Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΓΕΣ 18 Ιουνίου 2024

Συμπληρώστε τα στοιχεία σας και **κυκλώστε** το έτος εισαγωγής σας στο τμήμα.

ΕΠΩΝΥΜΟ :	ΔΙΑΒΑΣΜΕΝΟΣ	ΟΝΟΜΑ :	ΑΡΙΣΤΟΣ
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ :		ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ :	20....

ΑΙΘΟΥΣΑ :	ΣΤΗΛΗ :	ΜΟΝΑΔΕΣ:	154

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν ερωτήσεις

- του τύπου "Σωστό/Λάθος" ή πολλαπλής επιλογής και καλείσθε, μετά από ένα σύντομο έλεγχο να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση. (4 μονάδες η καθεμιά.)
- με την ένδειξη ■ στα οποία πρέπει να δώσετε, δίχως αιτιολόγηση, την τελική απάντηση ή λύση, μετά από σχετική προεργασία στο πρόχειρο. (5 μονάδες η καθεμιά.)
- δίχως κάποια ένδειξη στα οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο στο χώρο που παρέχεται. (6 μονάδες η καθεμιά.)

τα οποία απαρτίζουν 10 Θέματα. Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται και σε κάποιες επιβάλλεται να "δουλέψετε" κάθε ερώτημα ή υποερώτημα στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 15 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει μία ώρα μετά από την έναρξη της εξέτασης. Μαζί με το γραπτό παραδίδετε υπογεγραμμένο και το φύλλο Α4.

Καλή Επιτυχία!

Λύσεις και Σχόλια

Θ1. Δίνεται ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = y \text{ και } x + y - z = 0 \right\}.$$

(α') Να βρεθεί μια βάση για τον V.

Επειδή $y = x$ και $z = x + y = 2x$, τότε

$$V \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$, έτσι μια βάση για τον V είναι η

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(β') Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ του V.

Το V είναι η ευθεία που παράγεται από το διάνυσμα της $\mathcal{B}$. Για το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ θα έχουμε ότι $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^3$, κατά συνέπεια το $V^\perp$ είναι επίπεδο. Αν $(a \ \ b \ \ c)^{\mathrm{T}} \in V^\perp$, τότε

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a + b + 2c = 0 \Leftrightarrow a = -b - 2c, \tag{1}$$

έτσι

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - 2c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Τα τελευταία δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα μια βάση για το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ είναι η

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Σημειώνουμε ότι η βάση $\mathcal{B}'$ δεν είναι μοναδική, για παράδειγμα αν λύσουμε στην (1) ως προς b, ή ως προς c θα προκύψουν διαφορετικές βάσεις.

Θ2. Αν A είναι ένα 3×3 **μητρώο ορθογώνιας προβολής** επί ενός διδιάστατου υπόχωρου W του $\mathbb{R}^3$, τότε

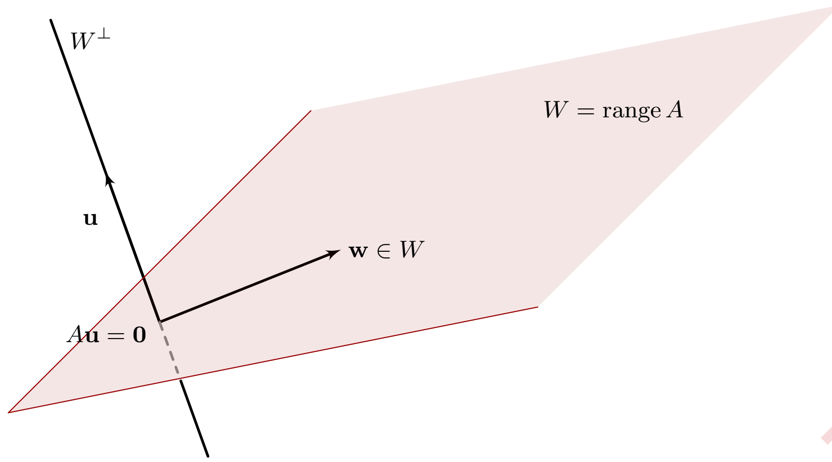
Το μητρώο A προβάλλει επί του επιπέδου W (διδιάστατου υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$), ισοδύναμα για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $A\mathbf{x} \in W$, κατά συνέπεια

(α') ■ $\operatorname{range} A = W$.

Το $\operatorname{range} A = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$ είναι **υπόχωρος** του $\mathbb{R}^3$, είναι το σύνολο των εικόνων όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ μέσω του A. Απαντήσεις του τύπου $\operatorname{range} A = 2$, ή 3 δείχνουν ότι κάτι δεν πάει καλά. Ο ορισμός του $\operatorname{range} A$ θα μπορούσε να βρίσκεται στο ¨σκονάκι¨.

(β') $\operatorname{null}(A^2 - A) = \mathbb{R}^3$. Σ Λ

Αν $\mathbf{x} \in \operatorname{null}(A^2 - A)$, τότε $(A^2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, το οποίο ισχύει για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ αφού το A είναι μητρώο προβολής ($A^2 = A$).



(γ′) ■ $\text{null}\, A = W^{\mathrm{T}}$

Η ευθεία $W^{\perp}$ προβάλλεται μέσω του A στο διάνυσμα $\mathbf{0}$. Επιπλέον κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ γράφεται ως $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^{\perp}$, όπου $\mathbf{w} \in W$ και $\mathbf{w}^{\perp} \perp \mathbf{w}$ αφού $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp}$, έτσι

$$A\mathbf{x} = A(\mathbf{w} + \mathbf{w}^{\perp}) = A\mathbf{w} + A\mathbf{w}^{\perp} = \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w},$$

κατά συνέπεια $\mathbf{x} \in \text{null}\, A$ αν και μόνο αν δεν έχει W-συνιστώσα, ισοδύναμα $\mathbf{x} \in W^{\perp}$.

(δ′) Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις. Σ Λ

Για κάθε $\mathbf{u} \in W^{\perp}$ είναι $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(ε′) ■ $\text{rank}\, A = \dim(\text{range}\, A) = \dim(W) = 2$.

(ϛ′) Αν το $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ είναι διάνυσμα στο $W^{\perp}$, τότε είναι ιδιοδιάνυσμα του A. Σ Λ

Αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ είναι διάνυσμα στο $W^{\perp}$, τότε $A\mathbf{x} = \mathbf{0} = 0\mathbf{x}$, ισοδύναμα κάθε $\mathbf{x} \in W^{\perp}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή $\lambda = 0$.

Θ3. Αν

$$A = \begin{pmatrix} 3-\rho & 2 & -\rho \\ 0 & \rho & \rho-1 \\ 0 & 0 & \rho-2 \end{pmatrix},$$

όπου ρ είναι μια πραγματική παράμετρος, να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A.

Το A είναι τριγωνικό κατά συνέπεια οι ιδιοτιμές του είναι τα στοιχεία της διαγωνίου, έτσι

$$\lambda_1 = 3 - \rho, \quad \lambda_2 = \rho, \quad \lambda_3 = \rho - 2.$$

Διαφορετικά υπολογίζουμε τη σχετική ορίζουσα

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-(3-\rho) & -2 & \rho \\ 0 & \lambda-\rho & 1-\rho \\ 0 & 0 & \lambda-(\rho-2) \end{vmatrix} \\ &= [\lambda-(3-\rho)] \begin{vmatrix} \lambda-\rho & 1-\rho \\ 0 & \lambda-(\rho-2) \end{vmatrix} \\ &= [\lambda-(3-\rho)](\lambda-\rho)[\lambda-(\rho-2)]. \end{aligned}$$

Σε μία από τις διαφορετικές παραλλαγές υπήρχε το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} \rho-4 & 1 & 5-\rho \\ \rho & \rho-3 & \rho-1 \\ 0 & 0 & \rho+6 \end{pmatrix},$$

με $a_{21} = \rho$ τυπογραφικό λάθος. Και πάλι όμως διαμορφώνοντας την ορίζουσα $\det(\lambda I - A)$ την αναπτύσουμε ως προς την τρίτη γραμμή και υπολογίζουμε μία μόνο 2×2 ορίζουσα για την εύρεση των ιδιοτιμών. Πράγματι αναπτύσσοντας

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - \rho + 4 & -1 & \rho - 5 \\ -\rho & \lambda - \rho + 3 & 1 - \rho \\ 0 & 0 & \lambda - \rho - 6 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - \rho - 6) \begin{vmatrix} \lambda - \rho + 4 & -1 \\ -\rho & \lambda - \rho + 3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - \rho - 6)\big[(\lambda - \rho + 4)(\lambda - \rho + 3) - \rho\big] \\
&= (\lambda - \rho - 6)\big[(\lambda - \rho)^2 + 7(\lambda - \rho) + 12 - \rho\big]
\end{aligned}$$

και λύνοντας στη συνέχεια την εξίσωση $\det(\lambda I - A) = 0$ βρίσκουμε

$$\lambda = \rho + 6, \qquad \text{και} \qquad \lambda - \rho = \frac{-7 \pm \sqrt{1 + 4\rho}}{2}$$

έτσι

$$\lambda_1 = \rho + 6, \qquad \lambda_2 = \rho + \frac{-7 + \sqrt{1 + 4\rho}}{2}, \qquad \lambda_3 = \rho + \frac{-7 - \sqrt{1 + 4\rho}}{2}.$$

Θ4. Αν A είναι ένα 3×3 μητρώο με $\det A = a \neq 0$, τότε

(α΄) ■ $\det(2A) = 2^3 \det A = 2^3 a$.

(β΄) ■ $\det(2A(3A)^{-1}) = \dfrac{\det(2A)}{\det(3A)} = \dfrac{2^3 a}{3^3 a} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$.

(γ΄) ■ $\det(2A(3A)^{\mathrm{T}}) = \det(2A)\det((3A)^{\mathrm{T}}) = \det(2A)\det(3A) = 2^3 a 3^3 a = 2^3 3^3 a^2$.

(δ΄) $\operatorname{rank}(A^{-1}) = 3$ Σ Λ

$\det A = a \neq 0$, άρα το A αντιστρέφεται, ισοδύναμα $\operatorname{rank} A = 3$, επομένως $\operatorname{rank}(A^{-1}) = 3$.

Θ5. Δίνεται το μητρώο

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(α΄) Να βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του M.

$$M \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

(β΄) Να βρείτε μια βάση για την εικόνα ($\operatorname{range} M$) του M.

Οι στήλες των οδηγών στο R είναι η πρώτη και η δεύτερη, άρα μια βάση για την εικόνα, ή χώρο στηλών του A ($\operatorname{range} A = C(A)$) αποτελείται από τη πρώτη και τη δεύτερη στήλη του A (και εδώ δεν είναι χρήσιμο το ¨σκονάκι¨;) έτσι μια βάση για το $\operatorname{range} A$ είναι η

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(γ΄) Να βρείτε μια βάση για το μηδενόχωρο ($\operatorname{null} M$) του M.

$\mathbf{x} \in \operatorname{null} A \Leftrightarrow R\mathbf{x} = \mathbf{0}$, έτσι

$$R\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix},$$

όπου $t \in \mathbb{R}$, έτσι μια βάση του μηδενόχωρου είναι η

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Θ6. Αν το B είναι ένα 3×4 μητρώο να βρεθεί η διάσταση του **τετραγωνικού** μητρώου A σε κάθε περίπτωση ώστε η πράξη να ορίζεται. Εάν η πράξη δεν μπορεί να ορισθεί γράψτε δεν ορίζεται.

Τα μητρώα AA^{T}, $A^{\mathrm{T}}A$ και BB^{T}, $B^{\mathrm{T}}B$ ορίζονται ανεξάρτητα από τη διάσταση των A και B και είναι τετραγωνικά. Ειδικά το BB^{T} είναι 3×3 και το $B^{\mathrm{T}}B$ είναι 4×4. Έτσι

(α΄) ■ $AB^{\mathrm{T}}B$ Το A είναι 4×4.

(β΄) ■ $BB^{\mathrm{T}}A$ Το A είναι 3×3.

(γ΄) ■ $AB^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ. Το A πρέπει να είναι 4×4 για να ορίζεται το AB^{T} και την ίδια στιγμή 3×3 για να ορίζεται το $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

(δ΄) ■ $A^{\mathrm{T}}AB$ Το A είναι 3×3.

(ε΄) ■ $A^{\mathrm{T}}B + AB^{\mathrm{T}}$ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ.

(ϛ΄) ■ $A + BA^{\mathrm{T}}$ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ.

Θ7. Έστω $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ και έστω $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ δύο βάσεις για τον $\mathbb{R}^3$, και έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε

$$F(\mathbf{u}_1) = -\mathbf{v}_1, \qquad F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \qquad F(\mathbf{u}_3) = -\mathbf{v}_3.$$

Παρατηρήστε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v}_2$ δεν εμφανίζεται στις εκφράσεις των $F(\mathbf{u}_j)$, $j = 1, 2, 3$, γεγονός που έχει συγκεκριμένες συνέπειες, με πρώτη την $F(\mathbb{R}^3) = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ (γιατί; βλέπε (β΄) παρακάτω).

(α΄) ■ Το μητρώο αναπαράστασης A του F ως προς τις βάσεις $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι το

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

η j-στήλη του A είναι το διάνυσμα των συντελεστών του $F(\mathbf{u}_j)$ ως προς τη βάση $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Παρατηρήστε ότι αν $A = (\mathbf{a}_1 \ \ \mathbf{a}_2 \ \ \mathbf{a}_3)$, τότε $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, επομένως οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Το αποτέλεσμα αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος που σχολιάσαμε προηγούμενα.

(β΄) Μια βάση για την εικόνα $\operatorname{Image}(F)$ είναι η

i. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
ii. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\}$
iii. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$
iv. Καμιά από τις προηγούμενες

Αν $\mathbf{x} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3$, τότε $F(\mathbf{x}) \in \mathrm{Image}(F)$ και από γραμμικότητα

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= aF(\mathbf{u}_1) + bF(\mathbf{u}_2) + cF(\mathbf{u}_3) \\ &= a(-\mathbf{v}_1) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + c(-\mathbf{v}_3) \\ &= (b-a)\mathbf{v}_1 + (b-c)\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$\mathrm{Image}(F) = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}.$$

(γ΄) Υπάρχει $b \in \mathbb{R}^3$ ώστε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ δεν έχει λύση. Σ Λ

Για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ με μη μηδενική $\mathbf{v}_2$-συνιστώσα το σύστημα δεν έχει λύση, αφού $A\mathbf{x} \in \mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, ειδικά το $A\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$ δεν έχει λύση. Διαφορετικά, ο χώρος στηλών του A, $C(A) = \mathrm{range}\, A$ είναι διδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, ένα επίπεδο W δηλαδή, έτσι αν $\mathbf{b} \notin W$ το σύστημα δεν έχει λύση, ειδικά για $\mathbf{b} \in W^{\perp}$.

Θ8. Ένα 3×3 μητρώο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(α΄) Το μητρώο A είναι αντιστρέψιμο. Σ Λ

Το $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του A (γιατί;), άρα το A αντιστρέφεται.

(β΄) ■ $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

(γ΄) Το μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο. Σ Λ

Τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα το μητρώο A διαγωνοποιείται.

Θ9. Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\|\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} + 2\mathbf{u}\|,$$

όπου $\|\cdot\|$ είναι η επαγόμενη νόρμα

(α΄) Τι συμπεραίνετε για τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$; (Με απόδειξη.)

Από την υπόθεση παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v} + 2\mathbf{u}\|^2 &\Leftrightarrow \langle \mathbf{u} + 2\mathbf{v}, \mathbf{u} + 2\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} + 2\mathbf{u}, \mathbf{v} + 2\mathbf{u} \rangle \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{u}\|^2 + 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + 4\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + 4\|\mathbf{u}\|^2 \\ &\Leftrightarrow 3\|\mathbf{u}\|^2 = 3\|\mathbf{v}\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

αφού $\|\cdot\| \geq 0$. Τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στη σφαίρα με κέντρο στην αρχή των αξόνων στο $\mathbb{R}^3$ και ακτίνα ρ, όπου $\rho = \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.

(β΄) Πότε η $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή; (Με απόδειξη.)

Με $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ αν θ είναι η γωνία μεταξύ των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= 2\|\mathbf{u}\|^2(1+\cos\theta) \end{aligned}$$

και το μέγιστο συμβαίνει αν $\cos\theta = 1$, ισοδύναμα αν $\theta = 0$, άρα τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ έχουν την ίδια κατεύθυνση και επειδή έχουν και το ίδιο μήκος τελικά προκύπτει ότι το μέγιστο συμβαίνει όταν $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Σημειώνουμε ότι το ελάχιστο $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = 0$ συμβαίνει όταν τα δύο διανύσματα αποτελούν μια διάμετρο της σφαίρας ($\theta = \pi \Rightarrow \cos\theta = -1$) είναι δηλαδή $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.

Θ10. Αν το A είναι ένα ορθογώνιο μητρώο τότε $\det A = \det(A^{-1})$. Σ Λ

Αν το A είναι ορθογώνιο, τότε $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$, οπότε

$$\det(A^{-1}) = \det(A^{\mathrm{T}}) = \det A.$$