ακμές βρείτε μια σχέση μεταξύ των κορυφών και των ακμών των γραφημάτων $G(Y)$ και $G(A)$ ως προς τα n και m συμπληρώνοντας τον ακόλουθο πίνακα.

	G	$G(Y)$	$G(A)$
πλήθος κορυφών:	n		
πλήθος ακμών:	m		

β) Για οποιοδήποτε γράφημα G σκοπός μας είναι να ερευνήσουμε αν τα γραφήματα $G(Y)$, και $G(A)$ έχουν κύκλο Euler δεδομένου ότι το G έχει κύκλο Euler. Στην περίπτωση που Euler θα πρέπει να αιτιολογήσετε την απάντησή σας, ενώ στη περίπτωση που δεν έχει κύκλο Euler θα πρέπει να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

Άσκηση 4 (25%)

Ένας εξωγήινος πολιτισμός στέλνει μηνύματα χρησιμοποιώντας μια σειρά από διακριτούς ήχους. Η συνολική διάρκεια του μηνύματος είναι $n \geq 1$ δευτερόλεπτα και υπάρχουν δύο τύποι ήχων όσον αφορά τη διάρκειά τους:

- *Σύντομοι Ήχοι:* Διαρκούν 1 δευτερόλεπτο. Υπάρχει μόνο 1 είδος τόνου για τον σύντομο ήχο.
- *Μακρείς Ήχοι:* Διαρκούν 2 δευτερόλεπτα. Αυτοί μεταφέρουν περισσότερα δεδομένα, γι' αυτό υπάρχουν 6 διαφορετικές συχνότητες που χρησιμοποιούνται για τους μακρείς ήχους.

α) Δώστε μία αναδρομική σχέση με τις κατάλληλες αρχικές συνθήκες (προσέξτε ότι $n \geq 1$) που περιγράφει το πλήθος των διαφορετικών μηνυμάτων a_n που μπορεί να στείλει ο εξωγήινος πολιτισμός όταν αυτά διαρκούν n δευτερόλεπτα.

β) Βρείτε τον κλειστό τύπο της αναδρομής.

Ενδεικτικές Λύσεις

Άσκηση 1

Θα πρέπει να δείξουμε ότι η σχέση είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.
Ανακλαστική: Έστω $x \in A$. Τότε ισχύει ότι $(x, x) \in R$ αφού κάθε άνθρωπος x έχει ίδιο βάρος με τον εαυτό του. Άρα είναι ανακλαστική.

Συμμετρική: Έστω ότι $(x, y) \in R$, όπου $x, y \in A$. Τότε ισχύει από τον ορισμό της R ότι $\text{βάρος}(x) = \text{βάρος}(y)$ και άρα θα ισχύει ότι $\text{βάρος}(y) = \text{βάρος}(x)$, το οποίο γράφεται ως $(y, x) \in R$. Επομένως, είναι συμμετρική.

Μεταβατική: Έστω ότι $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$, όπου $x, y, z \in A$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\text{βάρος}(x) = \text{βάρος}(y)$$

$$\text{βάρος}(y) = \text{βάρος}(z)$$

Από την μεταβατικότητα της ισότητας προκύπτει ότι

$$\text{βάρος}(x) = \text{βάρος}(z)$$

και άρα $(x, z) \in R$. Επομένως είναι μεταβατική.

Η κλάση ισοδυναμίας $[x]_R$ του $x \in A$ ως προς τη σχέση R είναι η εξής:

$$[x]_R = \{y \in A \mid \text{βάρος}(x) = \text{βάρος}(y)\}$$

Αυτό σημαίνει ότι η κλάση ισοδυναμίας $[x]_R$ περιέχει όλους τους ανθρώπους που έχουν το ίδιο βάρος μετρημένο σε κιλά.

Άσκηση 2

α) Βάση αναδρομής: Η κενή λέξη ε (δεν περιέχει κανένα σύμβολο) έχει 0 άσσους και άρα $\text{ones}(\varepsilon) = 0$.

Αναδρομικό βήμα: $\text{ones}(sx) = \text{ones}(s) + x$, όπου x είναι ένα bit (εδώ θεωρούμε ότι το x το χρησιμοποιούμε και ως αριθμό που προστίθεται στο $\text{ones}(s)$) και s είναι μία δυαδική συμβολοσειρά.

β) Εφαρμόζουμε δομική επαγωγή σε σχέση με τη συμβολοσειρά t για αυθαίρετη συμβολοσειρά s .

Βάση επαγωγής: Όταν το $t = \varepsilon$, δηλαδή την κενή λέξη. Τότε: $\text{ones}(st) = \text{ones}(s\varepsilon) = \text{ones}(s)$ το οποίο ισχύει.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι ισχύει $\text{ones}(st) = \text{ones}(s) + \text{ones}(t)$

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι $\text{ones}(s(tx)) = \text{ones}(s) + \text{ones}(tx)$, όπου x είναι ένα bit (μπορεί να είναι 0 ή 1). Έχουμε:

$$\text{ones}(s(tx)) = \text{ones}((st)x)$$

το οποίο από τον αναδρομικό ορισμό που έχουμε είναι ίσο με:

$$\text{ones}(st) + \text{ones}(x) = \text{ones}(st) + x$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$\text{ones}(st) = \text{ones}(s) + \text{ones}(t)$$

Άρα:

$$\text{ones}(s(tx)) = \text{ones}(s) + \text{ones}(t) + x$$

Από όπου έχουμε:

$$\text{ones}(s(tx)) = \text{ones}(s) + (\text{ones}(t) + x)$$

το οποίο είναι ίσο με (λόγω του αναδρομικού ορισμού):

$$\text{ones}(s(tx)) = \text{ones}(s) + \text{ones}(tx)$$

Άρα δείξαμε με δομική επαγωγή το ζητούμενο.

Άσκηση 3

α) Το γράφημα $G(A)$ έχει διπλάσιο αριθμό κορυφών από το αρχικό G ενώ το πλήθος των κορυφών του γράφημα $G(Y)$ αυξάνεται κατά m . Ως προς τις ακμές, παρατηρούμε ότι για κάθε ακμή $\{u, v\}$ του G υπάρχουν 4 ακμές μεταξύ των κορυφών (u, u') και (v, v') στο γράφημα $G(A)$. Ειδικότερα για το γράφημα $G(A)$ θα πρέπει να προσθέσουμε n επιπλέον ακμές καθώς κάθε κορυφή ενώνεται και με το αντίγραφό της. Για το πλήθος των ακμών του $G(Y)$ παρατηρούμε ότι σε κάθε ακμή του G αντιστοιχούμε δύο ακμές του $G(Y)$. Συνολικά θα έχουμε:

	G	$G(Y)$	$G(A)$
πλήθος κορυφών:	n	$n + m$	$2n$
πλήθος ακμών:	m	$2m$	$4m + n$

β) Εξετάζουμε τον κύκλο Euler. Για να έχει το γράφημα G κύκλο Euler θα πρέπει κάθε κορυφή του G να έχει άρτιο βαθμό στο G .

- $G(Y)$: Αν μια κορυφή έχει βαθμό k στο G τότε στο $G(Y)$ θα έχει βαθμό πάλι k καθώς δεν αλλάξαμε το πλήθος των γειτονικών κορυφών της στο $G(Y)$. Επομένως οι πραγματικές κορυφές του G έχουν άρτιο βαθμό στο $G(Y)$ διότι το k είναι άρτιο. Οι υπόλοιπες κορυφές του $G(Y)$ είναι κορυφές που έχουν προέλθει από υποδιαίρεσεις. Αυτές οι κορυφές έχουν βαθμό 2 από τον ορισμό της υποδιαίρεσης. Συνολικά κάθε κορυφή του $G(Y)$ έχει άρτιο βαθμό.
- $G(A)$: Όλες οι κορυφές του $G(A)$ θα έχουν περιττό βαθμό καθώς θα ενώνονται με $2 \cdot (\text{άρτιο σε πλήθος κορυφές}) + 1$ κορυφή του αρχικού G . Για παράδειγμα όταν το G είναι το K_3 που έχει κύκλο Euler τότε το $G(A)$ είναι το K_6 που δεν έχει κύκλο Euler.

Άσκηση 4

α) Οποιοδήποτε μήνυμα διάρκειας n πρέπει να τελειώνει είτε με έναν σύντομο ήχο είτε με έναν μακρύ ήχο.

- Περίπτωση Α: Αν το μήνυμα τελειώνει με έναν σύντομο ήχο, το προηγούμενο μέρος του μηνύματος είχε διάρκεια $n - 1$ δευτερόλεπτα. Υπάρχει μόνο ένας τρόπος να συμβεί αυτό ($1 \cdot a_{n-1}$).
- Περίπτωση Β: Αν το μήνυμα τελειώνει με έναν Μακρύ Ήχο, το προηγούμενο μέρος είχε διάρκεια $n - 2$ δευτερόλεπτα. Επειδή υπάρχουν 6 διαθέσιμες συχνότητες για αυτόν τον τελευταίο ήχο, υπάρχουν 6 τρόποι να συμβεί αυτό ($6 \cdot a_{n-2}$).

Άρα η αναδρομική σχέση είναι η

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι οι εξής: όταν το μήνυμα είναι ενός δευτερολέπτου τότε ο εξωγήινος πολιτισμός μπορεί να στείλει μόνο ένα σύντομο ήχο με έναν τρόπο. Άρα $a_1 = 1$. Επίσης, όταν το μήνυμα είναι 2 δευτερολέπτων, τότε μπορούμε να έχουμε 2 σύντομους ήχους με έναν τρόπο ή ένα μακρύ ήχο με 6 τρόπους. Άρα με 7 τρόπους μπορεί να φτιαχτεί ένα τέτοιο μήνυμα και άρα $a_2 = 7$.

β) Ζητείται να λυθεί η εξίσωση:

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad \text{με } a_1 = 1, a_2 = 7$$

Υποθέτουμε λύση της μορφής $a_n = r^n$. Αντικαθιστούμε στην αναδρομική σχέση:

$$r^2 - r - 6 = 0$$

Παραγοντοποιούμε το τριώνυμο για να βρούμε τις ρίζες:
 $(r - 3)(r + 2) = 0$

Οι ρίζες είναι:

$$r_1 = 3, \quad r_2 = -2$$

Άρα, η γενική μορφή της λύσης είναι:

$$a_n = c_1(3)^n + c_2(-2)^n$$

Αντικαθιστούμε το $n = 1$ και το $n = 2$ στον γενικό τύπο:

- Για $n = 1$:

$$c_1(3)^1 + c_2(-2)^1 = 1 \Rightarrow 3c_1 - 2c_2 = 1 \quad (\text{Εξίσωση Α})$$

- Για $n = 2$:

$$c_1(3)^2 + c_2(-2)^2 = 7 \Rightarrow 9c_1 + 4c_2 = 7 \quad (\text{Εξίσωση Β})$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε:

$$c_1 = \frac{3}{5} \text{ και } c_2 = \frac{2}{5}$$

Οπότε ο τύπος είναι:

$$a_n = \frac{3}{5}(3)^n + \frac{2}{5}(-2)^n$$