

Κώδικας Ακαδημαϊκής Δεοντολογίας

Δεν ενεργείτε ανήθικα αν:

- συζητάτε όλο το υλικό του μαθήματος (βιβλία, διαφάνειες κτλ.) με άλλους φοιτητές
- συμβουλευέστε τον καθηγητή
- συνεργάζεσθε με άλλους φοιτητές στα πλαίσια μίας γενικής συζήτησης σχετικά με την εργασία.

Ενεργείτε ανήθικα αν:

- χρησιμοποιείτε την εργασία άλλου φοιτητή και την παρουσιάζετε ως δικιά σας
- επιτρέψετε συνειδητά σε άλλο φοιτητή να παρουσιάσει την εργασία σας (ή κομμάτια της) ως δικιά του
- αντιγράψετε υλικό από άλλο φοιτητή ή άλλη πηγή (διαδίκτυο)
- δεν αναφέρετε κάτι που γνωρίζετε και το οποίο χαρακτηρίζεται με βάση τα παραπάνω ως ακαδημαϊκά ανήθικο

Θα πρέπει να έχετε στον νου σας ότι ο στόχος της εργασίας είναι να σκεφτείτε κριτικά και να κατανοήσετε το αντίστοιχο μέρος της ύλης.

Σε περίπτωση που ο διδάσκων/βοηθός εντοπίσει περίπτωση αντιγραφής έχει το δικαίωμα να μηδενίσει τον φοιτητή στην εργασία ή και ακόμα στο βαθμό του μαθήματος για το ακαδημαϊκό έτος 2025-2026 ανάλογα με την έκταση της αντιγραφής.

Αφορά τους φοιτητές από μεταγραφή: Αν μέχρι την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης δεν έχετε ιδρυματικό λογαριασμό, θα στείλετε την εργασία σας με email στο ktsichlas@upatras.gr εντός της προθεσμίας.

Επειδή θα χρειαστεί να γράφετε μαθηματικά σύμβολα, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον Equation Editor τόσο σε Microsoft Office όσο και σε Open Office. Γενικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε κειμενογράφο επιθυμείτε (σε Tex είναι επίσης ευπρόσδεκτο).

Ασκήσεις Κατανόησης

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 30/11/2025

Η υποβολή θα γίνει στο eclass.upatras.gr. Το αρχείο που θα υποβάλλετε θα είναι .pdf και δεν θα περιέχει σαρωμένες εικόνες ή φωτογραφίες από κινητό. Το έγγραφο σας θα είναι φτιαγμένο μόνο σε κάποιον κειμενογράφο (από το οποίο θα κάνετε το .pdf). Στην 1^η σελίδα θα πρέπει να γράφετε το όνομά σας και το ΑΕΜ σας

Άσκηση 1 (25%)

Έστω ότι ψάχνετε το κινητό σας και κάνετε τους εξής συλλογισμούς:

1. «Αν το κινητό είναι στο τραπεζάκι του σαλονιού, τότε το χρησιμοποίησα κατά τη διάρκεια της ταινίας.»
2. «Αν δεν έβλεπα ταινία στο υπνοδωμάτιο, τότε θα έβλεπα ταινία στο σαλόνι.»
3. «Αν έβλεπα ταινία στο υπνοδωμάτιο, τότε το κινητό είναι στο κομοδίνο.»
4. «Δεν χρησιμοποίησα το κινητό κατά τη διάρκεια της ταινίας.»
5. «Αν διάβαζα στο γραφείο, τότε άφησα το κινητό μου στο γραφείο.»
6. «Αν έβλεπα ταινία στο σαλόνι, τότε το κινητό μου είναι στο τραπεζάκι του σαλονιού.»
7. «Το κινητό μπορεί να βρίσκεται σε ένα μέρος μόνο.»

A) Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες προτασιακές μεταβλητές με την παρακάτω ερμηνεία να μετατρέψετε τους παραπάνω συλλογισμούς της φυσικής γλώσσας σε προτασιακούς τύπους.

P: Το κινητό είναι στο τραπεζάκι του σαλονιού.

Q: Το χρησιμοποίησα κατά τη διάρκεια της ταινίας.

R: Έβλεπα ταινία στο υπνοδωμάτιο.

S: Έβλεπα ταινία στο σαλόνι.

T: Το κινητό είναι στο κομοδίνο.

U: Διάβαζα στο γραφείο.

V: Το κινητό είναι στο γραφείο.

B) Βρείτε τελικά πού είναι το κινητό. Δώστε τυπική απόδειξη χρησιμοποιώντας τις λογικές προτάσεις από το ερώτημα (A) καθώς και γνωστούς κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων.

Άσκηση 2 (20%)

α) Να δείξετε ότι τουλάχιστον ένας από τους πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το μέσο όρο των αριθμών αυτών. Τί είδους απόδειξη χρησιμοποιήσατε;

β) Να αποδείξετε ότι ανάμεσα σε κάθε ρητό και κάθε άρρητο αριθμό υπάρχει πάντα ένας άρρητος αριθμός.

Άσκηση 3 (25%)

Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι ο αριθμός 6 διαιρεί τέλεια το $n^3 - n$, όταν ο $n \geq 0$ είναι θετικός ακέραιος.

Άσκηση 4 (30%)

Έστω τα μονομελή κατηγορήματα Φοιτητής, Καθηγητής και Μάθημα, και τα διμελή κατηγορήματα Διδάσκει και Πέρασε. Θεωρούμε την ακόλουθη ερμηνεία:

- Ο τομέας αναφοράς περιλαμβάνει τους φοιτητές, τους καθηγητές και τα μαθήματα ενός πανεπιστημίου. Περιλαμβάνει, επίσης, τη σταθερά κ που αντιστοιχεί σε έναν συγκεκριμένο καθηγητή.
- Το κατηγορήμα Φοιτητής(x) είναι αληθές αν και μόνο αν ο x είναι φοιτητής.
- Το κατηγορήμα Καθηγητής(x) είναι αληθές αν και μόνο αν ο x είναι καθηγητής.
- Το κατηγορήμα Μάθημα(y) είναι αληθές αν και μόνο αν το y είναι μάθημα.
- Το κατηγορήμα Διδάσκει(x, y) είναι αληθές αν και μόνο αν ο καθηγητής x διδάσκει το μάθημα y .
- Το κατηγορήμα Πέρασε(x, y) είναι αληθές αν και μόνο αν ο φοιτητής x πέρασε το μάθημα y .

A) Να εκφράσετε στη γλώσσα Γ_1 τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Υπάρχει φοιτητής που δεν έχει περάσει κανένα μάθημα του καθηγητή κ .
- ii. Όλοι οι φοιτητές δεν έχουν περάσει κάποιο μάθημα (όχι απαραίτητα το ίδιο).
- iii. Υπάρχει μάθημα που το έχουν περάσει όλοι οι φοιτητές.

B) Να αποδώσετε σε φυσική γλώσσα την ερμηνεία των παρακάτω προτάσεων:

- i. $\forall y(\text{Μάθημα}(y) \wedge \text{Διδάσκει}(\kappa, y) \rightarrow \exists x(\text{Φοιτητής}(x) \wedge \text{Πέρασε}(x, y)))$
- ii. $\exists x \exists z ((x \neq z) \wedge \text{Φοιτητής}(x) \wedge \text{Φοιτητής}(z) \wedge \forall y(\text{Μάθημα}(y) \rightarrow (\text{Πέρασε}(x, y) \leftrightarrow \text{Πέρασε}(z, y))))$
- iii. $\exists x (\text{Φοιτητής}(x) \wedge \forall y(\text{Μάθημα}(y) \rightarrow \text{Πέρασε}(x, y)) \wedge \forall z(\text{Φοιτητής}(z) \wedge (z \neq x) \rightarrow \exists y(\text{Μάθημα}(y) \wedge \neg \text{Πέρασε}(z, y))))$

Ενδεικτικές Λύσεις

Άσκηση 1

A) Οι προτασιακοί τύποι που αντιστοιχούν σε κάθε συλλογισμό-δήλωση με την ίδια σειρά είναι:

1. $P \rightarrow Q$
2. $\neg R \rightarrow S$
3. $R \rightarrow T$
4. $\neg Q$
5. $U \rightarrow V$
6. $S \rightarrow P$
7. Εδώ θα πρέπει να εκφράσουμε ότι το κινητό μπορεί να είναι μόνο σε μία θέση. Δηλαδή, να είναι στο κομοδίνο, στο γραφείο ή στο τραπεζάκι αλλά να μην μπορεί να είναι σε δύο ή παραπάνω ή σε καμία από αυτές τις θέσεις. Αυτό το εκφράζουμε ως εξής:

$$(P \wedge \neg T \wedge \neg V) \vee (\neg P \wedge T \wedge \neg V) \vee (\neg P \wedge \neg T \wedge V)$$

B)

- | | |
|-------------------|-----------------------|
| 8. $\neg P$ | (MT:4,1) |
| 9. $\neg S$ | (MT:8,6) |
| 10. $\neg \neg R$ | (MT:9,2) |
| 11. R | (διπλή άρνηση στο 10) |
| 12. T | (MP:11,3) |

Άρα, αποδείχτηκε ότι το κινητό είναι στο κομοδίνο δεδομένης και της πρότασης 7 που αποκλείει να βρίσκεται ταυτόχρονα και σε άλλη θέση.

Προσοχή: δεν μπορώ από τις παραπάνω προτάσεις να βγάλω το συμπέρασμα V . Αν το έκανα αυτό τότε θα είχαμε ένα αντιφατικό σύστημα αφού η πρόταση 7 (αξίωμα) θα γινόταν αντίφαση.

Άσκηση 2

α) Θα το αποδείξουμε με αντίφαση. Έστω ότι κανένας αριθμός δεν είναι μεγαλύτερος του μέσου όρου μ . Άρα: $a_1 + a_2 + \dots + a_n < n \cdot \mu$. Διαιρώντας τα δύο μέλη με n έχουμε: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} < \frac{n \cdot \mu}{n} \Rightarrow \mu < \mu$. Άτοπο.

β) Ο μέσος όρος δύο αριθμών κείται πάντα ανάμεσα στους δύο αριθμούς. Έστω ένας ρητός αριθμός α και ένας άρρητος αριθμός β . Πράγματι ο μέσος όρος $\mu = \frac{(\alpha + \beta)}{2}$ θα βρίσκεται μεταξύ των α και β . Επίσης, προκύπτει ότι $2\mu = \alpha + \beta$. Αφού το β είναι άρρητος, σημαίνει ότι και ο 2μ είναι άρρητος ως άθροισμα άρρητου και ρητού. Άρα και ο μ είναι άρρητος και βρίσκεται ανάμεσα στον α και β .

Άσκηση 3

Βάση επαγωγής:

Για $n = 0$ ισχύει, αφού το $6 \mid 0$ (το 6 διαιρεί τέλεια το 0).

Επαγωγική υπόθεση:

Έστω ότι $6 \mid n^3 - n$.

Επαγωγικό βήμα:

Θα δείξουμε ότι $6 \mid (n+1)^3 - (n+1)$. Πράγματι έχουμε:

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n(n+1)$$

Το 6 διαιρεί τον πρώτο όρο από την επαγωγική υπόθεση. Επίσης, το 3 προφανώς διαιρεί τον 2^ο όρο, δηλαδή το $3n(n+1)$. Επιπλέον, σίγουρα είτε το n ή το $(n+1)$ είναι άρτιος αριθμός και άρα γράφουμε $n(n+1) = 2k$ για κάποιον ακέραιο k . Άρα ο δεύτερος όρος γράφεται ως: $3n(n+1) = 3 \cdot 2k = 6k$. Προφανώς και ο δεύτερος όρος διαιρείται από το 6. Άρα και το άθροισμα των δύο όρων διαιρείται από το 6.

Από μαθηματική επαγωγή αποδείχτηκε ότι $6 \mid n^3 - n$, για ακέραιο $n \geq 0$.

Άσκηση 4

A)

- i. Υπάρχει φοιτητής που δεν έχει περάσει κανένα μάθημα του καθηγητή κ .
 $\exists x(\text{Φοιτητής}(x) \wedge \forall y(\text{Μάθημα}(y) \wedge \text{Διδάσκει}(\kappa, y) \rightarrow \neg \text{Πέρασε}(x, y)))$
- ii. Όλοι οι φοιτητές δεν έχουν περάσει κάποιο μάθημα (όχι απαραίτητα όλοι το ίδιο).
 $\forall x(\text{Φοιτητής}(x) \rightarrow \exists y(\text{Μάθημα}(y) \wedge \neg \text{Πέρασε}(x, y)))$
- iii. Υπάρχει μάθημα που το έχουν περάσει όλοι οι φοιτητές.
 $\exists y(\text{Μάθημα}(y) \wedge \forall x(\text{Φοιτητής}(x) \rightarrow \text{Πέρασε}(x, y)))$

B)

Η απόδοση σε φυσική γλώσσα της ερμηνείας των προτάσεων είναι η εξής:

- i. $\forall y(\text{Μάθημα}(y) \wedge \text{Διδάσκει}(\kappa, y) \rightarrow \exists x(\text{Φοιτητής}(x) \wedge \text{Πέρασε}(x, y)))$
«Σε κάθε μάθημα του καθηγητή κ , υπάρχει τουλάχιστον ένας φοιτητής που το έχει περάσει» ή ισοδύναμα «δεν υπάρχει μάθημα του καθηγητή κ το οποίο να μην πέρασε κανένας φοιτητής».
- ii. $\exists x \exists z ((x \neq z) \wedge \text{Φοιτητής}(x) \wedge \text{Φοιτητής}(z) \wedge \forall y(\text{Μάθημα}(y) \rightarrow (\text{Πέρασε}(x, y) \leftrightarrow \text{Πέρασε}(z, y))))$
«Υπάρχουν δύο φοιτητές οι οποίοι έχουν περάσει ακριβώς τα ίδια μαθήματα».
- iii. $\exists x (\text{Φοιτητής}(x) \wedge \forall y(\text{Μάθημα}(y) \rightarrow \text{Πέρασε}(x, y)) \wedge \forall z(\text{Φοιτητής}(z) \wedge (z \neq x) \rightarrow \exists y(\text{Μάθημα}(y) \wedge \neg \text{Πέρασε}(z, y))))$
«Ακριβώς ένας φοιτητής πέρασε όλα τα μαθήματα».