

Τι ενδείκνυται να γνωρίζω από το μάθημα "Γραμμική Άλγεβρα";¹

Παραθέτουμε ομαδοποιημένες ανά κεφάλαιο και διάλεξη τις προσδοκώμενες γνώσεις σας από το μάθημα. Με πλάγια γραφή σημειώνονται ζητήματα που εμπλέκουν συγκεκριμένες (αλγοριθμικές) διαδικασίες τις οποίες θα πρέπει να μπορείτε να εφαρμόσετε. Όσα αναφέρονται, έχουν παρουσιαστεί στις διαλέξεις και έχουν συζητηθεί στα φροντιστήρια. Η σειρά είναι σημαντική: κάθε κεφάλαιο έχει ως προαπαιτούμενα τα προηγούμενα. Σε κάθε περίπτωση, για καλύτερη προετοιμασία, συστήνουμε να διαβάσετε επίσης τα "Παραδείγματα θεμάτων και σχόλια" που θα βρείτε στα έγγραφα του E-class.

Κεφάλαια 1, 2, 10 (Διαλέξεις 1,2,3,4)

1. (K1-2) *Να επιτελείτε πράξεις μεταξύ μητρώων, διανυσμάτων, βαθμωτών, την πράξη της αναστροφής και να γνωρίζετε τις ιδιότητές τους. Να μπορείτε να επιτελείτε πράξεις με σύνθετα μητρώα.*
2. (K1, K2) *Να αναγνωρίζετε αν ένα μητρώο έχει ειδική δομή (π.χ. διαγώνιο, τριγωνικό, συμμετρικό, ερμιτιανό, μπλοκ διαγώνιο, μπλοκ τριγωνικό) με στόχο την αξιοποίησή της - αφορά όλα τα κεφάλαια).*
3. (K1) *Να γνωρίζετε πως μπορούν να ερμηνευθούν τα βασικά προβλήματα της γραμμικής άλγεβρας (πολλαπλασιασμός μητρώου διανύσματος ή διανύσματος μητρώου, πολλαπλασιασμός μητρώων και επίλυση γραμμικού συστήματος) βάσει της έννοιας του γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων (στηλών ή γραμμών).*
4. (K1, K4, K10) *Να υπολογίζετε μήκη διανυσμάτων, γωνίες μεταξύ διανυσμάτων και τις κλασικές νόρμες διανυσμάτων (1, 2, ∞). Να γνωρίζετε να διαχειρίζεστε την έννοια της ορθογωνιότητας, τι είναι ορθογώνια διανύσματα και τι είναι τα ορθομοναδιαία μητρώα. Να γνωρίζετε τις βασικές ανισότητες (τριγωνική και CBS), τον κανόνα του παραλληλογράμμου και την ταυτότητα του Πυθαγόρα.*
5. (K2) *Να μπορείτε να ερμηνεύσετε τη λύση γραμμικού συστήματος ή την αποτυχία εύρεσής της γεωμετρικά σε 2- και 3d (ερμηνεία γραμμών/στηλών).*
6. (K2) *Να γνωρίζετε πως μπορεί να αντιστοιχηθεί ένα γράφημα (κατευθυνόμενο ή μη) με ένα μητρώο γειτνίασης και τι σημαίνουν οι τιμές των στοιχείων του μητρώου που κατασκευάζεται υπώνοντας το μ. γειτνίασης σε δύναμη.*
7. (K2) *Να μπορείτε να διαχειριστείτε πράξεις με το αντίστροφο και με δυνάμεις μητρώου. Για ειδικά μητρώα, να είσαστε σε θέση να αναγνωρίσετε αν είναι αντιστρέψιμα ή όχι.*
8. (K2) *Να μπορείτε να επιλύετε τριγωνικά συστήματα (με πίσω ή εμπρός αντικατάσταση). Να είστε σε θέση να εκτελείτε παραγοντοποίηση $PA = LU$ (με εφαρμογή μητρώων απαλοιφής και μητρώων εναλλαγής γραμμών για οδήγηση). Για μικρά συστήματα, να μπορείτε να επιλύετε τετραγωνικά γραμμικά συστήματα μέσω της απαλοιφής Gauss επί του επαυξημένου μητρώου ή με παραγοντοποίηση LU . Να μπορείτε να αντιστρέφετε μικρά ή ειδικά μητρώα.*
9. (K1, K2) *Να μπορείτε να μετράτε (συναρτήσει του μεγέθους των μητρώων και διανυσμάτων) τα στοιχειώδη κόστη (σε αριθμητικές πράξεις) των βασικών πράξεων (εσωτερικό γινόμενο, πολλαπλασιασμός μητρώου-διανύσματος, πολλαπλασιασμός μητρώων, επίλυση τριγωνικού συστήματος, επίλυση τετραγωνικού συστήματος).*

¹© Ε. Γαλλόπουλος & Ε. Στεφανόπουλος, 2017.

Κεφάλαιο 3 (Διαλέξεις 5,6)

1. (K3) Να γνωρίζετε τους 4 υπόχωρους ενός μητρώου και την έννοια της τάξης. *Να μπορείτε να μετασχηματίσετε σε κλιμακωτή μορφή (ανάγμένων γραμμών ή μη). Να μπορείτε να εξάγετε την τάξη του μητρώου, τις διαστάσεις των 4ων υπόχωρων, και να υπολογίσετε αντίστοιχες βάσεις και παραγοντοποίηση τάξης.*
2. (K3) Να αναγνωρίζετε αν ένα δοθέν σύνολο αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο.
3. (K3) *Να μπορείτε να επιλύετε το $Ax = 0$ και να υπολογίζετε την πλήρη λύση του $Ax = b$.*
4. (K3) Να γνωρίζετε πράξεις μεταξύ υποχώρων (ένωση, τομή, ευθύ άθροισμα), τι είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα υποχώρου και να μπορείτε να αποφανθείτε κατά πόσον το αποτέλεσμα είναι υπόχωρος ή όχι.

Κεφάλαιο 4 (Διαλέξεις 6,7)

1. (K3,K4) Να γνωρίζετε τις σχέσεις καθετότητας μεταξύ των υποχώρων.
2. (K1,K4) Να γνωρίζετε πως ο υπολογισμός τιμών πολυωνύμου σε δυναμομορφή μπορεί να εκφραστεί σαν πολλαπλασιασμός μητρώου Vandermonde με το διάνυσμα των συντελεστών.
3. (K4) Να γνωρίζετε τι είναι η ορθογώνια προβολή και να μπορείτε να υπολογίζετε το μητρώο ορθογώνιας προβολής καθώς και την ορθογώνια προβολή διανύσματος σε υπόχωρο.
4. (K4) *Να μπορείτε να βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση διανύσματος από υπόχωρο βάσει του κριτηρίου ελαχίστων τετραγώνων και να λύνετε γραμμικά πρβλ. ελαχίστων τετραγώνων μέσω κανονικών εξισώσεων.*
5. (K4) *Να μπορείτε να ορθοκανονικοποιείτε ένα σύνολο διανυσμάτων με τη διαδικασία Gram-Schmidt. Να γνωρίζετε τι είναι η παραγοντοποίηση QR και πως προκύπτει από τη διαδικασία G-S.*

Κεφάλαιο 5 (Διαλέξεις 8)

1. (K5) Να γνωρίζετε τι είναι η ορίζουσα και το ίχνος, ιδιότητές τους για ένα μητρώο ή για συναρτήσεις μητρώων καθώς και εύκολες σχέσεις που αφορούν σε γινόμενα. *Να υπολογίζετε γρήγορα την ορίζουσα μέσω των τύπων που έχουν αναφερθεί, αξιοποιώντας τη δομή ή μορφή του μητρώου (π.χ. αν είναι μπλοκ άνω τριγωνικό ή αξιοποιώντας το ϑ . Sylvester).*

Κεφάλαια 6, 10 (Διαλέξεις 9,10,11)

1. (K6) Να γνωρίζετε τι είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μητρώου και να αναγνωρίζετε πως εμφανίζονται το ίχνος και η ορίζουσα στην δυναμομορφή του. Επίσης να γνωρίζετε το θεώρημα Cayley-Hamilton και τις εφαρμογές του στον υπολογισμό αντιστρόφου ή και δυνάμεων μητρώου.
2. (K6, K10) Να μπορείτε να προβλέψετε το είδος των ιδιοτιμών αν το μητρώο είναι πραγματικό ή αν είναι πραγματικό συμμετρικό ή μιγαδικό ερμιτιανό.
3. (K6) *Να μπορείτε να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα (δεξιά και αριστερά) ενός μητρώου (όποτε το πρόβλημα είναι αρκετά μικρό ή έχει ειδική δομή) ξεκινώντας από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (χωρίς να ξεχνάτε ότι ο τρόπος αυτός δεν ενδείκνυται στην πράξη).*

4. (K6) Να μπορείτε να γράψετε το μητρώο ως φασματικό ανάπτυγμα.
5. (K6) Να μπορείτε να προβλέψετε την συμπεριφορά υψηλών δυνάμεων ενός μητρώου μέσω των ιδιοτιμών.
6. (K6) Να γνωρίζετε πως λειτουργεί η μέθοδος δύναμης και πώς από τα ιδιοδιανύσματα μπορούμε να υπολογίσουμε ιδιοτιμές (πηλίκο Rayleigh).
7. (K6) Να γνωρίζετε (και να αναγνωρίζετε όποτε είναι εύκολα εφικτό μέσω των ιδιοτήτων) ότι ένα μητρώο είναι συμμετρικό ή ερμιτιανό θετικά ορισμένο και το πώς αυτό αποδεικνύεται για μητρώα του τύπου $B^T B$ όπου το B έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες.
8. (K6) Να γνωρίζετε τι σημαίνει ότι δύο μητρώα είναι όμοια, τι είναι μετασχηματισμός ομοιότητας και τι ορθογώνιος μετασχηματισμός ομοιότητας.
9. (K6) Να γνωρίζετε την έννοια της διαγωνιοποίησης μητρώου και τη σχέση των ιδιοδιανυσμάτων (δεξιών και αριστερών) με αυτή. Επίσης να μπορείτε να αναγνωρίζετε τα απλά μπλοκ Jordan και τη μορφή Jordan ενός μη διαγωνιοποιήσιμου μητρώου.
10. (K6) Να γνωρίζετε τι είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα και η γεωμετρική πολλαπλότητα (ιδιοτιμής), τότε μία ιδιοτιμή χαρακτηρίζεται ως απλή, ημιαπλή ή ελλειμματική και σε τι αφορούν τη διαγωνιοποίηση.
11. (K6) Σε ειδικές περιπτώσεις, να μπορείτε βάσει των στοιχείων ενός μητρώου να αποφανθείτε κατά πόσον είναι διαγωνιοποιήσιμο ή όχι.
12. (K6) Να γνωρίζετε τις βασικές παραγοντοποιήσεις (συμπεριλαμβανομένης και της Schur) και τις σχετικές συνθήκες που τις συνοδεύουν (δείτε το σχετικό πίνακα στις διαλέξεις και τις σελ. 693-695 του βιβλίου).
13. (K6-7) Να γνωρίζετε την παραγοντοποίηση SVD μητρώου καθώς και τις πληροφορίες που εξάγουμε από τους παράγοντες για το μητρώο και τους υποχώρους του. *Επίσης να μπορείτε να υπολογίσετε το SVD ή επιλεγμένα στοιχεία του (για μικρά ή ειδικά μητρώα).*
14. (K6) *Να γνωρίζετε να υπολογίζετε από το SVD βέλτιστες (ως προς τη νόρμα Frobenius) προσεγγίσεις του μητρώου με μητρώα μειωμένης τάξης.*

Κεφάλαιο 7 (Διαλέξεις 11,12)

1. (K7) Να γνωρίζετε τι είναι το ψευδοαντιστρόφο μητρώου και να μπορείτε να το υπολογίσετε (για μικρά ή ειδικά μητρώα).
2. (K7) Να αναγνωρίζετε αν ένας μετασχηματισμός είναι γραμμικός ή όχι και να βρίσκετε το μητρώο του μετασχηματισμού για τις βάσεις που έχουν δοθεί για το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών.
3. (K7) Να γνωρίζετε τι είναι πεδίο ορισμού, συμπεδίο, πεδίο τιμών και πυρήνας ενός γ.μ.
4. (K7) Να γνωρίζετε τους βασικούς γραμμικούς μετασχηματισμούς στον \mathbb{R}^2 (κλιμάκωση, ορθογώνια προβολή, περιστροφή, ανάκλαση, διάτμηση).