ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - 27/01/2026

Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 40 λεπτά – Ομάδα **A**

Στις παρακάτω ασκήσεις, δεν χρειάζεται να υπολογίζετε τις ακριβείς αριθμητικές τιμές εκτός και αν σας ζητείται ρητά. Σε κάθε περίπτωση, απαγορεύεται η χρήση οποιασδήποτε υπολογιστικής μηχανής.

Ονοματεπώνυμο: ____

Αρ. Μητρώου: ____

Έτος:____

Θέματα Μικρής Δυσκολίας (6 μονάδες)[1]

1. (1) Έστω η σχέση: $R = \{(A, B)\colon \text{το σύνολο } A \text{ έχει τον ίδιο πληθάριθμο με το σύνολο } B, \text{δηλαδή}, |A| = |B|\}$ πάνω στο δυναμοσύνολο $P(E)$ του συνόλου των ελληνικών λέξεων E. Αποδείξτε αν αυτή η σχέση είναι ή δεν είναι σχέση ισοδυναμίας. Αν είναι σχέση ισοδυναμίας, να περιγράψετε τις κλάσεις ισοδυναμίας (περιγραφή 1-2 γραμμών). *Υπόδειξη: Θεωρείστε δεδομένο ότι η ισότητα αριθμών είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απάντηση:

[1] Ο βαθμός δυσκολίας είναι εν μέρει υποκειμενικός και εξαρτάται εν πολλοίς από το βαθμό κατανόησης της αντίστοιχης ύλης από τον φοιτητή.

2. (1,2) Έστω ότι ψάχνετε έναν φακό κάμερας στο σπίτι και κάνετε τους εξής συλλογισμούς:

1. «Αν ο φακός είναι στο τραπέζι του σαλονιού, τότε τον χρησιμοποίησα κατά τη διάρκεια της φωτογράφισης.»
2. «Αν δεν φωτογράφιζα στο υπνοδωμάτιο, τότε φωτογράφιζα στο σαλόνι.»
3. «Αν φωτογράφιζα στο υπνοδωμάτιο, τότε ο φακός είναι στη βάση της κάμερας.»
4. «Δεν χρησιμοποίησα τον φακό κατά τη διάρκεια της φωτογράφισης.»
5. «Αν φωτογράφιζα στο σαλόνι, τότε ο φακός βρίσκεται στο τραπέζι του σαλονιού.»
6. «Αν φωτογράφιζα στο υπνοδωμάτιο, τότε ο φακός δεν βρίσκεται στην αποθήκη.»

(α) (0,6) Χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες προτασιακές μεταβλητές με την παρακάτω ερμηνεία, να μετατρέψετε τις παραπάνω δηλώσεις σε λογικές προτάσεις:

- P: Ο φακός είναι στο τραπέζι του σαλονιού.
- Q: Τον χρησιμοποίησα κατά τη διάρκεια της φωτογράφισης.
- R: Φωτογράφιζα στο υπνοδωμάτιο.
- S: Φωτογράφιζα στο σαλόνι.
- T: Ο φακός είναι στη βάση της κάμερας.
- W: Ο φακός βρίσκεται στην αποθήκη.

(β) (0,6) Δεδομένου ότι ο φακός βρίσκεται σε μία θέση (δεν χρειάζεται να κωδικοποιήσετε αυτή την πληροφορία), σας ζητείται να βρείτε τη θέση του φακού (εφόσον είναι δυνατό δεδομένης της αλήθειας αυτών των δηλώσεων). Δώστε τυπική απόδειξη για την ορθότητα του επιχειρήματός σας, χρησιμοποιώντας κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων.

Απάντηση:

3. (0,8) Να αποδείξετε αν ισχύει η εξής πρόταση για όλους τους ακέραιους a, b εκτός του μηδέν: «Αν $a|b$ και $b|a$ τότε $a = b$», όπου «$a|b$» σημαίνει ότι ο ακέραιος a διαιρεί τέλεια τον ακέραιο b (αφήνει υπόλοιπο 0).

Απάντηση:

4. (1,5) Οι παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής δίνουν $+0{,}3$ όταν η απάντηση είναι σωστή και $-0{,}2$ όταν είναι λάθος. Αν δεν απαντήσετε σε ένα ερώτημα, δεν λαμβάνεται υπόψη στη βαθμολόγηση. Η αρνητική βαθμολογία μεταφέρεται στο συνολικό βαθμό.

1. Ένας κωδικός PIN αποτελείται από 4 ψηφία (0–9). Πόσοι διαφορετικοί κωδικοί μπορούν να σχηματιστούν;

Α. 10^4 Β. $4!$ Γ. $P(10,4)$ Δ. $\binom{10}{4}$

2. 4 φίλοι στέκονται στη σειρά για να βγάλουν φωτογραφία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να σταθούν;

Α. 4 Β. 2^4 Γ. $4!$ Δ. $\binom{4}{2}$

3. Σε μια πιτσαρία υπάρχουν 8 διαφορετικά υλικά. Θέλουμε να επιλέξουμε 3 διαφορετικά υλικά για μια πίτσα. Πόσοι διαφορετικοί συνδυασμοί υπάρχουν;

Α. 8^3 Β. $P(8,3)$ Γ. $\binom{8}{3}$ Δ. $3!$

4. 3 ίδια τετράδια τοποθετούνται σε ένα ράφι. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης υπάρχουν;

Α. 1 Β. $3!$ Γ. 3^3 Δ. $\binom{3+2-1}{2}$

5. Σε ένα χώρο στάθμευσης υπάρχουν 5 διαφορετικές στεγασμένες θέσεις και 8 ίδιες ακάλυπτες θέσεις. Ένα αυτοκίνητο θέλει να σταθμεύσει. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Α. 40 Β. 13 Γ. 6 Δ. 2

5. (1,5) 1. (1) Μια νυχτερινή περιπολία στο ιστορικό κέντρο της Θεσσαλονίκης πρέπει να περάσει ακριβώς μία φορά από κάθε δρόμο και να επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης. Το γράφημα $G = (V, E)$ αναπαριστά το δίκτυο δρόμων της περιοχής. Οι κορυφές $V = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ είναι πλατείες και οι ακμές $E = \{\alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\delta, \gamma\varepsilon, \delta\varepsilon\}$ είναι οι δρόμοι. Το γράφημα G είναι απλό, μη κατευθυνόμενο και συνεκτικό.
α) (0,5) Να βρείτε ένα κύκλωμα Euler στο γράφημα.
β) (0,5) Θέλουμε να κάνουμε την ελάχιστη δυνατή αλλαγή στις ακμές του γραφήματος ώστε να μην υπάρχει πλέον κύκλωμα Euler. Επιτρέπονται προσθέσεις και αφαιρέσεις ακμών. Αναφέρετε την αλλαγή (τις αλλαγές) και αιτιολογήστε γιατί το νέο γράφημα δεν έχει κύκλωμα Euler.
2. (0,5) Σε ένα επιστημονικό συνέδριο συμμετέχουν 9 άτομα. Κατά τη διάρκεια του συνεδρίου, κάθε χειραψία γίνεται μεταξύ δύο διαφορετικών ατόμων, και κανένα ζευγάρι δεν ανταλλάσσει περισσότερες από μία χειραψίες. Είναι δυνατόν ακριβώς 5 άτομα να έχουν ανταλλάξει περιττό αριθμό χειραψιών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
<u>**Απάντηση:**</u>

Θέματα Μεσαίας Δυσκολίας (5 μονάδες)

6. (1,8) Θεωρούμε τη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε απλά ακατεύθυντα γραφήματα και έχει ένα διμελές κατηγόρημα $P(x, y)$: «οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή». Προσέξτε, ότι κανένα ζεύγος (a, a) δεν ανήκει στη σχέση P, δηλαδή η $P(\alpha, \alpha)$ είναι ψευδής για κάθε κορυφή α.

1. (0,8) Περιγράψτε με φυσική γλώσσα τη λογική πρόταση $\forall x \forall y \forall z(\neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \rightarrow \neg P(x, z))$. Έπειτα, δώστε δύο γραφήματα, με τουλάχιστον 3 κορυφές, τα οποία την ικανοποιούν. *Υπόδειξη: Προσπαθήστε να εκφράσετε τη λογική πρόταση με μία ισοδύναμη λογική πρόταση χωρίς αρνήσεις.*
2. (0,5) Δώστε πρόταση $\varphi(x)$, όπου x ελεύθερη μεταβλητή, που να δηλώνει ότι η κορυφή x έχει βαθμό 2.
3. (0,5) Να εκφράσετε με μία λογική πρόταση τη δήλωση «όλες οι κορυφές του γραφήματος εκτός από μια έχουν βαθμό 2». *Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την πρόταση $\varphi(x)$ του προηγούμενου ερωτήματος.*

Απάντηση:

7. (1) Δίνονται 5 διαφορετικές σφαίρες και 3 ίδια κουτιά. Να υπολογιστεί ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν όλες οι σφαίρες στα κουτιά, υπό την προϋπόθεση ότι κανένα κουτί δεν παραμένει κενό. Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

<u>Απάντηση:</u>

8. (1,2) Έστω ότι S είναι το υποσύνολο του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών μη-αρνητικών ακεραίων που ορίζονται αναδρομικά ως εξής:
<u>Βάση:</u> $(0,0) \in S$
<u>Αναδρομικό Βήμα:</u> Αν $(\alpha, \beta) \in S$ τότε $(\alpha + 2, \beta + 3) \in S$ και $(\alpha + 3, \beta + 2) \in S$.
α) (0,2) Να παραθέσετε τα στοιχεία που παράγονται από τις δύο πρώτες εφαρμογές του αναδρομικού ορισμού.
β) (1) Να χρησιμοποιήσετε δομική επαγωγή για να δείξετε ότι το 5 διαιρεί τέλεια το $\alpha + \beta$ (δηλ. $5|\alpha + \beta$), όταν $(\alpha, \beta) \in S$.
<u>Απάντηση:</u>

9. (1) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί χρησιμοποιώντας απόδειξη με αντίφαση.

<u>**Απάντηση:**</u>

Θέμα Αυξημένης Δυσκολίας (3 μονάδες)

10. (2) Η εταιρία Sierra, έφτιαξε ένα παιχνίδι γρίφων, όπου ο παίκτης περιπλανιέται στον πλανήτη Λούμινα και αντιμετωπίζει καταστάσεις που πρέπει να λύσει με έξυπνο τρόπο. Κάποια στιγμή, μέσα σε ένα σπήλαιο, ρίχνει τον φακό του σε ένα σπάνιο είδος κρύσταλλου. Αμέσως καταλαβαίνει το σφάλμα του, μιας και αυτός ο κρύσταλλος όταν δεχτεί φως μπαίνει σε μία διαδικασία αναπαραγωγής που δεν σταματά. Πιο συγκεκριμένα, ο παίκτης διαβάζοντας το ειδικό PDA που έχει μαζί του, κατανοεί ότι η διαδικασία αναπαραγωγής έχει ως εξής:

1. Το επόμενο λεπτό από τη δημιουργία ενός κρυστάλλου, αυτός παράγει ένα νέο κρύσταλλο.
2. Το μεθεπόμενο λεπτό (δηλαδή δύο λεπτά μετά τη δημιουργία του) παράγει δύο νέους κρυστάλλους.
3. Μετά από αυτά τα δύο λεπτά, δεν παράγει άλλους κρυστάλλους, αλλά παραμένει ενεργός (δεν καταστρέφεται).

Η αποικία κρυστάλλων ξεκινά με ένα μόνο κρύσταλλο C_1 στο λεπτό 0.

Στα πρώτα λεπτά συμβαίνουν τα εξής:

Λεπτό 0: C_1

Λεπτό 1: Ο C_1παράγει ένα νέο κρύσταλλο C_2

Λεπτό 2:

- Ο C_1 παράγει 2 νέους κρυστάλλους C_3 και C_4
- Ο C_2 παράγει έναν νέο κρύσταλλο C_5

Λεπτό 3:

- Ο C_1 είναι ενεργός αλλά δεν παράγει νέους κρυστάλλους
- Ο C_2 παράγει 2 νέους κρυστάλλους C_6 και C_7
- Οι C_3, C_4, C_5 παράγουν από έναν κρύσταλλο

α) (0,3) Καταγράψτε τους πληθυσμούς των κρυστάλλων ανά κατηγορία στον παρακάτω πίνακα από το λεπτό 1 μέχρι και το λεπτό 4.

Λεπτό	καινούργιοι	ενός λεπτού	≥ δύο λεπτών	Σύνολο
0	1	0	0	1
1				
2				
3				
4				

β) (0,7) Ορίστε μια αναδρομή a_n που να εκφράζει το συνολικό αριθμό κρυστάλλων στο λεπτό n.

γ) (0,6) Δώστε έναν κλειστό τύπο για την a_n σαν συνάρτηση του n.

δ) (0,4) Ο παίκτης μπορεί να προχωρήσει μέσα στο σπήλαιο μόνο αν κατορθώσει και σταματήσει την αναπαραγωγή των κρυστάλλων. Μπορεί να φτιάξει ένα μαγικό φίλτρο που καταστρέφει το πολύ 43 κρυστάλλους. Πόσα λεπτά έχει στη διάθεσή του το πολύ για να φτιάξει το φίλτρο ώστε να μπορέσει να καταστρέψει όλους τους κρυστάλλους;

Απάντηση:

11. (1) Αποδείξτε συνδυαστικά (όχι αλγεβρικά) ότι $\binom{n}{k}\binom{k}{2}\binom{2}{1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$

<u>Απάντηση:</u>

Πρόχειρο

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (Α)

1.
Η R είναι ανακλαστική. Πράγματι, για κάθε σύνολο ελληνικών λέξεων $A \in P(E)$, ισχύει ότι $(A, A) \in R$ αφού $|A| = |A|$.
Η R είναι συμμετρική, αφού αν $(A, B) \in R$, τότε $|A| = |B|$ και άρα αντίστροφα, $|B| = |A|$. Επομένως, $(B, A) \in R$.
Η R είναι μεταβατική, αφού αν $(A, B) \in R$ και $(B, \Gamma) \in R$, τότε $|A| = |B|$ και $|B| = |\Gamma|$ και άρα $|A| = |\Gamma|$, από όπου προκύπτει ότι $(A, \Gamma) \in R$.
Κάθε κλάση ισοδυναμίας περιέχει όλα τα σύνολα με ίδιο πλήθος λέξεων: $[A] = \{B \in P(E): |A| = |B|\}$

2.
(α) Οι προτασιακοί τύποι που αντιστοιχούν σε κάθε συλλογισμό με την ίδια σειρά είναι:
1. $P \to Q$
2. $\neg R \to S$
3. R→T
4. $\neg Q$
5. S→P
6. $R \to \neg W$

(β)
Απόδειξη βήμα–βήμα:
7. $\neg P$ (MT: 1,4)
8. $\neg S$ (MT: 5,7)
9. $\neg\neg R$ (MT: 2,8)
10. R (Διπλή άρνηση: 9)
11. T (MP: 3,10)

Άρα, αποδείχτηκε ότι ο φακός βρίσκεται στη βάση της κάμερας (11).

3.
Δεν ισχύει. Απόδειξη με αντιπαράδειγμα. Για $a = 2$ και $b = -2$.

4.
1. Α
2. Γ
3. Γ
4. Α
5. Γ

5.
1. α)
Κάθε κόμβος έχει άρτιο βαθμό. Άρα υπάρχει κύκλωμα Euler. Ένα τέτοιο κύκλωμα είναι το:
$$\alpha \to \gamma \to \beta \to \delta \to \gamma \to \varepsilon \to \delta \to \alpha$$
β) Αρκεί να αφαιρέσουμε μία ακμή. Σε αυτή την περίπτωση, δύο κόμβοι θα έχουν περιττό βαθμό, οπότε δεν θα υπάρχει κύκλωμα Euler. Αφαιρούμε την ακμή $\gamma\delta$. Ομοίως αν προσθέσουμε κάποια ακμή που δεν υπάρχει ήδη.
2. Όχι. Έστω γράφημα που οι κόμβοι είναι τα άτομα και οι ακμές αναπαριστούν χειραψίες. Από το θεώρημα χειραψιών, το άθροισμα όλων των βαθμών πρέπει να είναι πάντοτε άρτιος αριθμός. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε 5 άτομα που έκαναν περιττό πλήθος από χειραψίες και άρα το άθροισμά τους είναι περιττός. Προσθέτοντας και τα άλλα 4 άτομα που το καθένα έχει κάνει άρτιο πλήθος (άρα και οι 4 έχουν κάνει άρτιο πλήθος χειραψιών) έχουμε περιττό άθροισμα βαθμών, το οποίο δεν μπορεί να ισχύει.

6.
α) Η πρόταση είναι πιο κατανοητή αν αντικαταστήσουμε την συνεπαγωγή με την ισοδύναμη αντιθετοαντίστροφη μορφή της, εφαρμόζοντας και τον κανόνα De Morgan, δηλαδή

$$\forall x \forall y \forall z\big(\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z) \to \neg P(x,z)\big) \equiv$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\neg\neg P(x,z) \to \neg\big(\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z)\big)\Big) \equiv$$

$$\forall x \forall y \forall z (P(x,z) \to P(x,y) \wedge P(y,z)).$$

Αυτή η πρόταση λέει ότι αν δύο κορυφές συνδέονται με ακμή τότε και οι δύο συνδέονται με οποιαδήποτε άλλη κορυφή. Με άλλα λόγια αν το γράφημα έχει έστω και μία ακμή τότε είναι το πλήρες γράφημα (έστω με n κορυφές). Τον τύπο όμως πληροί και το γράφημα με n απομονωμένες κορυφές. Άρα για $n = 3$ έχουμε το πλήρες γράφημα K_3 και το κενό γράφημα που αποτελείται από 3 απομονωμένες κορυφές (αυτά τα δύο γραφήματα είναι *συμπληρωματικά* το ένα με το άλλο).

β) $\varphi(x) \equiv \exists y \exists z\big(y \neq z \wedge P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge \forall w(w \neq y \wedge w \neq z \to \neg P(x,w))\big)$

γ) Η ζητούμενη λογική πρόταση γράφεται ως

$$\psi \equiv \exists x\big(\neg\varphi(x) \wedge \forall y(y \neq x \to \varphi(y))\big)$$

7.

Οι δυνατές κατανομές των σφαιρών ως προς το πλήθος ανά κουτί είναι:

1. 3,1,1
2. 2,2,1

Περίπτωση 1: Κατανομή $\mathbf{3,1,1}$

Επιλέγουμε ποιες 3 από τις 5 σφαίρες θα τοποθετηθούν στο ίδιο κουτί:

$$\binom{5}{3} = 10$$

Οι υπόλοιπες δύο σφαίρες τοποθετούνται σε ξεχωριστά κουτιά, τα οποία δεν διακρίνονται.

Άρα, έχουμε 10 τρόπους.

Περίπτωση 2: Κατανομή $\mathbf{2,2,1}$

Επιλέγουμε τη σφαίρα που θα τοποθετηθεί μόνη της:

$$\binom{5}{1} = 5$$

Οι υπόλοιπες 4 σφαίρες χωρίζονται σε δύο ζεύγη:

$$\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$$

Συνεπώς, οι τρόποι είναι:

$$5 \cdot 3 = 15$$

Άρα, από την αρχή του αθροίσματος, οι συνολικοί τρόποι είναι:

$$10 + 15 = \mathbf{25}$$

8.

α) 1η εφαρμογή: $(2,3) \in S, (3,2) \in S$

$2^η$ εφαρμογή: $(4,6) \in S, (5,5) \in S, (6,4) \in S$
Άρα συνολικά οι πρώτες δύο εφαρμογές παράγουν το εξής υποσύνολο του S:

$$\{(0,0), (2,3), (3,2), (4,6), (5,5), (6,4)\}$$

β) Βάση δομικής επαγωγής: $5|0 + 0 \Rightarrow 5|0$ που ισχύει. Πράγματι το 5 διαιρεί το 0, αφού αφήνει υπόλοιπο 0.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι η ιδιότητα ισχύει για κάποιο $(\alpha, \beta) \in S$, δηλαδή ισχύει ότι $5|\alpha + \beta$. Δηλαδή, ισχύει ότι υπάρχει ακέραιος αριθμός k έτσι ώστε $\alpha + \beta = 5k$.
Επαγωγικό βήμα: Θα χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό ορισμό για να δείξουμε ότι και τα καινούργια ζεύγη που θα παραχθούν θα έχουν την ιδιότητα. Πράγματι, ξεκινώντας από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι:
i. $(\alpha + 2, \beta + 3) \in S$: $(\alpha + 2) + (\beta + 3) = (\alpha + \beta) + 5$
Αφού όμως από επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $(\alpha, \beta) \in S$ και ότι $5|\alpha + \beta$ προκύπτει ότι:

$$(\alpha + \beta) + 5 = 5k + 5 = 5(k + 1)$$

Όμως το $k + 1$ είναι ακέραιος αριθμός, και άρα $5|(\alpha + 2) + (\beta + 3)$
ii. $(\alpha + 3, \beta + 2) \in S$: $(\alpha + 3) + (\beta + 2) = (\alpha + \beta) + 5$
Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι $5|(\alpha + 3) + (\beta + 2)$
Άρα από δομική επαγωγή προκύπτει ότι για κάθε στοιχείο $(\alpha, \beta) \in S$ θα ισχύει ότι $5|\alpha + \beta$.

9.
Έστω ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι πεπερασμένο n και έστω ότι αυτοί είναι το σύνολο $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Έστω ο αριθμός $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Αν ο αριθμός q είναι πρώτος, τότε φτάνουμε σε άτοπο αφού $q \notin P$, αφού είναι μεγαλύτερος από όλους λόγω κατασκευής και άρα άτοπο. Αν ο αριθμός q είναι σύνθετος, τότε υπάρχει πρώτος $p_i \in P$ έτσι ώστε $p_i|q$. Κατασκευάζουμε τον αριθμό $q' = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = q - 1$. Προφανώς ο p_i διαιρεί τον q' από την κατασκευή του. Άρα ο πρώτος αριθμός p_i διαιρεί και κάθε γραμμικό συνδυασμό των q και q'. Αυτό σημαίνει ότι ο p_i διαιρεί και το $q - q' = 1$. Ο μόνος μη αρνητικός ακέραιος που διαιρεί το 1 είναι ο 1 που δεν είναι πρώτος και άρα δεν ανήκει στο σύνολο P, και καταλήξαμε σε άτοπο. Αφού σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, η αρχική υπόθεση ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι πεπερασμένο είναι ψευδής και άρα αποδείχτηκε το ζητούμενο.

10.
α)

Λεπτό	καινούργιοι	ενός λεπτού	≥ δύο λεπτών	Σύνολο
0	1	0	0	1
1	1	1	0	2
2	2+1	1	1	5
3	2+3	3	2	10
4	2*3+5	5	5	21

β) Ορίζουμε ως a_n: συνολικός αριθμός κρυστάλλων το λεπτό n. Το a_n θα εμπεριέχει όλους τους κρυστάλλους a_{n-1} που υπάρχουν στο λεπτό $n - 1$. Επίσης, οι καινούργιοι κρύσταλλοι δημιουργούνται από αυτούς που ήταν καινούργιοι το λεπτό $n - 1$. Αυτοί είναι $1(\alpha_{n-1} - a_{n-2})$. Επιπλέον, δημιουργούνται καινούργιοι κρύσταλλοι από αυτούς που στο λεπτό $n - 1$ είχαν ήδη ηλικία ενός λεπτού. Μάλιστα αυτοί δημιουργούν 2 κρυστάλλους. Αυτοί ήταν οι καινούργιοι του λεπτού $n - 2$, που είναι $a_{n-2} - a_{n-3}$ και οι οποίοι άρα δημιουργούν $2(a_{n-2} - a_{n-3})$ συνολικά καινούργιους κρυστάλλους στο λεπτό n. Άρα:

$$a_n = (\alpha_{n-1} - a_{n-2}) + 2(\alpha_{n-2} - a_{n-3}) + a_{n-1} \Rightarrow a_n = 2\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} - 2\alpha_{n-3}$$

όπου οι αρχικές συνθήκες είναι: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 5$

γ) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

η οποία γράφεται ως εξής:

$$x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x-2) = 0$$

Άρα, οι ρίζες τις χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι $1, -1, 2$.

Άρα, η ο κλειστός τύπος έχει τη μορφή: $a_n = c2^n + k1^n + m(-1)^n$

Βάζοντας τις αρχικές συνθήκες έχουμε το σύστημα:

$$c + k + m = 1$$

$$2c + k - m = 2$$

$$4c + k + m = 5$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε: $c = \frac{4}{3}, k = -\frac{1}{2}, m = \frac{1}{6}$

Άρα ο κλειστός τύπος είναι ο:

$$a_n = \frac{1}{3}2^{n+2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n$$

δ) Θα πρέπει να υπολογίσουμε το μέγιστο n έτσι ώστε να ισχύει ότι

$$\frac{1}{3}2^{n+2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n \leq 43 \Rightarrow$$

$$2^{n+3} \leq 258 - (-1)^n \Rightarrow$$

$$n \leq \log_2(258 - (-1)^n) - 3$$

Αν n άρτιος τότε $n \leq \log_2(257) - 3$ και άρα $n \leq 5$. Αφού n άρτιος, ο παίκτης θα έχει στη διάθεσή του 4 λεπτά.

Αν n περιττός τότε $n \leq \log_2(259) - 3$ και άρα $n \leq 5$. Αφού n περιττός, ο παίκτης θα έχει στη διάθεσή του 5 λεπτά.

Άρα, ο παίκτης έχει στη διάθεσή του 5 λεπτά συνολικά για να χρησιμοποιήσει το μαγικό φίλτρο.

11.

Το αριστερό μέρος μετρά με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k άτομα από μία ομάδα n ατόμων $\left(\binom{n}{k}\right)$ και από αυτά τα k θέλουμε 2 $\left(\binom{k}{2}\right)$ εκ των οποίων ο ένας $\left(\binom{2}{1}\right)$ είναι ο πρόεδρος και αυτός που απομένει (με έναν τρόπο) θα είναι ο αντιπρόεδρος. Αυτό μπορούμε να το μετρήσουμε και ως εξής: επιλέγουμε πρώτα τον πρόεδρο με n τρόπους, μετά τον αντιπρόεδρο με $n-1$ τρόπους και τέλος τους υπόλοιπους $k-2$ από τους εναπομείναντες $n-2$ χωρίς να τους διαφοροποιούμε $\left(\binom{n-2}{k-2}\right)$ (άρα δεν ας ενδιαφέρει η σειρά).

Αφού και οι δύο τρόποι μέτρησης αφορούν το ίδιο πρόβλημα προκύπτει η ισότητα.