Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΓΕΚΕΣ 6 Φεβρουαρίου 2026

Συμπληρώστε τα στοιχεία σας.	
ΕΠΩΝΥΜΟ :	ΟΝΟΜΑ :
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ :	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ :
ΑΙΘΟΥΣΑ : ΑΦΕ ΣΤΗΛΗ :	ΜΟΝΑΔΕΣ:

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν ερωτήσεις

- του τύπου Σωστό/Λάθος ή πολλαπλής επιλογής και καλείσθε, μετά από ένα σύντομο έλεγχο να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση
- με την ένδειξη ■ στα οποία πρέπει να δώσετε, δίχως αιτιολόγηση, την τελική απάντηση ή λύση, μετά από σχετική προεργασία στο πρόχειρο
- δίχως κάποια ένδειξη στα οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο στο χώρο που παρέχεται.

Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται και σε κάποιες επιβάλλεται να "δουλέψετε" κάθε ερώτημα ή υποερώτημα στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 15 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 1 ώρα μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Καλή Επιτυχία!

Λύσεις και Σχόλια σε μια από τις διαφορετικές παραλλαγές του διαγωνίσματος

Σχόλιο. Στην πρώτη σελίδα που συμπληρώνετε τα στοιχεία σας, στο ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ συμπληρώνουν μερικοί/μερικές 1ο. Δηλαδή οι φοιτητές αυτοί ή οι φοιτήτριες εισήχθησαν στο CEID την ίδια χρονιά που στο ανατολικό άκρο της Μεσογείου, σύμφωνα με θρησκευτικές πηγές, ο Ιησούς ερχόταν στο κόσμο. Τι να ευχηθούμε στο CEID που ζει και μεγαλουργεί 2.000 plus χρόνια! Να τα 10^6ήσεις CEID.

Θ1. ■ Εάν

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

να βρεθεί η διάσταση των D, E, G, H ώστε η αντίστοιχη πράξη να ορίζεται

(α΄) $AA^{\mathrm{T}}D$ — Η διάσταση του D είναι $3 \times n$

(β΄) AEC — Η διάσταση του E είναι 1×2

(γ΄) GAB^{T} — Η διάσταση του G είναι $n \times 3$

(δ΄) $A^{\mathrm{T}}HB$ — Η διάσταση του H είναι 3×3

Θυμίζεται ότι αν το μητρώο P είναι $m \times n$ και το Q είναι ένα άλλο μητρώο το PQ ορίζεται αν και μόνο αν το Q είναι $n \times k$, όπου k είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός. Έτσι για παράδειγμα στο (β) έχουμε για το AEC $(3 \times 1)(\cdot \times \cdot)(2 \times 3)$, επομένως το E είναι 1×2.

Θ2. Δίνεται το υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : 3x - y = 0 \right\}.$$

(α΄) Γράψτε το U ως το διάνοιγμα κάποιου συνόλου, ισοδύναμα $U = \mathrm{span}\{\cdots\}$.
Αν $\mathbf{u} \in U$, τότε

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

με $x \in \mathbb{R}$, επομένως

$$U = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(β΄) Το U είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Σ Λ
ως διάνοιγμα συνόλου διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$.

(γ΄) Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $U^{\perp}$ του U.
Αν

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in U^{\perp},$$

τότε

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow p + 3q + 0 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3q \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

επομένως

$$U^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} -3q \\ q \\ r \end{pmatrix} : q, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

(δ΄) Να βρεθεί μια βάση για τον υπόχωρο $U^\perp$.

Επειδή

$$\begin{pmatrix}-3q\\ q\\ r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3q\\ q\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ r\end{pmatrix}=q\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

έπεται ότι μια βάση για τον $U^\perp$ είναι η

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\} \tag{1}$$

αφού τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον $U^\perp$.

Δουλεύουμε με διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Σημειώνουμε ότι $\dim U = 1$ οπότε $\dim U^\perp = 2$, αφού $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$. Μια βάση είναι ένα ΣΥΝΟΛΟ διανυσμάτων και δηλώνεται όπως στην (1). Τα

$$\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \text{ή} \qquad \begin{pmatrix}-3 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ΔΕΝ είναι βάσεις, για να συνεννοούμαστε.

Θ3. Εάν

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=-3,$$

να βρεθεί/βρεθούν η/οι τιμή/τιμές του μ ώστε

$$\begin{vmatrix}\mu c_1 & \mu c_2 & \mu c_3\\ \mu a_1-b_1 & \mu a_2-b_2 & \mu a_3-b_3\\ -b_1 & -b_2 & -b_3\end{vmatrix}=12$$

Υπόδειξη: Στον υπολογισμό χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες της ορίζουσας.

Από τις ιδιότητες της ορίζουσας έχουμε

$$\begin{aligned}12 &= \begin{vmatrix}\mu c_1 & \mu c_2 & \mu c_3\\ \mu a_1-b_1 & \mu a_2-b_2 & \mu a_3-b_3\\ -b_1 & -b_2 & -b_3\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}\mu c_1 & \mu c_2 & \mu c_3\\ \mu a_1 & \mu a_2 & \mu a_3\\ -b_1 & -b_2 & -b_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\mu c_1 & \mu c_2 & \mu c_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ -b_1 & -b_2 & -b_3\end{vmatrix} && \text{(γραμμικότητα)}\\
&= -\mu^2\begin{vmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}-0 && \text{(γραμμικότητα \& εξάρτηση γραμμών)}\end{aligned}$$

μ από την 1η γραμμή, μ από την 2η και -1 από την 3η

$$\begin{aligned}&= \mu^2\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} && \text{(εναλλαγή δύο γραμμών)}\\
&= -\mu^2\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} && \text{(εναλλαγή δύο γραμμών)}\\
&= -\mu^2(-3)\end{aligned}$$

επομένως

$$3\mu^2 = 12 \Rightarrow \mu = \pm 2.$$

Θ4. Ένα 3×3 μητρώο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = 1$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(α΄) ■ trace $A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2 + 1 + 1 = 0$

(β΄) Το μητρώο A είναι αντιστρέψιμο. Σ Λ

αφού το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του

(γ΄) ■ rank $A = 3$

αφού $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2 \neq 0$

(δ΄) Το μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο. Σ Λ

αφού τα ιδιοδιανύσματα του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Τα (β΄) και (γ΄) είναι ισοδύναμα. Σε μια παραλλαγή τα ιδιοδιανύσματα ΔΕΝ ήταν γραμμικά ανεξάρτητα.

Θ5. Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι δύο **ορθοκανονικά** διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$ και $\mathbf{w}$ είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$ να βρεθούν οι σταθερές a και b για τις οποίες η απόσταση $\|\mathbf{w} - a\mathbf{u} - b\mathbf{v}\|$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

Αν $\tilde{\mathbf{w}}$ είναι η προβολή του $\mathbf{w}$ επί του επιπέδου που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ και αν $\mathbf{x}$ είναι οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα αυτού του επιπέδου (επομένως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$), τότε

$$\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\| < \|\mathbf{w} - \mathbf{x}\|.$$

Επειδή

$$\tilde{\mathbf{w}} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v},$$

η δοσμένη νόρμα ελαχιστοποιείται αν

$$a = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle, \qquad \text{και} \qquad b = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle.$$

Θ6. Δίνεται το μητρώο

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

(α΄) Να βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του M.

$$M \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_0$$

(β΄) Να βρείτε μια βάση για την εικόνα (range M) του M.

Μια βάση του range M (που είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$) αποτελείται από τα διανύσματα-στήλες ΤΟΥ M που περιέχουν τους οδηγούς, έτσι μια βάση αποτελούν οι δύο πρώτες στήλες ΤΟΥ M, ισοδύναμα

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

(γ΄) Να βρείτε μια βάση για το μηδενόχωρο (null M) του M.

Ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ ανήκει στο μηδενόχωρο του M αν και μόνο αν είναι λύση του συστήματος $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ισοδύναμα του $R_0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Έτσι, από την ανηγμένη μορφή, έχουμε

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

όπου $x_3 \in \mathbb{R}$, έτσι μια βάση του μηδενόχωρου είναι η

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(δ΄) Το σύστημα $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις. Σ Λ

από το (β΄).

(ε΄) ΚΥΚΛΩΣΤΕ ΤΟ ΣΩΣΤΟ. Αν το M είναι όπως πριν και ορίσουμε

$$N = M - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

και αν $\mathbf{b}$ είναι ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$, το σύστημα $N\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει

i. Καμία λύση

ii. Μοναδική λύση

iii. Άπειρες λύσεις

iv. Άλλοτε έχει λύση, άλλοτε δεν έχει

Υπολογίζουμε

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

και το μητρώο είναι άνω τριγωνικό με μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο, άρα είναι αντιστρέψιμο, κατά συνέπεια το σύστημα $N\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση, την $\mathbf{x} = N^{-1}\mathbf{b}$.

Είναι απορίας άξιο πως κάποιοι/κάποιες από εσάς επιλέγουν την απάντηση στο (ε΄) ΔΙΧΩΣ να υπολογίσουν το μητρώο N. Παιδιά, μαθηματικά γράφουμε δεν ρίχνουμε ζάρια ούτε παίζουμε κουλοχέρη.

Τα προβλήματα 1, 2, 3 και 5 είναι βασικά και δεν νοείται κάποιος/κάποια που εξετάζεται στη Γραμμική Άλγεβρα να μη ξέρει πως λύνονται. Είναι σαν να θέλεις να παίξεις σκάκι και δεν γνωρίζεις πως κινείται το άλογο, ο πύργος, ο αξιωματικός, ή η βασίλισσα!

Θ7. Έστω $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ και έστω $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ δύο βάσεις για τον $\mathbb{R}^3$, και έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε

$$F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_2, \qquad F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \qquad F(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3.$$

(α΄) ■ Το μητρώο αναπαράστασης A του F ως προς τις βάσεις $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι το

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Οι ΣΤΗΛΕΣ του A αποτελούνται από τους συντελεστές, αντίστοιχα, των διανυσμάτων $F(\mathbf{u}_1)$, $F(\mathbf{u}_2)$, $F(\mathbf{u}_3)$ εκφρασμένων στη βάση $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(β΄) Αν $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 + \gamma\mathbf{u}_3$ εκφράστε το $F(\mathbf{x})$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
Από τη γραμμικότητα του F υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= F(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 + \gamma\mathbf{u}_3) \\ &= \alpha F(\mathbf{u}_1) + \beta F(\mathbf{u}_2) + \gamma F(\mathbf{u}_3) \\ &= \alpha\mathbf{v}_2 + \beta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + \gamma(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) \\ &= \beta\mathbf{v}_1 + (\gamma - \beta)\mathbf{v}_2 + (\beta - \gamma)\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

(γ΄) ■ $\mathrm{Image}(T) = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^3$,
αφού από το (β΄) κάθε $F(\mathbf{x})$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός και των τριών στοιχείων της βάσης $\mathcal{V}$ του $\mathbb{R}^3$.
Η εικόνα (Image) όπως φανερώνει η λέξη είναι σύνολο και μάλιστα υπόχωρος και όχι αριθμός όπως εμφανίστηκε σε ουκ ολίγα γραπτά.

(δ΄) ■ Μια βάση για την εικόνα $\mathrm{Image}(T)$ είναι η $\mathcal{B} = \mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
από το (γ΄).
Υπάρχουν προφανώς και άλλες βάσεις αλλά η παραπάνω είναι η προφανής επιλογή που προκύπτει από τα δεδομένα του προβλήματος.

(ε΄) Υπάρχει $b \in \mathbb{R}^3$ ώστε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ δεν έχει λύση. Σ Λ
αφού $\mathrm{range}\, A = \mathrm{Image}(T) = \mathbb{R}^3$.

Θ8. Έστω ότι το $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι το μητρώο ορθογώνιας προβολής επί ενός διδιάστατου υπόχωρου W του $\mathbb{R}^3$. Επιλέξτε κυκλώνοντας το σωστό χαρακτηρισμό για τον ισχυρισμό.

(α΄) Το αντίστροφο μητρώο P^{-1} υπάρχει. Σ Λ
αφού $\mathrm{rank}\, P = 2 = \dim W$.

(β΄) Υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ώστε $P\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Σ Λ
αν $\mathbf{v} \in W^\perp$, τότε $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ και $P\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(γ΄) $P^{\mathrm{T}} = P$. Σ Λ
Το μητρώο P είναι μητρώο ορθογώνιας προβολής αν και μόνο αν $P^2 = P$ και $P^{\mathrm{T}} = T$.

(δ΄) Το μητρώο P είναι ορθογώνιο. Σ Λ
Το P προβάλλει επί του διδιάστατου υπόχωρου W, επομένως έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, $C(P) = W$, ενώ οι στήλες ορθογώνιου μητρώου αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(ε΄) Αν P' είναι το μητρώο της ορθογώνιας προβολής του $\mathbb{R}^3$ επί του $\mathbb{R}^3$, τότε το P' είναι το ταυτοτικό μητρώο. Σ Λ

Το P προβάλλει επί του $\mathbb{R}^3$ κατά συνέπεια έχει τρεις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, που είναι η βάση του χώρου στηλών του P, επομένως υπάρχει το αντίστροφο μητρώο, έτσι έχουμε

$$P^2 = P \Rightarrow P^{-1}P^2 = P^{-1}P \Rightarrow P = I.$$

(ϛ΄) ■ ΣΚΕΨΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ. Αν $\tilde{P}$ είναι το μητρώο ορθογώνιας προβολής του $\mathbb{R}^3$ επί του x-άξονα (υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$) ποιος είναι ο μηδενόχωρος του $\tilde{P}$;

Επειδή

$$\tilde{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

έπεται ότι

$$\tilde{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = 0$$

κατά συνέπεια

$$\text{null}\,\tilde{P} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} = yz\text{-επίπεδο}.$$

Διαφορετικά από την εξήγηση στο (β΄) αν $\mathbf{x} \in X^{\perp}$, όπου X είναι ο x-άξονας, τότε $\tilde{P}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και αντιστρόφως, κατά συνέπεια null $\tilde{P} = X^{\perp} = yz$-επίπεδο.

Αγαπητά μου παιδιά, λέγεται ότι τα μαθηματικά είναι η γλώσσα του σύμπαντος με την έννοια ότι οι νόμοι της φύσης εκφράζονται με μαθηματικές σχέσεις. Σε αντίθεση όμως με τις άλλες γλώσσες όπου προκειμένου να εκφραστείς μπορείς να ¨γεμίζεις¨ τα κενά με χειρονομίες, ή ζωγραφιές η αυστηρότητα των μαθηματικών δεν επιτρέπει κάτι ανάλογο. Φροντίστε να κατανοήσετε τις νέες έννοιες που συναντήσατε στο μάθημα, που έτσι κι αλλιώς θα σας συντροφεύουν στο υπόλοιπο των σπουδών σας και όχι μόνο. Ειδικά τη Γραμμική Άλγεβρα θα τη βρίσκετε είτε όπως την είδατε είτε μεταμφιεσμένη σε πολλά άλλα αντικείμενα των σπουδών σας, ή ακόμα και στην υπόλοιπη ζωή σας αν αποφασίσετε να ακολουθήσετε μια σχετική πορεία. Τώρα είναι η ώρα να πάρετε το proficiency ή έστω το lower.