

# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

## Επαναληπτικές Ασκήσεις (40+10)

Ε. Στεφανόπουλος & Ε. Γαλλόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

2025 – 2026

## 1. Διανυσματικοί χώροι

### Άσκηση 1

Αν ο  $X$  είναι διανυσματικός χώρος επί του σώματος  $\mathbb{F}$ , και  $V$  και  $W$  είναι υπόχωροι του  $X$ , ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές; Θυμίζουμε ότι

$$V \subseteq X \text{ είναι υπόχωρος} \Leftrightarrow \text{για } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \text{ και } \lambda, \mu \in \mathbb{F} \text{ } \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in V.$$

$$V + W = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} : \mathbf{v} \in V \text{ και } \mathbf{w} \in W\}.$$

- ❶  $\{\lambda \mathbf{x} : \mathbf{x} \in V \text{ και } \lambda \in \mathbb{F}\} = V$
- ❷  $\{\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} : \mathbf{x} \in V, \mathbf{y} \in V \text{ και } \lambda \in \mathbb{F}, \mu \in \mathbb{F}\} = V + V = V.$
- ❸  $V + W$  είναι υπόχωρος του  $X$ .
- ❹  $V \cap W$  είναι υπόχωρος του  $X$ .
- ❺  $V \cup W$  είναι υπόχωρος του  $X$ .

Αντιπαράδειγμα για το 5.  $X = \mathbb{R}^3$ ,  $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ,  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\}.$

## Άσκηση 2

Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του  $\mathbb{R}^2$  είναι υπόχωροι του  $\mathbb{R}^2$ ;

1  $U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = x_2 \right\}.$

2  $U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : 2x_1 - x_2 = 1 \right\}.$

3  $U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}.$

4  $U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = 1 \right\}.$

5  $U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 = 0 \right\}.$

6  $U = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 x_2 = 1 \right\}.$

### Άσκηση 3

Να περιγραφούν όλοι οι υπόχωροι του  $\mathbb{R}^3$ .

**Λύση.**

- i Υπόχωροι διάστασης 0:  $\{\mathbf{0}\}$ .
- ii Υπόχωροι διάστασης 1: Όλες οι ευθείες που περνούν από την αρχή των αξόνων, δηλαδή με εξίσωση  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , με  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , ισοδύναμα

$$L = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right\} \quad \text{με } a \neq 0, \text{ ή } b \neq 0, \text{ ή } c \neq 0.$$

- iii Υπόχωροι διάστασης 2: Όλα τα επίπεδα που περιέχουν την αρχή των αξόνων, δηλαδή με εξίσωση  $ax + by + cz = 0$ , ισοδύναμα (αν  $c \neq 0$ )

$$W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}\right\}.$$

- iv Υπόχωροι διάστασης 3.  $\mathbb{R}^3$ .

#### Άσκηση 4

Αν  $W$  είναι το σύνολο των συναρτήσεων  $f \in \mathcal{C}[0, 1]$  με την ιδιότητα

$$\int_0^1 f(t) dt = 0,$$

είναι το  $W$  διανυσματικός υπόχωρος του  $\mathcal{C}[0, 1]$ ;

#### Άσκηση 5

Στο χώρο των πραγματικών  $3 \times 3$  μητρώων ποιο από τα παρακάτω υποσύνολα αποτελεί υπόχωρο του  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ;

❶  $M_1 = \{A : \text{trace } A = 0\}.$

❷  $M_2 = \{A : \det A = 0\}.$

#### Άσκηση 6

Εάν  $A$  είναι ένα  $m \times n$  μητρώο για ποια διανύσματα  $\mathbf{b}$  οι λύσεις του συστήματος  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  αποτελούν διανυσματικό υπόχωρο του  $\mathbb{R}^n$ ;

## 2. Γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, βάση

### Άσκηση 7

Να βρεθεί μια βάση για το επίπεδο-υπόχωρο του  $\mathbb{R}^3$  με εξίσωση  $3x - 2y - z = 0$ .

### Άσκηση 8

**Σωστό ή Λάθος;** Εάν  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου τότε

- |   |                                                                                                                       |                    |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| 1 | Τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.                                                            | $\Sigma$ $\Lambda$ |
| 2 | Τα $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.                              | $\Sigma$ $\Lambda$ |
| 3 | Τα $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. | $\Sigma$ $\Lambda$ |

### Άσκηση 9

Εάν  $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$  είναι ένα **ορθοκανονικό σύνολο** σε διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , δείξτε ότι το σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

### 3. Επίλυση συστημάτων, Μητρώα

Εάν  $A$  είναι ένα  $n \times m$  μητρώο ( $n$  γραμμές,  $m$  στήλες), γράφουμε

$$A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_m), \quad \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Ορίζουμε

- ❶ **Εικόνα** του  $A$  :  $\text{range } A = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = A\mathbf{x} \text{ για κάποιο } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}.$
- ❷ **Μηδενόχωρος** του  $A$  :  $\text{null } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$
- ❸ **Χώρος στηλών** του  $A$  :  $C(A) = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$
- ❹ **Χώρος γραμμών** του  $A$  :  $R(A) = C(A^T) \subseteq \mathbb{R}^m.$

Αν  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  και  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_m x_m = \mathbf{b}.$$

Συμπέρασμα

#### Θεώρημα 1

Το σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  έχει λύση αν και μόνο αν  $\mathbf{b} \in \text{range } A = C(A).$

## Άσκηση 10

**Σωστό ή Λάθος;** Εάν  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4)$  το σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$  έχει λύση.

## Άσκηση 11 (Τάξη μητρώου)

Εάν  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  τί εννοούμε λέγοντας  $\text{rank } A$ ;

- 1  $\dim(\text{null } A)$ .
- 2  $\dim(\text{range } A)$ .
- 3  $\min\{n, m\}$ .

## Άσκηση 12

**Σωστό ή Λάθος;** Το παρακάτω σύστημα έχει λύση για κάθε  $\xi$  αν και μόνο αν η τάξη του μητρώου είναι ίση με 3.  $\Sigma \quad \Lambda$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$



### Άσκηση 13

Έστω

$$A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_m), \quad \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Εάν  $\mathbf{b}$  είναι μη μηδενικό διάνυσμα του  $\mathbb{R}^n$  και  $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{b} \rangle = 0$  για κάθε  $j = 1, 2, \dots, m$ , δείξτε ότι το σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  δεν έχει λύση.

### Άσκηση 14

**Σωστό ή Λάθος;** Έστω  $A$  ένα τετραγωνικό μητρώο. Το σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

- |   |                                                   |          |           |
|---|---------------------------------------------------|----------|-----------|
| 1 | Έχει μοναδική λύση.                               | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| 2 | Έχει ή δεν έχει λύση ανάλογα τα $A, \mathbf{b}$ . | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| 3 | Έχει λύση αλλά όχι μοναδική.                      | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| 4 | Έχει λύση μόνο για $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .    | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| 5 | Έχει λύση για όλα τα $\mathbf{b}$ .               | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| 6 | Έχει λύση μόνο για μερικά $\mathbf{b}$ .          | $\Sigma$ | $\Lambda$ |

### Λύση της Άσκησης 13.

Το σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  έχει λύση αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές  $x_1, x_2, \dots, x_m$  ώστε

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b}.$$

Από την τελευταία σχέση παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με το διάνυσμα  $\mathbf{b}$  και έχουμε διαδοχικά

$$\langle x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$$

$$x_1 \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b} \rangle + x_2 \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle + \dots + x_m \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{b}\|^2$$

$$0 = \|\mathbf{b}\|^2$$

αφού  $\langle \mathbf{a}_j, \mathbf{b} \rangle = 0$  για  $j = 1, 2, \dots, m$ . Από την τελευταία σχέση και τις ιδιότητες της νόρμας, έπεται ότι  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ . Κατά συνέπεια το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , οπότε για  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  το σύστημα είναι αδύνατο.

**Σημείωση.** Αν τα  $\mathbf{a}_j$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε

$$\mathbf{b} \in (\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\})^\perp$$

οπότε  $m < n$  και  $\text{rank } A = m$ .

## Θεώρημα 2 (Θεμελιώδες Θεώρημα)

Εάν  $A$  είναι ένα  $n \times m$  μητρώο τάξης  $r$ , τότε

- 1  $\dim(\text{null } A) = m - r.$
- 2  $\dim(\text{null } A^T) = n - r.$
- 3  $\mathbb{R}^m = \text{null } A \oplus \text{range } A^T$  επιπλέον  $(\text{null } A)^\perp = \text{range } A^T.$
- 4  $\mathbb{R}^n = \text{null } A^T \oplus \text{range } A$  επιπλέον  $(\text{range } A)^\perp = \text{null } A^T.$

## Άσκηση 15

**Σωστό ή Λάθος;** Έστω  $A$  ένα  $n \times n$  μητρώο. Το σύστημα  $Ax = b$  έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν

- |                               |                    |
|-------------------------------|--------------------|
| 1 $\dim(\text{null } A) = 0.$ | $\Sigma$ $\Lambda$ |
| 2 $\dim(\text{null } A) = n.$ | $\Sigma$ $\Lambda$ |
| 3 $\text{rank } A = n.$       | $\Sigma$ $\Lambda$ |
| 4 $\det A = 0.$               | $\Sigma$ $\Lambda$ |

Τί μπορεί να ειπωθεί αν  $\det A = 0$ ;

## Άσκηση 16

Αν για το μητρώο  $A$  το  $R$  είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο στηλών  $\text{range } A$  του  $A$ .
- 2 Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενόχωρο  $\text{null } A$  του  $A$ .
- 3 Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο γραμμών  $\text{range } A^T$  του  $A$ .
- 4 Ποιά είναι η διάσταση του αριστερού μηδενόχωρου  $\text{null } A^T$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- 5 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

### Άσκηση 17

Δίνεται το μητρώο  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Δίχως να εκτελέσετε τη διαδικασία της απαλοιφής επιλέξτε ποιο από τα παρακάτω μητρώα είναι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του  $A$ .

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Άσκηση 18

Είναι το μητρώο  $A$  σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## Άσκηση 19

Για ποιές τιμές της παραμέτρου  $a$  είναι το μητρώο

$$A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & a & a \\ 8 & 7 & a \end{pmatrix}$$

μη αντιστρέψιμο;

## Άσκηση 20

Δίνεται το μητρώο

$$A(b) = \begin{pmatrix} 3-b & 2 & b^2 \\ 0 & b+2 & b-2 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

- ❶ Για ποιες τιμές της παραμέτρου  $b$  το  $A(b)$  είναι μη αντιστρέψιμο.
- ❷ Να βρεθούν τιμές του  $b$  ώστε το 0 να είναι ιδιτιμή του  $A$ .

## 4. Ορίζουσες

### Άσκηση 21

Εάν  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2$ , τότε υπολογίστε

$$1 \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$2 \quad \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 & 2a_3 \\ 2b_1 & b_2 & 2b_3 \\ 2c_1 & c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} =$$

$$3 \quad \begin{vmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 \end{vmatrix} =$$

$$4 \quad \begin{vmatrix} a_1 & 3a_3 & a_2 \\ 2b_1 & 6b_3 & 2b_2 \\ c_1 & 3c_3 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$5 \quad \begin{vmatrix} 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \\ 2c_1 + b_1 & 2c_2 + b_2 & 2c_3 + b_3 \\ b_1 - 3c_1 & b_2 - 3c_2 & b_3 - 3c_3 \end{vmatrix} =$$

$$6 \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ 2b_1 & 2b_1 & 2b_1 \\ c_1 & c_1 & c_1 \end{vmatrix} =$$

### Άσκηση 22

Σωστό ή Λάθος; Εάν  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- |                                       |       |
|---------------------------------------|-------|
| ❶ $\det(\lambda A) = \lambda \det A.$ | Σ   Λ |
| ❷ $\det(AB) = (\det A)(\det B).$      | Σ   Λ |
| ❸ $\det(A + B) = \det A + \det B.$    | Σ   Λ |

### Άσκηση 23

Σωστό ή Λάθος; Εάν  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- |                                                                           |       |
|---------------------------------------------------------------------------|-------|
| ❶ $\text{rank } A < n \Leftrightarrow \det A = 0.$                        | Σ   Λ |
| ❷ $\text{rank } A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0.$                     | Σ   Λ |
| ❸ Αν $\text{rank } A < n$ , το σύστημα $Ax = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις. | Σ   Λ |

### Άσκηση 24

$$\det \begin{pmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$



## Άσκηση 25

Υπολογίστε την ορίζουσα του  $n \times n$  μητρώου

$$J_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix},$$

όπου τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδενικά.

**Υπόδειξη:** Διακρίνετε τις περιπτώσεις  $n = \text{άρτιο}$  και  $n = \text{περιπτό}$ .

## Άσκηση 26

Έστω ότι  $A = (a_{ij})$  είναι ένα  $n \times n$ ,  $n > 1$  μητρώο

- 1 Εάν  $a_{ij} = ij$ , δείξτε ότι  $\det A = 0$ .
- 2 Εάν  $a_{ij} = i + j$ , δείξτε ότι  $\det A = 0$ .
- 3 Εάν το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι ίσο με μηδέν, δείξτε ότι  $\det A = 0$ .

### Θεώρημα 3 (Ορθογώνια μητρώα)

Εάν  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

- 1 Το  $A$  είναι ορθογώνιο μητρώο.
- 2 Οι στήλες του  $A$  αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο.
- 3  $A^T A = I$ .
- 4 Το  $A$  αντιστρέφεται και  $A^{-1} = A^T$ .
- 5  $AA^T = I$ .
- 6 Οι γραμμές του  $A$  αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο.

### Άσκηση 27

Εάν το  $A$  είναι ορθογώνιο, τότε  $\det A = \pm 1$ .

### Άσκηση 28

Ποιο από τα παρακάτω μητρώα είναι ορθογώνιο;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 5. Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση

### Άσκηση 29

Δίνεται το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1 Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_A(\lambda)$ .
- 2 Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του  $A$ .
- 3 Να βρεθούν οι ιδιόχωροι του  $A$ .
- 4 Εξετάστε αν για κάποιες σταθερές  $\lambda$  και  $\mu$  ισχύει  $A^2 = \lambda A + \mu I$ .
- 5 Εξετάστε αν το  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμο.

Υπόδειξη στο 5. Αν  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι οι ιδιοτιμές του  $A$  με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα  $\xi_1, \xi_2$ , τότε

$$A(\xi_1 \ \xi_2) = (\xi_1 \ \xi_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

### Άσκηση 30

Εάν  $A$  είναι ένα  $n \times m$  μητρώο,  $\xi = (1 \ 2 \ \cdots \ m)^T$  και

$$A\xi = \mathbf{0},$$

τότε το  $\xi$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $A$ ;

### Άσκηση 31

Ένα  $3 \times 3$  μητρώο  $A$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  και  $\lambda_3 = 2$  με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1 Είναι το μητρώο  $A$  αντιστρέψιμο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- 2 Είναι το μητρώο  $A$  διαγωνοποιήσιμο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- 3 Να βρεθεί το μητρώο  $A$ .

### Άσκηση 32

Εάν το μητρώο  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμο

- ❶ είναι το  $A^{-1}$  διαγωνοποιήσιμο;      ❷ είναι το  $A^T$  διαγωνοποιήσιμο;

### Άσκηση 33

Εάν κάθε ιδιοτιμή ενός μητρώου  $A$  έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ένα είναι το  $A$  διαγωνοποιήσιμο;

## 6. Γραμμικοί μετασχηματισμοί

### Άσκηση 34

**Σωστό ή Λάθος;** Ο μετασχηματισμός  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με

- ❶  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  είναι γραμμικός.      ❷  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 x_3 + 1 \end{pmatrix}$  είναι γραμμικός.
- ❸  $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  είναι γραμμικός.

### Άσκηση 36

Να βρεθεί το μητρώο που παριστάνει τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 \\ x_1 + x_3 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

### Άσκηση 37

Άσκηση 24. Αν

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

να βρεθούν τα

- 1  $\text{image}(T)$ .
- 2  $\text{kernel}(T)$ .

## 7. Προβολές

### Άσκηση 38

**Σωστό ή Λάθος;** Έστω  $P$  το μητρώο ορθογώνιας προβολής επί του επιπέδου  $\Pi$  με εξίσωση  $x + 2y + 3z = 0$  στον  $\mathbb{R}^3$ .

- |   |                                                                                      |          |           |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| 1 | $P^T = P$ .                                                                          | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| 2 | $P^2 = P$ .                                                                          | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| 3 | $\det P = \pm 1$ .                                                                   | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| 4 | Το $P$ είναι ορθογώνιο.                                                              | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| 5 | $\text{rank } P = 2$ .                                                               | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| 6 | Το σύστημα $P\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , όπου $\mathbf{b} = (1 \ 2 \ 3)^T$ έχει λύση. | $\Sigma$ | $\Lambda$ |
| 7 | $\text{null } P = \Pi^\perp$ .                                                       | $\Sigma$ | $\Lambda$ |

### Άσκηση 39

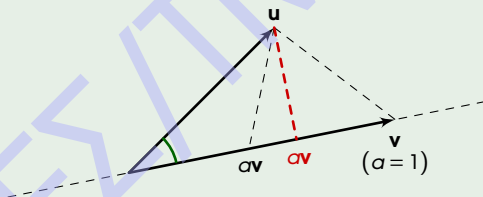
Έστω  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  να είναι η ορθογώνια προβολή του  $\mathbb{R}^3$  επί του επιπέδου  $W$  με εξίσωση  $x + y + z = 0$ . Να βρεθεί ο τύπος του  $T$ .

## 8. Ελάχιστα τετράγωνα

### Άσκηση 40

Αν  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  είναι μη μηδενικά διανύσματα του  $\mathbb{R}^3$ , όπως στο σχήμα, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός  $a$  για τον οποίο η απόσταση μεταξύ  $\mathbf{u}$  και  $a\mathbf{v}$  είναι η ελάχιστη δυνατή, ισοδύναμα να βρεθεί το

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|.$$





## 9. Διάφορες Ασκήσεις

- 1 Εάν το  $A$  είναι  $4 \times 4$  μητρώο τι μπορεί να ειπωθεί αν  $\text{rank } A < 4$ ;
- 2 Εάν  $\text{rank } A = \text{rank } A^T$ , είναι το  $A$  είναι τετραγωνικό;
- 3 Εάν το  $A$  είναι  $3 \times 3$  μητρώο τι μπορεί να ειπωθεί αν

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}?$$

- 4 Εάν το  $A = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3)$  είναι ένα  $3 \times 3$  ορθογώνιο μητρώο, τότε

$$A^T \mathbf{u}_1 =$$

- 5 Εάν το  $A = (\mathbf{u}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_n)$  είναι ένα  $n \times n$  πραγματικό, αντιστρέψιμο μητρώο,  $A^{-1}A = I$  και  $A_{1*}^{-1}$  είναι η πρώτη γραμμή του  $A^{-1}$ , τότε

$$\langle A_{1*}^{-1}, \mathbf{u}_j \rangle = \quad j = 1, \dots, n,$$

όπου  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.  $\square$

- 6 Εάν  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  και  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  είναι δύο βάσεις του  $\mathbb{R}^3$  και  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός με  $T(\mathbf{u}_j) = \mathbf{v}_j$ , για  $j = 1, 2, 3$  ποιο είναι το μητρώο αναπαράστασης του  $T$  ως προς τις δύο βάσεις;

- 7 Εάν τα  $A, B, C$  είναι  $n \times n$  μητρώα και

$$(A - B)C = I$$

να εκφραστεί το  $B$  μέσω των  $A$  και  $C$ .

- 8 Στο  $\mathbb{R}^3$  ποιο είναι το μητρώο προβολής επί του  $xy$ -επιπέδου;
- 9 Έστω  $X$  ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  και επαγόμενη νόρμα  $\| \cdot \|$ . Δείξτε ότι

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$$

για όλα τα  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$  στο  $X$ .

- 10 Δίνεται το επιπέδο  $E$  με εξίσωση  $x + y + z = 1$ .
- i Είναι το  $E$  διανυσματικός υπόχωρος του  $\mathbb{R}^3$ ;
  - ii Ποιο είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $E$ ;