

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - 18/09/2025

Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

Στις παρακάτω ασκήσεις, δεν χρειάζεται να υπολογίζετε τις ακριβείς αριθμητικές τιμές εκτός και αν σας ζητείται ρητά. Σε κάθε περίπτωση, απαγορεύεται η χρήση οποιασδήποτε υπολογιστικής μηχανής.

Ονοματεπώνυμο: _____

Αρ. Μητρώου: _____

Έτος: _____

Θέματα Μικρής Δυσκολίας (6,5 μονάδες)¹

1. (1) Έστω η σχέση $R = \{(x, y) : \text{η λέξη } x \text{ έχει το ίδιο μήκος με τη λέξη } y\}$ πάνω στο σύνολο των ελληνικών λέξεων Σ . Αποδείξτε αν αυτή η σχέση είναι ή δεν είναι σχέση ισοδυναμίας. Αν είναι σχέση ισοδυναμίας, να περιγράψετε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

Απάντηση:

¹ Ο βαθμός δυσκολίας προφανώς είναι εν μέρει υποκειμενικός και εξαρτάται εν πολλοίς από το βαθμό κατανόησης της αντίστοιχης ύλης από τον φοιτητή.

2. (1) Τρεις φοιτήτριες βιολογίας A, B και Γ κατηγορούνται ότι εισήγαγαν έναν ιό στο εργαστήριο. Κατά τη διάρκεια της ανάκρισης, ισχυρίζονται τα εξής:

A: «Η B το έκανε»

B: «Αν η A είναι ένοχη, τότε και η Γ είναι ένοχη»

Γ: «Δεν το έκανα εγώ. Μία από τις άλλες, ή ίσως και οι δύο το έκαναν»

Έστω ότι οι προτασιακές μεταβλητές p , q και r δηλώνουν αντίστοιχα ότι «η A είναι ένοχη», «η B είναι ένοχη» και «η Γ είναι ένοχη».

- 1.** (0.5) Να κωδικοποιηθούν οι καταθέσεις των υπόπτων σε μορφή σύνθετων λογικών προτάσεων α, β, γ για τις φοιτήτριες A, B και Γ αντίστοιχα.
- 2.** (0.5) Έστω ότι και οι τρεις σύνθετες λογικές προτάσεις $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι αληθείς (όλες οι φοιτήτριες λένε αλήθεια). Σε αυτή την περίπτωση, τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για την ενοχή ή αθωότητα κάθε φοιτήτριας (εφόσον αυτό είναι δυνατό και δεν υπάρχει αντίφαση ή περισσότεροι από ένας συνδυασμοί που να ικανοποιούν τις προτάσεις);

Απάντηση:

3. (1,6) Στα παρακάτω ερωτήματα πρέπει να απαντήσετε απλά αν κάθε επιλογή είναι Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) χωρίς αιτιολόγηση. Σε περίπτωση σωστής απάντησης έχετε +0,2 ενώ σε περίπτωση λάθους έχετε -0.1. Σε περίπτωση που δεν απαντήσετε τίποτα, τότε δεν παίρνετε βαθμό. Τυχούσα αρνητική βαθμολογία μεταφέρεται στον τελικό βαθμό.

α) (0,8) Ο Γιάννης εκτέλεσε 12 (διακεκριμένες) βολές κατά τη διάρκεια του μικρού τελικού με τη Φινλανδία. Η στατιστική υπηρεσία καταγράφει σε μια γραμμή την έκβαση της κάθε βολής του Γιάννη, ως **E** (δηλαδή, εύστοχη) ή **A** (δηλαδή, άστοχη), ακριβώς τη στιγμή που εκτελεί τη βολή. Το πλήθος των δυνατών καταγραφών που μπορεί να κάνει η στατιστική υπηρεσία είναι:

1. 12^2
2. 2^{12}
3. $12!$
4. Το πλήθος των διαφορετικών υποσυνόλων που μπορούν να προκύψουν από ένα σύνολο 12 διακεκριμένων στοιχείων.

β) (0,8) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι Λάθος και ποιες Σωστές (χωρίς αιτιολόγηση);

1. Οι προτάσεις $\exists x \exists y (P(x, y) \vee Q(x, y))$ και $\exists x \exists y P(x, y) \vee \exists x \exists y Q(x, y)$ είναι λογικά ισοδύναμες.
2. Η πρόταση $\forall x \forall y (P(x, y) \wedge x \neq y \rightarrow \exists z (P(x, z) \wedge x \neq z \wedge P(z, y) \wedge z \neq y))$ αληθεύει όταν ο τομέας αναφοράς είναι οι φυσικοί αριθμοί, και το κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y) = "x \leq y"$.
3. Η πρόταση $\neg (\forall x \exists y (x \neq y \wedge P(y, x)))$ αληθεύει όταν ο τομέας αναφοράς είναι οι φυσικοί αριθμοί, και το κατηγορηματικό σύμβολο $P(x, y) = "x \leq y"$.
4. Οι προτάσεις $\forall x \forall y (P(x, y) \vee Q(x, y))$ και $\forall x \forall y P(x, y) \vee \forall x \forall y Q(x, y)$ είναι λογικά ισοδύναμες.

4. (1.5) Να αποδείξετε αν είναι αληθείς ή όχι οι παρακάτω προτάσεις:

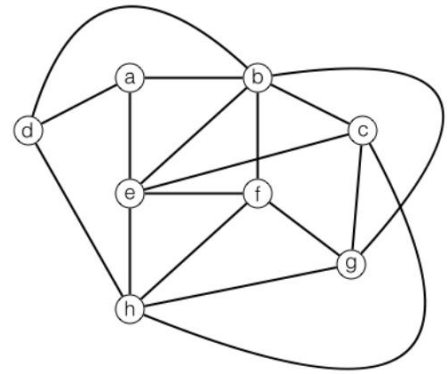
- 1) (0.5) Αν το 3 διαιρεί το φυσικό αριθμό n , τότε και το 6 διαιρεί τον n .
- 2) (0.5) Αν το n^2 είναι περιττός, τότε και το n είναι περιττός (n φυσικός).
- 3) (0.5) Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Απάντηση:

5. (1,4) α) (0,8) Για το διπλανό γράφημα απαντήστε τα εξής: i) Γιατί το συγκεκριμένο γράφημα δεν έχει κύκλο Euler; ii) Πως θα αλλάζατε το γράφημα με το ελάχιστο πλήθος προσθαφαιρέσεων ακμών ώστε να έχει κύκλο Euler;

β) (0,6) Υπάρχει απλό γράφημα που να έχει $n \geq 2$ κορυφές και κάθε κορυφή να έχει διαφορετικό βαθμό; Αποδείξτε την απάντησή σας.

Απάντηση:



Θέματα Μεσαίας Δυσκολίας (3,5 μονάδες)

6. (2) Για τη δημιουργία ενός 16-ψήφιου κωδικού είναι διαθέσιμα τα γράμματα {A, B, K, L, P, T}, τα ψηφία {1, 2, 5, 6, 7} και τα σύμβολα {!, @, %}. Ένας έγκυρος κωδικός πρέπει να περιέχει 10 γράμματα, 4 ψηφία και 2 σύμβολα, επιτρέποντας επαναλήψεις.

1. (6) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να επιλεγεί από τα διαθέσιμα στοιχεία μια συγκεκριμένη συλλογή από 10 γράμματα, 4 ψηφία και 2 σύμβολα, με δυνατότητα επαναλήψεων, και χωρίς να ενδιαφέρει η σειρά επιλογής;
2. (14) Έστω ότι έχουν επιλεγεί οι χαρακτήρες {A, A, A, K, K, P, P, P, P, T, 2, 2, 6, 7, @, @}. Να υπολογιστούν οι διαφορετικοί κωδικοί που μπορούν να σχηματιστούν σε κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις:
 - i. (3) Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.
 - ii. (4) Πρέπει να έχουν τα τέσσερα P σε συνεχόμενες θέσεις.
 - iii. (7) Πρέπει να είτε να ξεκινούν με @ είτε να τελειώνουν με @.

Απάντηση:

7. (1,5) Έχετε αναλάβει να μοντελοποιήσετε την απόδοση ενός περίπλοκου caching συστήματος. Μετά από πολλές παρατηρήσεις, καταλήγετε να μοντελοποιήσετε τα cache hits με την αναδρομή $T(n) = 2T(n-1) - T(n-2)$, $T(0) = 1$, $T(1) = 2$, όπου $T(n)$ αναπαριστά το πλήθος των cache hit μετά από n αιτήματα στο σύστημα.

α) (0.7) Λύστε την αναδρομή βρίσκοντας τον κλειστό της τύπο.

β) (0.8) Αποδείξτε με επαγωγή τον τύπο που βρήκατε ώστε να είστε σίγουροι ότι είναι σωστός.

Απάντηση:

Θέματα Υψηλής Δυσκολίας (3 μονάδες)

8. (1) Έστω το σύνολο $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Για κάθε υποσύνολο του $S \subseteq A$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f(S) = \sum_{x \in S} x$, που υπολογίζει το άθροισμα των στοιχείων του S . Ορίζουμε:

$$T(n) = \sum_{S \subseteq A} f(S) = \sum_{S \subseteq A} \sum_{x \in S} x$$

το άθροισμα των $f(S)$ πάνω σε όλα τα υποσύνολα του A (δηλαδή, σε όλα τα στοιχεία του δυναμοσυνόλου $P(A)$ του A). Να βρείτε τον κλειστό τύπο του $T(n)$.

Απάντηση:

Θέμα Υψηλής Δυσκολίας (2 μονάδες)

9. (2) Έστω τα διμελή κατηγορήματα $G(x, y) =$ “οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή” και $P(x, y) =$ “οι κορυφές x και y βρίσκονται μαζί σε απλό κύκλο”. Αυτά τα διμελή κατηγορήματα ορίζονται σε συνεκτικά μη-κατευθυνόμενα απλά γραφήματα. Επιπλέον, έστω ότι το $P(x, x)$ δεν αληθεύει για καμία κορυφή x . Χρησιμοποιώντας αυτά τα κατηγορήματα να κάνετε τα εξής:

1. (0.5) Έστω η λογική πρόταση $\phi_1 = \neg(\exists x \exists y P(x, y))$. Να μεταφράσετε τη λογική πρόταση σε φυσική γλώσσα. Πώς ονομάζεται το συνεκτικό απλό γράφημα για το οποίο ισχύει η ϕ_1 ;
2. (0.7) Γράψτε μία πρόταση $\phi_2(x)$ (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη ϕ_1 στον τύπο της $\phi_2(x)$ για συντομία) που να αληθεύει μόνο σε δένδρα όταν η κορυφή x είναι φύλλο του δένδρου.
3. (0.8) Γράψτε μία λογική πρόταση ϕ_3 (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις ϕ_1 και $\phi_2(x)$) που να αληθεύει μόνο σε δένδρα, όπου κάθε φύλλο τους συνδέεται σε κορυφή βαθμού 2.

Απάντηση:

Κενή σελίδα για Πρόχειρο ή για Συμπλήρωση Θέματος

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1.

Η R είναι ανακλαστική. Πράγματι, για κάθε λέξη $x \in \Sigma$, ισχύει ότι $(x, x) \in R$ αφού κάθε λέξη έχει το ίδιο μήκος με τον εαυτό της.

Η R είναι συμμετρική αφού αν $(x_1, x_2) \in R$, τότε η x_1 έχει ίδιο μήκος με την x_2 και άρα και αντίστροφα η x_2 έχει ίδιο μήκος με την x_1 . Επομένως, $(x_2, x_1) \in R$, και άρα είναι συμμετρική.

Η R είναι μεταβατική αφού αν $(x_1, x_2) \in R$ και $(x_2, x_3) \in R$, τότε η x_1 έχει ίδιο μήκος με την x_2 και η x_2 έχει ίδιο μήκος με την x_3 . Άρα (από μεταβατικότητα της ισότητας), και η x_1 έχει ίδιο μήκος με την x_3 . Επομένως, $(x_1, x_3) \in R$, και άρα είναι μεταβατική.

Κάθε κλάση ισοδυναμίας περιέχει όλες τις λέξεις ίδιου μήκους $[x] = \{y \in \Sigma: |y| = |x|\}$

2.

α)

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv q \\ \beta &\equiv p \rightarrow r \equiv \neg p \vee r \\ \gamma &\equiv \neg r \wedge (p \vee q)\end{aligned}$$

β) Έχουμε:

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \equiv q \wedge (\neg p \vee r) \wedge \neg r \wedge (p \vee q)$$

Για να είναι αληθεύσιμη η λογική πρόταση, αναγκαστικά πρέπει $r = \Psi$ και $q = A$. Σε αυτή την περίπτωση η φράση $(p \vee q)$ είναι αληθής ενώ για να είναι αληθής και η φράση $(\neg p \vee r)$ θα πρέπει $p = \Psi$.

Άρα οι A και Γ είναι αθώες ενώ ο B είναι η ένοχη.

3.

α) 1. **Λάθος.** Το νούμερο αυτό αντιστοιχεί σε όλες τις μεταθέσεις 12 διακεκριμένων αντικειμένων.

2. **Σωστό.** Ο Γιάννης μπορεί να βάλει καμία βολή, την πρώτη βολή, δύο συνεχόμενες βολές, τρεις μη συνεχόμενες βολές, όλες στις βολές κ.λπ. και οι επιτυχημένες βολές μπορούν να επιτευχθούν με οποιαδήποτε σειρά (π.χ., 3 επιτυχημένες βολές με επιτυχία στην 1^η την 3^η και την 10^η ή στην 4^η την 5^η και την 6^η). Αυτό λοιπόν ισοδυναμεί με τον αριθμό όλων των υποσυνόλων (όλα τα σύνολα από επιτυχημένες βολές) που μπορούν να προκύψουν από ένα σύνολο 12 διακεκριμένων στοιχείων (όλες οι βολές του Γιάννη). Προσέξτε το ότι αν ένα υποσύνολο είναι π.χ. το $\{7, 3, 10, 5\}$ (δεν υπάρχει η έννοια της διάταξης στο υποσύνολο) αυτό σημαίνει ότι ο Γιάννης πέτυχε την 3^η, την 5^η, την 7^η και τη 10^η βολή.

3. **Λάθος.** Δείτε την προηγούμενη απάντηση.

4. **Σωστό.** Το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου n στοιχείων είναι 2^n . Με βάση λοιπόν τα όσα είπαμε και πριν το αποτέλεσμα είναι 2^{12} .

β)

1. **Σωστό.** Ισχύει μιας και ο υπαρξιακός ποσοδείκτης είναι «συμβατός» με τη διάζευξη.

2. **Λάθος.** Ο τύπος ερμηνεύεται ότι για οποιονδήποτε δύο διαφορετικούς θετικούς φυσικούς αριθμούς x και y , με $x < y$, υπάρχει φυσικός αριθμός z τέτοιος ώστε $x < z < y$ (υπάρχει πάντα φυσικός ενδιάμεσος δηλαδή). Αυτό δεν ισχύει για δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, π.χ., για $x = 1$ και $y = 2$.

3. **Σωστό.** Ο τύπος $\forall x \exists y (x \neq y \wedge P(y, x))$ ερμηνεύεται ότι κάθε θετικός φυσικός αριθμός x έχει ένα μικρότερο θετικό φυσικό αριθμό y , το οποίο δεν ισχύει για $x = 1$. Άρα, ο τύπος $\neg \forall x \exists y (x \neq y \wedge P(y, x))$ αληθεύει.

4. **Λάθος.** Θεωρήστε την πρωτοβάθμια γλώσσα που ερμηνεύεται στο σύνολο των φυσικών αριθμών, με το $P(x, y)$ να δηλώνει ότι $x \leq y$, και το $Q(x, y)$ να δηλώνει ότι $x > y$. Τότε, ο τύπος $\forall x \forall y (P(x, y) \vee Q(x, y))$ επαληθεύεται, αλλά τόσο το $\forall x \forall y P(x, y)$ όσο και το $\forall x \forall y Q(x, y)$ διαψεύδονται.

4.

1) Είναι ψευδής. Πράγματι, το 9 διαιρείται από το 3 αλλά δεν διαιρείται από το 6.

- 2) Είναι αληθής. Παίρνοντας το αντιθετοαντίστροφο έχουμε την πρόταση: Αν το n είναι άρτιος, τότε και το n^2 είναι άρτιος. Πράγματι, αφού n άρτιος έχουμε $n = 2k$, για κάποιον φυσικό k . Άρα $n^2 = 2(2k^2)$ που σημαίνει ότι και το n^2 είναι άρτιος.
- 3) Είναι αληθής. Δείτε διαφάνειες.

5.

α) i) Δεν έχει Euler κύκλο αφού έχει 4 κορυφές με περιττό βαθμό (ξέρουμε ότι για να έχει τέτοιο κύκλο θα πρέπει όλες οι κορυφές να είναι άρτιου βαθμού). ii) Αρκεί να προσθέσουμε/αφαιρέσουμε δύο ακμές μεταξύ των 2 ζευγών κόμβων με περιττό βαθμό. Αν αφαιρέσω την (d,a) και την (e,h), τότε όλες οι κορυφές θα έχουν άρτιο βαθμός και άρα θα υπάρχει κύκλος Euler.

β) Όχι. Καταρχάς ο βαθμός κάθε κόμβου σε απλό γράφημα δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από $n-1$. Για να είναι όλοι διαφορετικοί θα πρέπει οι κορυφές αυτές να έχουν την εξής ακολουθία βαθμών: $n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0$, αφού θα πρέπει να έχουμε n διαφορετικούς βαθμούς με τον μέγιστο να είναι $n-1$. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού τότε θα ίσχυε ότι ο κόμβος με βαθμό $n-1$ θα συνδέεται με όλους ενώ ο κόμβος με βαθμό 0 δεν συνδέεται με κανένα. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα.

6.

α) Η επιλογή των 10 γραμμμάτων αντιστοιχεί στους συνδυασμούς 10 από 6 με επανάληψη, συνεπώς γίνεται με $C(6 + 10 - 1, 10) = C(15, 10)$ τρόπους.

Η επιλογή των 4 ψηφίων αντιστοιχεί στους συνδυασμούς 4 από 5 με επανάληψη, συνεπώς γίνεται με $C(5 + 4 - 1, 4) = C(8, 4)$ τρόπους.

Η επιλογή των 2 συμβόλων αντιστοιχεί στους συνδυασμούς 2 από 3 με επανάληψη, συνεπώς γίνεται με $C(3 + 2 - 1, 2) = C(4, 2)$ τρόπους.

Άρα, από τον κανόνα γινομένου η επιλογή των χαρακτήρων μπορεί να γίνει συνολικά με

$$C(15, 10) \cdot C(8, 4) \cdot C(4, 2)$$

διαφορετικούς τρόπους.

βi) Οι διαθέσιμοι χαρακτήρες είναι: $3 \times A, 2 \times K, 4 \times P, 1 \times T, 2 \times 2, 1 \times 6, 1 \times 7, 2 \times @$. Άρα, υπάρχουν $\frac{16!}{3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!}$ κωδικοί χωρίς περιορισμό.

βii) Θεωρούμε τους τέσσερις χαρακτήρες P ως έναν $PPPP$, συνεπώς ζητείται το πλήθος των 13-ψηφίων κωδικών με διαθέσιμους χαρακτήρες: $3 \times A, 2 \times K, 1 \times PPPP, 1 \times T, 2 \times 2, 1 \times 6, 1 \times 7, 2 \times @$.

Άρα, υπάρχουν $\frac{13!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!}$ κωδικοί με τα τέσσερα P σε συνεχόμενες θέσεις.

βiii) Οι κωδικοί που ξεκινούν με @ (δηλ. της μορφής @ ...) είναι όσοι και οι κωδικοί που τελειώνουν με @ (δηλ. της μορφής ... @) και είναι $\frac{15!}{3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$

Οι κωδικοί που ξεκινούν και τελειώνουν με σύμβολο (δηλ. της μορφής @ ... @) είναι $\frac{14!}{3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$

Από την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού συνεπώς έχουμε ότι οι κωδικοί που είτε ξεκινούν με σύμβολο είτε τελειώνουν με είναι:

$$\frac{15!}{3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} + \frac{15!}{3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} - \frac{14!}{3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$$

7.

α) Η χαρακτηριστική εξίσωση της αναδρομής είναι η:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

και έχει μία διπλή ρίζα $x = 1$.

Η γενική λύση σε αυτή την περίπτωση είναι της μορφής

$$T(n) = c_1 + c_2 n$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε:

$$T(0) = 1 \Rightarrow c_1 + 0c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$T(1) = 2 \Rightarrow 1 + c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 1$$

Άρα, ο κλειστός τύπος είναι ο $T(n) = 1 + n$.

β) Απόδειξη με ισχυρή επαγωγή.

Βάση: για $n = 0$, ισχύει αφού $T(0) = 1$ και $1 + 0 = 1$.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι ισχύει για όλες τις τιμές μέχρι και n . Δηλαδή ισχύει ότι: $T(n) = 1 + n$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n + 1$. Έχουμε:

$$T(n + 1) = 2T(n) - T(n - 1)$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$T(n + 1) = 2(1 + n) - (1 + n - 1) = 2 + 2n - n = 1 + (n + 1)$$

που πράγματι είναι ο κλειστός τύπος για το άθροισμα που θέλουμε να αποδείξουμε.

8.

Το δυναμοσύνολο του A έχει 2^n στοιχεία. Κάθε στοιχείο του A μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει σε ένα σύνολο. Το στοιχείο $k \in A$ εμφανίζεται σε 2^{n-1} υποσύνολα του A . Αυτό γιατί αν χρησιμοποιήσουμε το k τότε τα υπόλοιπα στοιχεία του A μπορούν να φτιάξουν 2^{n-1} υποσύνολα. Άρα, στο άθροισμα $T(n)$, το στοιχείο k συνεισφέρει κατά $k2^{n-1}$. Άρα, μπορούμε να εκφράσουμε το άθροισμα διαφορετικά ως εξής:

$$T(n) = \sum_{S \subseteq A} f(S) = \sum_{k=1}^n k2^{n-1}$$

από όπου έχουμε:

$$T(n) = 2^{n-1} \sum_{k=1}^n k = 2^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow T(n) = n(n+1)2^{n-2}$$

9.

1. Η λογική πρόταση αναφέρει ότι δεν υπάρχει κύκλος στο συνεκτικό γράφημα. Από τον ορισμό, αυτό είναι ένα δένδρο.

2. Η λογική πρόταση πρέπει να δηλώνει ότι το γράφημα είναι δένδρο και επιπλέον ότι η κορυφή x έχει βαθμό 1. Δηλαδή:

$$\phi_2(x) = \phi_1 \wedge \exists y(G(x, y) \wedge \forall z(G(x, z) \rightarrow z \approx y))$$

3. Η λογική πρόταση είναι:

$$\phi_3 = \phi_1 \wedge \forall x(\phi_2(x) \rightarrow \exists y(G(x, y) \wedge K(y)))$$

όπου ο τύπος $K(y)$ δηλώνει ότι η κορυφή y έχει βαθμό 2. Δηλαδή:

$$K(y) = \exists u \exists v(u \neq v \wedge G(y, u) \wedge G(y, v) \wedge \forall z(G(y, z) \rightarrow z \approx u \vee z \approx v))$$