Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΓΕΣ 6 Φεβρουαρίου 2023

Συμπληρώστε τα στοιχεία σας και **κυκλώστε** το έτος εισαγωγής και την αίθουσα εξέτασης.	
ΕΠΩΝΥΜΟ: Γραμμοαλγεβράκης	ΟΝΟΜΑ: Αρθούρος
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ: 1855-58	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ: ≤ 2013, $[2014, 2021]$, 2022
ΑΙΘΟΥΣΑ: **ΑΦΕ/Γ** ΣΤΗΛΗ:	ΜΟΝΑΔΕΣ: **98**

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν ερωτήματα

- του τύπου "Σωστό/Λάθος" ή πολλαπλής επιλογής και καλείσθε, μετά από ένα σύντομο έλεγχο να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.
- με την ένδειξη ■ στα οποία πρέπει να δώσετε, δίχως αιτιολόγηση, την τελική απάντηση ή λύση, μετά από σχετική προεργασία στο πρόχειρο.
- δίχως κάποια ένδειξη στα οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο στο χώρο που παρέχεται.

τα οποία απαρτίζουν οκτώ προβλήματα. Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται και σε κάποιες επιβάλλεται να "δουλέψετε" κάθε ερώτημα ή υποερώτημα στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 45 λεπτά μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Καλή Επιτυχία!

Λύσεις & Σχόλια

Θ1. Έστω $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ και έστω $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ δύο βάσεις για τον $\mathbb{R}^3$, και έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε

$$F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \qquad F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2 \qquad F(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_3.$$

(α΄) ■ Αν A είναι το μητρώο αναπαράστασης του F ως προς τις βάσεις $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$, τότε

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(β΄) Να βρεθεί ο πυρήνας του μετασχηματισμού $\operatorname{Kernel}(F)$.
Αν

$$\mathbf{x} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 \in \operatorname{Kernel}(F),$$

τότε

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) = \mathbf{0} &\Rightarrow F(a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow aF(\mathbf{u}_1) + bF(\mathbf{u}_2) + cF(\mathbf{u}_3) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow a(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + b(\mathbf{v}_2) + c(\mathbf{v}_3) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow (a+b)\mathbf{v}_2 + (a+c)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow a+b = 0 \text{ και } a+c = 0 \\ &\Rightarrow b = c = -a \end{aligned}$$

συνεπώς $\mathbf{x} = a(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3)$, επομένως $\operatorname{Kernel}(F) = \operatorname{span}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3)$.

(γ΄) Το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A. Σ Λ
Μια γραμμή του A είναι μηδενική, επομένως το A δεν αντιστρέφεται, ισοδύναμα το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A. Διαφορετικά $\operatorname{null} A = \operatorname{Kernel}(F) \neq \{\mathbf{0}\}$, συνεπώς το A δεν αντιστρέφεται.

Θ2. Έστω A ένα $n \times n$ πραγματικό μητρώο.

(α΄) Αν $A^{\mathrm{T}} = A$, τότε τα ιδιοδιανύσματα του A αποτελούν μια βάση για το $\mathbb{R}^n$. Σ Λ
Το A είναι ορθογώνια διαγωνοποιήσιμο, κατά συνέπεια τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επομένως τα n τέτοια αποτελούν μια βάση για τον $\mathbb{R}^n$.

(β΄) Αν $n = 2$ και το 1 είναι ιδιοτιμή του A δείξτε ότι $\det A = \operatorname{trace} A - 1$.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του 2×2 A είναι

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{trace} A)\lambda + \det A$$

και επειδή $p(1) = 0$ προκύπτει ότι $1 - \operatorname{trace} A + \det A = 0$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

Θ3. Έστω A ένα 4×4 μητρώο το οποίο ικανοποιεί την σχέση

$$A^2 + 4A - 2I = O,$$

οπου O είναι το μηδενικό μητρώο. Χρησιμοποιήστε τη δοσμένη σχέση για να δείξετε ότι το $\lambda = 0$ δεν μπορεί να είναι ιδιοτιμή του A. **Υπόδειξη:** Υποθέστε ότι το $\mathbf{x}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A.
1ος τρόπος: Αν λ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}$, τότε

$$\begin{aligned} (A^2 + 4A - 2I)\mathbf{x} = O\mathbf{x} &\Rightarrow A^2\mathbf{x} + 4A\mathbf{x} - 2I\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \lambda^2\mathbf{x} + 4\lambda\mathbf{x} - 2\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow (\lambda^2 + 4\lambda - 2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0 \end{aligned}$$

αφού $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Το μηδέν δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $\lambda^2 + 4\lambda - 2$, το οποίο σημειωτέον δεν είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A (γιατί;), κατά συνέπεια το $\lambda = 0$ δεν μπορεί να είναι ιδιοτιμή του A.
2ος τρόπος: Η δοσμένη σχέση συνεπάγεται ότι $A(A + 4I) = 2I$, ή $A(\frac{1}{2}A + 2I) = I$, κατά συνέπεια το A αντιστρέφεται και $A^{-1} = \frac{1}{2}A + 2A$, οπότε το $\lambda = 0$ δεν μπορεί να είναι ιδιοτιμή του A.
Η έκφραση $A^2 + 4A$ παραγοντοποιείται ως $A(A+2I)$ **και όχι** ως $A(A+2)$! Η πράξη $A+2$ **δεν ορίζεται**, σε κανένα σύμπαν.

Θ4. Αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός c για τον οποίο η απόσταση μεταξύ $\mathbf{x}$ και $c\mathbf{y}$ είναι η ελάχιστη δυνατή, ισοδύναμα να βρεθεί το

$$\min_{c\in\mathbb{R}} \|\mathbf{x} - c\mathbf{y}\|$$

1ος τρόπος: Από το Θεώρημα βελτιστοποίησης (Διάλεξη 9, σελ. 27) έπεται ότι (ίδια διάλεξη, σελ. 25, σχέση 2)

$$\min_{c\in\mathbb{R}} \|\mathbf{x} - c\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}\| \Rightarrow c = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}.$$

Υπάρχουν απαντήσεις που λένε ότι η απόσταση γίνεται ελάχιστη όταν $\mathbf{x} - c\mathbf{y} = \mathbf{0}$, αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί αν τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και συνεχίζουν: επομένως

$$c = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}.$$

Εδώ θα πέσει ο ουρανός να μας πλακώσει. Το αριστερό μέλος της ισότητας είναι πραγματικός αριθμός και το δεξιό είναι **πηλίκο** διανυσμάτων. Που και πότε ορίστηκε τέτοια πράξη;
2ος τρόπος: Είναι πρόβλημα εύρεσης ελαχίστου.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - c\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} - c\mathbf{y}, \mathbf{x} - c\mathbf{y}\rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + c^2\|\mathbf{y}\|^2 \\ &= f(c)\end{aligned}$$

και το ελάχιστο συμβαίνει εκεί που μηδενίζεται η παράγωγος, δηλαδή εκεί όπου $f'(c) = 0$, ισοδύναμα

$$-2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + 2c\|\mathbf{y}\|^2 = 0 \Rightarrow c = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}.$$

Θ5. Δίνεται το μητρώο

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

(α΄) Να βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του M.

$$M \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

(β΄) Να βρείτε μια βάση για την εικόνα (range M) του M.
Η πρώτη και η δεύτερη στήλη του R είναι γραμμικά ανεξάρτητες, συνεπώς μια βάση για την εικόνα του M είναι

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(γ΄) Να βρείτε μια βάση για το μηδενόχωρο (null M) του M. Λύνουμε το σύστημα $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ισοδύναμα

$$\begin{Bmatrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

συνεπώς μια βάση για τον μηδενόχωρο είναι η

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Θ6. Αν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι το μητρώο ορθογώνιας προβολής επί ενός διδιάστατου υπόχωρου W του $\mathbb{R}^3$, τότε

(α΄) $A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Ⓢ Λ
Κάθε μητρώο προβολής A ικανοποιεί την $A^2 = A$, που εκφάζει ακριβώς ότι η προβολή του προβεβλημένου είναι το προβεβλημένο.

(β΄) ■ null $A = W^{\perp} =$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα του επιπέδου W

(γ΄) Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις. Ⓢ Λ
Από το (β΄) αφού για κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$ κάθετο στο W είναι $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(δ΄) ■ rank $A = 2 = \dim W$.

Θ7. Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$;

$$G = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 = 0 \right\}, \qquad Q = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 x_2 = 0 \right\}.$$

(α΄) Το Q (β΄) Το G (γ΄) Κανένα (δ΄) Το G και το Q

Το G είναι η ευθεία $y = x$, ενώ το Q είναι η ένωση των ευθειών $y = 0$ και $x = 0$, δηλαδή η ένωση των δύο αξόνων.

Θ8. Αν A είναι ένα 3×3 μητρώο με $\det A = 1$, τότε
(Δίνεται η πληροφορία ότι το A είναι αντιστρέψιμο)

(α΄) ■ $\det(3A) = 3^3 \det A = 27$.

(β΄) ■ $\operatorname{rank}(2A) = \operatorname{rank} A = 3$.
Υπάρχουν απαντήσεις που λένε ότι $\operatorname{rank}(2A) = 6$, δηλαδή ένα μητρώο με τρεις στήλες και τρεις γραμμές έχει έξι γραμμικά ανεξάρτητες στήλες!!! Θα κάνω ντου για να σε βρω.

(γ΄) ■ $\operatorname{trace}(3A) = 3 \operatorname{trace} A$. **Εξήγηση:** Αν $A = (a_{ij})$, τότε $3A = (3a_{ij})$, οπότε

$$\operatorname{trace}(3A) = 3a_{11} + 3a_{22} + 3a_{33} = 3(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = 3 \operatorname{trace} A.$$

(δ΄) ■ $\det(A(3A)^{\mathrm{T}}) = (\det A)(\det(3A)^{\mathrm{T}}) = \det(3A) = 3^3 \det A = 27$.

(ε΄) ■ $\det(3A(6A)^{-1}) = \det(3A)/\det(6A) = 3^3/6^3 = 1/8$.

(ϛ΄) ■ Αν $\det(4AM) = 1$, τότε $M = \cdots$. Η απάντηση δεν είναι μοναδική. Πιθανές απαντήσεις προκύπτουν από την προφανή επιθημητή σχέση $4AM = I$, έτσι μια απάντηση είναι

$$M = (4A)^{-1} = \frac{1}{4} A^{-1}.$$

Άλλες είναι οι

$$M = \frac{1}{4} I, \qquad \text{ή} \qquad M = \frac{1}{4} A, \qquad \text{ή} \qquad M = \frac{1}{4} A^{-1}$$

αφού $\det A = 1$.