

Αν  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  και  $B \in \mathbb{R}^{k \times l}$

- α) Να αιτιολογήσετε πότε είναι εφικτή η πράξη  $C = AB$ .
- β) Ποιο θα είναι το μέγεθος του  $C$ ;

Λύση

α)  $m = k$

β)  $n \times l;$

Έστω το μητρώο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

- α) Να δείξετε ποιος είναι **ο ανάστροφος** του  $A$ ,  $A^T$ .
- β) Να υπολογίσετε το μητρώο  $B = A^T A$ .
- γ) Να αιτιολογήσετε αν το  $A$  είναι **αντιστρέψιμο**.

## Λύση

α)

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

β)

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{bmatrix}$$

- γ) Το  $A$  δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμο γιατί δεν είναι τετραγωνικό, και δεν μπορεί να ισχύει  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ .

Έστω το μητρώο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

και το διάνυσμα

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

- α) Να κατασκευάσετε το στοιχειώδες μητρώο που κάνει την πράξη  $row_2 \leftarrow 3row_1$ .
- β) Να υπολογίσετε τη πράξη  $v = Ab$ .
- γ) **(bonus)** Να αιτιολογήσετε αν το  $A$  είναι **αντιστρέψιμο**.

Λύση

α)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β)

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- γ) Το  $A$  δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμο γιατί η πρώτη και η τρίτη γραμμή είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Έστω τα μητρώα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- α) Να δείξετε πως θα επιλύσετε το γραμμικό σύστημα  $Ax = b$  χρησιμοποιώντας την άνω-κάτω τριγωνική διάσπαση του  $A$ , LU.
- β) Να υπολογίσετε, **αν ορίζονται**, τις πράξεις  $C_1 = AB$ ,  $C_2 = BA$  και  $C_3 = B^T A$ .
- γ) Να γράψετε τον αντίστροφο του  $G$ .

## Λύση

- α) ①  $A = LU \Rightarrow LUx = b$ .  
 ②  $Ux = y \Rightarrow Ly = b$ , βρίσκουμε το  $y$  με εμπρός αντικατάσταση.  
 ③  $Ux = y$ , βρίσκουμε το  $x$  με πίσω αντικατάσταση.

β)

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

 $C_2$  δεν ορίζεται.

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

γ)

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω τα διανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- α) Να εκφράσετε τον υπόχωρο του  $\mathbb{R}^3$  που κατασκευάζουν;
- β) Έστω ότι  $W$  ο υπόχωρος του (α). Είναι  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  βάση για τον  $W$ ;
- γ) Ποια είναι η διάσταση του  $W$ ;
- δ) Επεκτείνετε τη βάση του  $W$  έτσι ώστε να αποτελεί βάση για τον  $\mathbb{R}^3$ .

## Λύση

- α)  $W = \text{span} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \}$
- β) Παρατηρούμε ότι  $\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_2 = 0$ , άρα  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  κάθετα και συνεπώς γραμμικά ανεξάρτητα, άρα  $\text{basis}(W) = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \}$ .
- γ)  $\dim(W) = 2$
- δ) Θα προσθέσουμε στην βάση του  $W$  το  $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1 \ 0]^\top$ .