

Γραμμική Άλγεβρα  
Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων  
Διδάσκοντες: Ε. Στεφανόπουλος, Ε. Γαλλόπουλος,  
Ε-Μ. Κοντοπούλου

27 Νοεμβρίου 2025

---

**Σημείωση:** Παρακάτω θα χρησιμοποιούμε bold και λατινική μορφοποίηση για να αναφερόμαστε σε μητρώα (κεφαλαία) και διανύσματα (πεζά). Οι βαθμωτοί θα αναφέρονται με κανονική μορφοποίηση.

---

**Ερώτημα:**

Έστω το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4w = 9 \\ x - 2z + 7w = 11 \\ 3x - 3y + z + 5w = 8 \\ 2x + y + 4z + 4w = 10 \end{cases} \quad (1)$$

Να κατασκευάσετε το γραμμικό σύστημα,  $\mathbf{Ac} = \mathbf{b}$ , που προκύπτει από το σύστημα εξισώσεων (1) και να βρείτε τη λύση του,  $\mathbf{c}$ :

(α) χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss.

(β) χρησιμοποιώντας την άνω/κάτω τριγωνική μορφή του  $\mathbf{A}$ , LU.

**Λύση:**

Το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από το σύστημα εξισώσεων (1) είναι το:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 7 \\ 3 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (2)$$

---

**Σημείωση:** Παρατηρήστε ότι στη δεύτερη εξίσωση, για τον άγνωστο  $y$ , ο συντελεστής του είναι 0. Ενώ σε συνηθισμένα συστήματα εξισώσεων, όπως αυτό της (1), μπορούμε να αγνοήσουμε έναν άγνωστο στην εξίσωση όταν ο συντελεστής του είναι μηδενικός, αυτό δεν ισχύει στα γραμμικά συστήματα. Οι συντελεστές όλων των αγνώστων, ακόμη και όταν είναι μηδενικοί, **πρέπει** να συμπεριλαμβάνονται στο μητρώο συντελεστών  $\mathbf{A}$ , στην αντίστοιχη θέση.

---

- (α) Για το ερώτημα αυτό θα εκτελέσουμε την απαλοιφή Gauss χρησιμοποιώντας στοιχειώδη μητρώα Gauss<sup>1</sup>. **Σημαντικό:** κατά την απαλοιφή Gauss, οι οδηγοί δεν χρειάζεται απαραίτητα να είναι ίσοι με 1. Ξεκινάμε την απαλοιφή Gauss, στο επαυξημένο με το δεξί μέλος,  $\mathbf{b}$ , μητρώο,  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

**Στήλη 1:** Οδηγός είναι το στοιχείο  $\mathbf{A}_{11}$  και στόχος είναι με την εφαρμογή διαδοχικών στοιχειωδών πράξεων να μηδενίσουμε τα στοιχεία  $\mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{31}, \mathbf{A}_{41}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{r}_1 :: & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_1} \begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & 3 & 4 & 9 \\ \boxed{1} & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \\ \\ \mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 - \frac{3}{2}\mathbf{r}_1 :: & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_2} \begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ \boxed{3} & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -1 & -\frac{11}{2} \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} \\ \\ \mathbf{r}_4 \leftarrow \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1 :: & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_3} \begin{bmatrix} \boxed{2} & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -1 & -\frac{11}{2} \\ \boxed{2} & 1 & 4 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & -1 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Στοιχειώδη μητρώα ονομάζονται μητρώα με συγκεκριμένη, απλή δομή, των οποίων ο πολλαπλασιασμός με ένα γενικό μητρώο αντιστοιχεί στην εφαρμογή ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού στο μητρώο αυτό. Είναι εύκολα στην κατασκευή και στην εύρεση του αντιστρόφου τους. Στη γενική περίπτωση μπορούν να αναπαρασταθούν ως ενημέρωση πρώτης τάξης (rank-one update) του ταυτοτικού μητρώου, δηλ. έχουν τη μορφή  $\mathbf{I} - \alpha \mathbf{v} \mathbf{u}^\top$ . Για παράδειγμα, το στοιχειώδες μητρώο Gauss, που εκφράζει την γράμμο-πράξη  $\text{row}_i \leftarrow \text{row}_i - \alpha \text{row}_j$  εκφράζεται γραμμικοαλγεβρικά ως  $\mathbf{I} - \alpha \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top$ , όπου  $\mathbf{e}_i$  και  $\mathbf{e}_j$  είναι οι  $i$ -οστή και  $j$ -οστή στήλη του ταυτοτικού μητρώου αντίστοιχα.

**Στήλη 2 :** Οδηγός είναι το στοιχείο  $\mathbf{A}_{22}$  και στόχος είναι με την εφαρμογή διαδοχικών στοιχειωδών πράξεων να μηδενίσουμε τα στοιχεία  $\mathbf{A}_{32}, \mathbf{A}_{42}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 + 3\mathbf{r}_2 :: \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 0 & \boxed{-\frac{3}{2}} & -\frac{7}{2} & -1 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_4 \leftarrow \mathbf{r}_4 - 4\mathbf{r}_2 :: \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_5} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & -25 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Στήλη 3:** Οδηγός είναι το στοιχείο  $\mathbf{A}_{33}$  και στόχος είναι με την εφαρμογή διαδοχικών στοιχειωδών πράξεων να μηδενίσουμε το στοιχείο  $\mathbf{A}_{43}$ :

$$\mathbf{r}_4 \leftarrow \mathbf{r}_4 + \frac{15}{14}\mathbf{r}_3 :: \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{14} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}_6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-14} & 14 & 14 \\ 0 & 0 & \boxed{15} & -20 & -25 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{R} \hat{\mathbf{b}}]}$$

όπου  $\mathbf{R}$  η κλιμακωτή μορφή του  $\mathbf{A}$ .

Τότε το γραμμικό σύστημα (2) μετασχηματίζεται στο άνω τριγωνικό γραμμικό σύστημα  $\mathbf{R}\mathbf{c} = \hat{\mathbf{b}}$ :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ \frac{13}{2} \\ 14 \\ -10 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{b}}} \quad (3)$$

το οποίο λύνεται με **πίσω αντικατάσταση**, δηλαδή, ξεκινώντας από την τελευταία εξίσωση αντικαθιστούμε κάθε φορά τους αγνώστους που βρέθηκαν στο προηγούμενο βήμα, μέχρι να φτάσουμε στην πρώτη εξίσωση:

$$\begin{aligned} -5w &= -10 \Rightarrow \boxed{w = 2} \\ -14z + 14w &= 14 \Rightarrow z = w - 1 \Rightarrow \boxed{z = 1} \\ \frac{1}{2}y - \frac{7}{2}z + 5w &= \frac{13}{2} \Rightarrow y = 7z - 10w + 13 \Rightarrow \boxed{y = 0} \\ 2x - y + 3z + 4w &= 9 \Rightarrow x = \frac{9 + y - 3z - 4w}{2} \Rightarrow \boxed{x = -1} \end{aligned}$$

Συνεπώς η λύση  $\mathbf{c}$  του γραμμικού συστήματος (2) είναι:

$$\mathbf{c} = [-1 \ 0 \ 1 \ 2]^\top \quad (4)$$

(6) Για να επιλύσουμε το σύστημα χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση LU, πρέπει πρώτα να την υπολογίσουμε. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το ερώτημα (α) μπορούμε να πούμε τα εξής:

- Το άνω τριγωνικό μητρώο,  $\mathbf{U}$ , της παραγοντοποίησης, ισούται με την κλιμακωτή μορφή του  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

- Το κάτω τριγωνικό μητρώο  $\mathbf{L}$ , της παραγοντοποίησης, μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τα στοιχειώδη μητρώα Gauss,  $\mathbf{L}_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , που κατασκευάστηκαν κατά την απαλοιφή Gauss στο ερώτημα (α). Πιο συγκεκριμένα για να υπολογίσουμε την κλιμακωτή μορφή,  $\mathbf{R}$ , του  $\mathbf{A}$ , κάναμε τους εξής διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς (μετασχηματισμούς) στο  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{L}_6 (\mathbf{L}_5 (\mathbf{L}_4 (\mathbf{L}_3 (\mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_1 \mathbf{A})))) = \mathbf{R} \equiv \mathbf{U} \quad (5)$$

Τα στοιχειώδη μητρώα Gauss, ξέρουμε ότι είναι αντιστρέψιμα<sup>2</sup>. Άρα η εξίσωση (5) γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_6 (\mathbf{L}_5 (\mathbf{L}_4 (\mathbf{L}_3 (\mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_1 \mathbf{A})))) &= \mathbf{U} \\ \mathbf{L}_5 (\mathbf{L}_4 (\mathbf{L}_3 (\mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_1 \mathbf{A})))) &= \mathbf{L}_6^{-1} \mathbf{U} \\ \mathbf{L}_4 (\mathbf{L}_3 (\mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_1 \mathbf{A}))) &= \mathbf{L}_5^{-1} \mathbf{L}_6^{-1} \mathbf{U} \\ \mathbf{L}_3 (\mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_1 \mathbf{A})) &= \mathbf{L}_4^{-1} \mathbf{L}_5^{-1} \mathbf{L}_6^{-1} \mathbf{U} \\ \mathbf{L}_2 (\mathbf{L}_1 \mathbf{A}) &= \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{L}_4^{-1} \mathbf{L}_5^{-1} \mathbf{L}_6^{-1} \mathbf{U} \\ \mathbf{L}_1 \mathbf{A} &= \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{L}_4^{-1} \mathbf{L}_5^{-1} \mathbf{L}_6^{-1} \mathbf{U} \\ \mathbf{A} &= \underbrace{\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{L}_4^{-1} \mathbf{L}_5^{-1} \mathbf{L}_6^{-1}}_{\mathbf{L}} \mathbf{U} \end{aligned}$$

Επειδή ο πολλαπλασιασμός στοιχειωδών μητρώων Gauss διατηρεί την τριγωνική μορφή, το γινόμενο  $\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{L}_4^{-1} \mathbf{L}_5^{-1} \mathbf{L}_6^{-1}$  παραμένει κάτω τριγωνικό με μονάδες στη διαγώνιο. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{L}_4^{-1} \mathbf{L}_5^{-1} \mathbf{L}_6^{-1}$$

<sup>2</sup>Το στοιχειώδες μητρώο Gauss που προσθέτει  $k$  φορές τη γραμμή  $j$  στη γραμμή  $i$  είναι το ίδιο το ταυτοτικό, με ένα μόνο στοιχείο αλλαγμένο, αυτό στη θέση  $(i, j)$  η οποία θα ισούται με  $k$ . Ο αντίστροφός του προκύπτει αλλάζοντας αυτό το στοιχείο σε  $-k$ , δηλαδή το ταυτοτικό μητρώο με τη θέση  $(i, j) = -k$ .

5

Τότε το γραμμικό σύστημα (2) μπορεί να λυθεί ως εξής<sup>3</sup>:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Ac} = \mathbf{b} \\ \mathbf{A} = \mathbf{LU} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mathbf{LUc} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Uc} = \mathbf{d} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mathbf{Ld} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Uc} = \mathbf{d} \end{array} \right\} \quad (6)$$

Πράγματι αντικαθιστώντας το  $\mathbf{A}$  με το γινόμενο  $\mathbf{LU}$  και θέτοντας  $\mathbf{Uc} = \mathbf{d}$ , προκύπτουν δύο τριγωνικά γραμμικά συστήματα:

- Κάτω τριγωνικό σύστημα  $\mathbf{Ld} = \mathbf{b}$  το οποίο λύνεται με **εμπρός-αντικατάσταση** (διαδικασία όμοια με την πίσω-αντικατάσταση με τη διαφορά ότι ξεκινάμε από την πρώτη εξίσωση για να καταλήξουμε στην τελευταία εξίσωση).
- Άνω τριγωνικό σύστημα  $\mathbf{Uc} = \mathbf{d}$  το οποίο λύνεται με **πίσω-αντικατάσταση**.

Λύνουμε πρώτα το  $\mathbf{Ld} = \mathbf{b}$  με εμπρός αντικατάσταση:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -\frac{15}{14} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= 9 \\ \frac{1}{2}d_1 + d_2 &= 11 \Rightarrow d_2 = \frac{13}{2} \\ \frac{3}{2}d_1 - 3d_2 + d_3 &= 8 \Rightarrow d_3 = 14 \\ d_1 + 4d_2 - \frac{15}{14}d_3 + d_4 &= 10 \Rightarrow d_4 = -10 \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{d} = [9 \quad \frac{13}{2} \quad 14 \quad -10]^\top$$

Παρατηρείστε ότι το  $\mathbf{d}$  ισούται με το δεξί μέλος του μετασχηματισμένου συστήματος (3). Αυτό συμβαίνει γιατί η εφαρμογή διαδοχικών στοιχειωδών μητρώων Gauss στο δεξί μέλος,  $\mathbf{b}$ , του γραμμικού συστήματος (2) ισοδυναμεί με την πράξη  $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$ . Πράγματι:

$$\mathbf{L}^{-1} = (\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2^{-1}\mathbf{L}_3^{-1}\mathbf{L}_4^{-1}\mathbf{L}_5^{-1}\mathbf{L}_6^{-1})^{-1} = ((\mathbf{L}_6\mathbf{L}_5\mathbf{L}_4\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1)^{-1})^{-1} = \mathbf{L}_6\mathbf{L}_5\mathbf{L}_4\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1$$

<sup>3</sup>Παρατηρείστε ότι το  $\mathbf{L}$  περιέχει τους πολλαπλασιαστές που χρησιμοποιήθηκαν για την εξάλειψη των στοιχείων κάτω από τον οδηγό ακριβώς στις ίδιες θέσεις που βρίσκονταν και στα στοιχειώδη μητρώα Gauss. Αυτό συμβαίνει διότι σε κάθε βήμα εφαρμόζεται ένα στοιχειώδες μητρώο Gauss της μορφής:

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{I} - m_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top, \quad k = 1, 2, \dots$$

και ο αντίστροφός του:

$$\mathbf{L}_k^{-1} = \mathbf{I} + m_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top, \quad k = 1, 2, \dots$$

εισάγει τον πολλαπλασιαστή  $m_{ij}$  στην ίδια θέση  $(i, j)$ . Καθώς το  $\mathbf{L}$  προκύπτει ως γινόμενο των  $\mathbf{L}_k^{-1}$ , οι πολλαπλασιαστές διατηρούνται στις θέσεις αυτές και σχηματίζουν τη χαρακτηριστική κάτω τριγωνική δομή του  $\mathbf{L}$ . Παρατηρείστε πως οι σύνθετοι όροι που προκύπτουν από τα γινόμενα μεταξύ των παραγόντων  $\mathbf{I} + m_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top$  μηδενίζονται, αφήνοντας μόνο μονοώνυμα της μορφής  $m_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\top \forall i, j$ .

και  $\mathbf{d} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b} \equiv \mathbf{L}_6\mathbf{L}_5\mathbf{L}_4\mathbf{L}_3\mathbf{L}_2\mathbf{L}_1\mathbf{b}$ .

Στη συνέχεια λύνουμε το άνω τριγωνικό σύστημα το οποίο ισοδυναμεί ακριβώς με το σύστημα (3):

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 5 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \frac{13}{2} \\ 14 \\ -10 \end{bmatrix}$$

το οποίο λύνεται με πίσω αντικατάσταση :

$$-5w = -10 \Rightarrow \boxed{w = 2}$$

$$-14z + 14w = 14 \Rightarrow z = w - 1 \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

$$\frac{1}{2}y - \frac{7}{2}z + 5w = \frac{13}{2} \Rightarrow y = 7z - 10w + 13 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

$$2x - y + 3z + 4w = 9 \Rightarrow x = \frac{9 + y - 3z - 4w}{2} \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Συνεπώς η λύση  $\mathbf{c}$  του γραμμικού συστήματος (2) είναι:

$$\mathbf{c} = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2]^T \quad (7)$$

### Παρατήρηση (εκτός ύλης):

Παρόλο που στο χαρτί η παραγοντοποίηση  $LU$  μοιάζει πιο περίπλοκη, στην πράξη είναι πολύ πιο αποδοτική και χρήσιμη από την απευθείας απαλοιφή Gauss. Ο λόγος είναι ότι η απαλοιφή Gauss επαναλαμβάνει ολόκληρη τη διαδικασία κάθε φορά, ενώ με την χρήση της παραγοντοποίησης  $LU$  το γραμμικό σύστημα μπορεί να διαχωριστεί σε δύο απλούστερα και **επαναχρησιμοποιήσιμα** συστήματα. Αυτό είναι χρήσιμο σε μερικές περιπτώσεις όπως:

1. Αν χρειαστεί να λύσουμε τα γραμμικά συστήματα  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ , ..., τότε πρακτικά η απαλοιφή Gauss πρέπει να γίνει κάθε φορά από την αρχή καθώς υπάρχει ένα διαφορετικό δεξί μέλος. Αντίθετα, η παραγοντοποίηση  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$  υπολογίζεται μία φορά και κάθε επόμενη λύση απαιτεί μόνο δύο τριγωνικές επιλύσεις.
2. Υπολογισμός αντιστρόφου, οριζουσών, μεθόδων βελτιστοποίησης, λύσεων διαφορικών εξισώσεων κ.ά.