Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΓΕΣ — 18 Ιουνίου 2024

Συμπληρώστε τα στοιχεία σας και **κυκλώστε** το έτος εισαγωγής σας στο τμήμα.

ΕΠΩΝΥΜΟ: ΔΙΑΒΑΣΜΕΝΟΣ	ΟΝΟΜΑ: ΑΡΙΣΤΟΣ
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ:	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ: 20....

ΑΙΘΟΥΣΑ:	ΣΤΗΛΗ:	ΜΟΝΑΔΕΣ: 154

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν ερωτήσεις

- του τύπου “Σωστό/Λάθος” ή πολλαπλής επιλογής και καλείσθε, μετά από ένα σύντομο έλεγχο να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση. (4 μονάδες η καθεμιά.)
- με την ένδειξη ■ στα οποία πρέπει να δώσετε, δίχως αιτιολόγηση, την τελική απάντηση ή λύση, μετά από σχετική προεργασία στο πρόχειρο. (5 μονάδες η καθεμιά.)
- δίχως κάποια ένδειξη στα οποία καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά “οικονομική απόδειξη-λύση” για το ζητούμενο στο χώρο που παρέχεται. (6 μονάδες η καθεμιά.)

τα οποία απαρτίζουν 10 Θέματα. Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται και σε κάποιες επιβάλλεται να “δουλέψετε” κάθε ερώτημα ή υποερώτημα στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 15 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει μία ώρα μετά από την έναρξη της εξέτασης. Μαζί με το γραπτό παραδίδετε υπογεγραμμένο και το φύλλο Α4.

Καλή Επιτυχία!

Λύσεις και Σχόλια

Όπως δεν νοείται να τελειώνει κάποιος/κάποια το Δημοτικό και να μην γνωρίζει την αλφαβήτα, ανάγνωση, και το νόημα απλών κειμένων που διαβάζει (για ορθογραφία ας μη πούμε κάτι), έτσι δεν νοείται κάποιος/κάποια που έρχεται να αξιολογηθεί για το τι αποκόμισε από τη μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας, που παρακολούθησε και/ή διάβασε, να μη δίνει σωστές απαντήσεις στα Θέματα 6, 4, 5, και 3, που αποτελούν στοιχειώδη γνώση. Όποιος/όποια δεν απάντησε σωστά στα Θέματα αυτά έχει και θα έχει σοβαρό έλλειμα στις γνώσεις που απαιτούνται από τη Γραμμική Άλγεβρα στη συνέχεια του προγράμματος.

Θ1. Δίνεται ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = y \text{ και } x + y - z = 0 \right\}.$$

Τι πληροφορία έχουμε. Τα διανύσματα του V περιέχονται στη τομή των επίπεδων με εξισώσεις $x - y = 0$ (είναι το επίπεδο που παράγεται από τον z-άξονα και την ευθεία του xy-επιπέδου $y = x$) και $x + y - z = 0$, επομένως το V παριστάνει ευθεία, (μονοδιάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$). Έτσι αν $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$ το W είναι διδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, ειδικά το $V^\perp$ είναι διδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ αφού $\mathbb{R}^3 = V \oplus V^\perp$.

(α΄) Να βρεθεί μια βάση για τον V.

Επειδή $y = x$ και $z = x + y = 2x$, τότε

$$V \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$, έτσι μια βάση για τον V είναι η

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(β΄) Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ του V.

Το V είναι η ευθεία που παράγεται από το διάνυσμα της $\mathcal{B}$. Για το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ θα έχουμε ότι $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^3$, κατά συνέπεια το $V^\perp$ είναι επίπεδο. Αν $(a \ b \ c)^{\mathrm{T}} \in V^\perp$, τότε

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a + b + 2c = 0 \Leftrightarrow a = -b - 2c, \tag{1}$$

έτσι

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b - 2c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Τα τελευταία δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα μια βάση για το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^\perp$ είναι η

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Σημειώνουμε ότι η βάση $\mathcal{B}'$ δεν είναι μοναδική, για παράδειγμα αν λύσουμε στην (1) ως προς b, ή ως προς c θα προκύψουν διαφορετικές βάσεις. Ωστόσο όλες παράγουν το ίδιο επίπεδο $V^\perp$ (φανταστείτε τα συστήματα αξόνων, ορθογώνια ή μη, στο επίπεδο).

Θ2. Αν A είναι ένα 3×3 **μητρώο ορθογώνιας προβολής** επί ενός διδιάστατου υπόχωρου W του $\mathbb{R}^3$, τότε

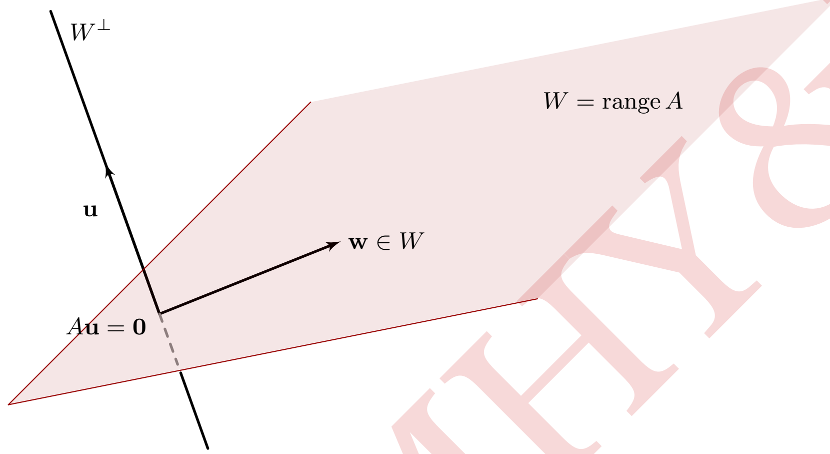
Το μητρώο A προβάλλει επί του επιπέδου W (διδιάστατου υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$), ισοδύναμα για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $A\mathbf{x} \in W$, κατά συνέπεια (α΄) ■ range $A = W$.

Το range $A = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$ είναι **υπόχωρος** του $\mathbb{R}^3$, είναι το σύνολο των εικόνων όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ μέσω του A. Απαντήσεις του τύπου range $A = 2,$ ή 3 δείχνουν ότι κάτι δεν πάει καλά. Ο ορισμός του range A θα μπορούσε να βρίσκεται στο ¨σκονάκι¨.

(β΄) $\mathrm{null}(A^2 - A) = \mathbb{R}^3$. Σ Λ

Αν $\mathbf{x} \in \mathrm{null}(A^2 - A)$, τότε $(A^2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, το οποίο ισχύει για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ αφού το A είναι μητρώο προβολής ($A^2 = A$).

(γ΄) ■ null $A = W^{\mathrm{T}}$



Η ευθεία $W^{\perp}$ προβάλλεται μέσω του A στο διάνυσμα $\mathbf{0}$. Επιπλέον κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ γράφεται ως $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^{\perp}$, όπου $\mathbf{w} \in W$ και $\mathbf{w}^{\perp} \perp \mathbf{w}$ αφού $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp}$, έτσι

$$A\mathbf{x} = A(\mathbf{w} + \mathbf{w}^{\perp}) = A\mathbf{w} + A\mathbf{w}^{\perp} = \mathbf{w} + \mathbf{0} = \mathbf{w},$$

κατά συνέπεια $\mathbf{x} \in$ null A αν και μόνο αν δεν έχει W-συνιστώσα, ισοδύναμα $\mathbf{x} \in W^{\perp}$.

(δ΄) Το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις. Σ Λ

Για κάθε $\mathbf{u} \in W^{\perp}$ είναι $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(ε΄) ■ rank $A = \dim(\mathrm{range}\,A) = \dim(W) = 2$.

(ϛ΄) Αν το $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ είναι διάνυσμα στο $W^{\perp}$, τότε είναι ιδιοδιάνυσμα του A. Σ Λ

Αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ είναι διάνυσμα στο $W^{\perp}$, τότε $A\mathbf{x} = \mathbf{0} = 0\mathbf{x}$, ισοδύναμα κάθε $\mathbf{x} \in W^{\perp}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή $\lambda = 0$.

Θ3. Αν

$$A = \begin{pmatrix} 3-\rho & 2 & -\rho \\ 0 & \rho & \rho - 1 \\ 0 & 0 & \rho - 2 \end{pmatrix},$$

όπου ρ είναι μια πραγματική παράμετρος, να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A.

Το A είναι τριγωνικό κατά συνέπεια οι ιδιοτιμές του είναι τα στοιχεία της διαγωνίου, έτσι

$$\lambda_1 = 3 - \rho, \quad \lambda_2 = \rho, \quad \lambda_3 = \rho - 2. \qquad (2)$$

Διαφορετικά, οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\det(\lambda I - A) = 0$, έτσι υπολογίζουμε τη σχετική ορίζουσα αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - (3-\rho) & -2 & \rho \\ 0 & \lambda - \rho & 1-\rho \\ 0 & 0 & \lambda - (\rho - 2) \end{vmatrix} \\
&= [\lambda - (3-\rho)] \begin{vmatrix} \lambda - \rho & 1-\rho \\ 0 & \lambda - (\rho-2) \end{vmatrix} \\
&= [\lambda - (3-\rho)](\lambda - \rho)[\lambda - (\rho - 2)],
\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η (2).

Σε μία από τις διαφορετικές παραλλαγές υπήρχε το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} \rho - 4 & 1 & 5-\rho \\ \rho & \rho - 3 & \rho - 1 \\ 0 & 0 & \rho + 6 \end{pmatrix},$$

με $a_{21} = \rho$ τυπογραφικό λάθος. Και πάλι όμως διαμορφώνοντας την ορίζουσα $\det(\lambda I - A)$ την αναπτύσουμε ως προς την τρίτη γραμμή και υπολογίζουμε μία μόνο 2×2 ορίζουσα για την εύρεση των ιδιοτιμών. Πράγματι αναπτύσσοντας

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - \rho + 4 & -1 & \rho - 5 \\ -\rho & \lambda - \rho + 3 & 1 - \rho \\ 0 & 0 & \lambda - \rho - 6 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - \rho - 6) \begin{vmatrix} \lambda - \rho + 4 & -1 \\ -\rho & \lambda - \rho + 3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - \rho - 6)\big[(\lambda - \rho + 4)(\lambda - \rho + 3) - \rho\big] \\
&= (\lambda - \rho - 6)\big[(\lambda - \rho)^2 + 7(\lambda - \rho) + 12 - \rho\big]
\end{aligned}$$

και λύνοντας στη συνέχεια την εξίσωση $\det(\lambda I - A) = 0$ βρίσκουμε

$$\lambda = \rho + 6, \qquad \text{και} \qquad \lambda - \rho = \frac{-7 \pm \sqrt{1 + 4\rho}}{2}$$

έτσι

$$\lambda_1 = \rho + 6, \qquad \lambda_2 = \rho + \frac{-7 + \sqrt{1+4\rho}}{2}, \qquad \lambda_3 = \rho + \frac{-7 - \sqrt{1+4\rho}}{2}.$$

Θ4. Αν A είναι ένα 3×3 μητρώο με $\det A = a \neq 0$, τότε

Η ορίζουσα είναι γραμμική συνάρτηση ως προς κάθε γραμμή ξεχωριστά, έτσι αν το A είναι $n \times n$ τότε για τον υπολογισμό της $\det(rA)$ βγαίνει το r κοινός παράγοντας από κάθε μια από τις n γραμμές, άρα $\det(rA) = r^n \det A$. Επίσης ισχύουν οι ιδιότητες:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B), \qquad \det A = \det(A^{\mathrm{T}}), \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}, \quad \text{αν } \det A \neq 0.$$

(α΄) ■ $\det(2A) = 2^3 \det A = 2^3 a$.

(β΄) ■ $\det(2A(3A)^{-1}) = \dfrac{\det(2A)}{\det(3A)} = \dfrac{2^3 a}{3^3 a} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$.

(γ΄) ■ $\det(2A(3A)^{\mathrm{T}}) = \det(2A)\det((3A)^{\mathrm{T}}) = \det(2A)\det(3A) = 2^3 a 3^3 a = 2^3 3^3 a^2$.

(δ΄) $\operatorname{rank}(A^{-1}) = 3$ Ⓢ Λ

$\det A = a \neq 0$, άρα το A αντιστρέφεται, ισοδύναμα $\operatorname{rank} A = 3$, επομένως $\operatorname{rank}(A^{-1}) = 3$.

Θ5. Δίνεται το μητρώο

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(α΄) Να βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του M.

$$M \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

(β΄) Να βρείτε μια βάση για την εικόνα ($\operatorname{range} M$) του M.

Οι στήλες των οδηγών στο R είναι η πρώτη και η δεύτερη, άρα μια βάση για την εικόνα, ή χώρο στηλών του A ($\operatorname{range} A = C(A)$) αποτελείται από τη πρώτη και τη δεύτερη στήλη του A (και εδώ δεν είναι χρήσιμο το ¨σκονάκι¨;) έτσι μια βάση για το $\operatorname{range} A$ είναι η

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(γ΄) Να βρείτε μια βάση για το μηδενόχωρο ($\operatorname{null} M$) του M.

$\mathbf{x} \in \operatorname{null} A \Leftrightarrow R\mathbf{x} = \mathbf{0}$, έτσι

$$R\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix},$$

όπου $t \in \mathbb{R}$, έτσι μια βάση του μηδενόχωρου είναι η

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Θ6. Αν το B είναι ένα 3×4 μητρώο να βρεθεί η διάσταση του **τετραγωνικού** μητρώου A σε κάθε περίπτωση ώστε η πράξη να ορίζεται. Εάν η πράξη δεν μπορεί να ορισθεί γράψτε δεν ορίζεται.

Τα μητρώα AA^{T}, $A^{\mathrm{T}}A$ και BB^{T}, $B^{\mathrm{T}}B$ ορίζονται ανεξάρτητα από τη διάσταση των A και B και είναι τετραγωνικά. Ειδικά το BB^{T} είναι 3×3 και το $B^{\mathrm{T}}B$ είναι 4×4. Έτσι

(α΄) ■ $AB^{\mathrm{T}}B$ Το A είναι 4×4.

(β΄) ■ $BB^{\mathrm{T}}A$ Το A είναι 3×3.

(γ΄) ■ $AB^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ. Το A πρέπει να είναι 4×4 για να ορίζεται το AB^{T} και την ίδια στιγμή 3×3 για να ορίζεται το $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

(δ΄) ■ $A^{\mathrm{T}}AB$ Το A είναι 3×3.

(ε΄) ■ $A^{\mathrm{T}}B + AB^{\mathrm{T}}$ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ.

(ϛ΄) ■ $A + BA^{\mathrm{T}}$ ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ.

Θ7. Έστω $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ και έστω $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ δύο βάσεις για τον $\mathbb{R}^3$, και έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε

$$F(\mathbf{u}_1) = -\mathbf{v}_1, \qquad F(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \qquad F(\mathbf{u}_3) = -\mathbf{v}_3.$$

Παρατηρήστε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v}_2$ δεν εμφανίζεται στις εκφράσεις των $F(\mathbf{u}_j)$, $j = 1, 2, 3$, γεγονός που έχει συγκεκριμένες συνέπειες, με πρώτη την $F(\mathbb{R}^3) = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ (γιατί; βλέπε (β΄) παρακάτω).

(α΄) ■ Το μητρώο αναπαράστασης A του F ως προς τις βάσεις $\mathcal{U}$ και $\mathcal{V}$ είναι το

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

η j-στήλη του A είναι το διάνυσμα των συντελεστών του $F(\mathbf{u}_j)$ ως προς τη βάση $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Παρατηρήστε ότι αν $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$, τότε $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, επομένως οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Το αποτέλεσμα αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος που σχολιάσαμε προηγούμενα.

(β΄) Μια βάση για την εικόνα $\operatorname{Image}(F)$ είναι η

i. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

ii. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\}$

iii. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$

iv. Καμιά από τις προηγούμενες

Αν $\mathbf{x} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3$, τότε $F(\mathbf{x}) \in \operatorname{Image}(F)$ και από γραμμικότητα

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= aF(\mathbf{u}_1) + bF(\mathbf{u}_2) + cF(\mathbf{u}_3) \\ &= a(-\mathbf{v}_1) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + c(-\mathbf{v}_3) \\ &= (b - a)\mathbf{v}_1 + (b - c)\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$\operatorname{Image}(F) = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}.$$

(γ΄) Υπάρχει $b \in \mathbb{R}^3$ ώστε το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ δεν έχει λύση. Σ Λ

Για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ με μη μηδενική $\mathbf{v}_2$-συνιστώσα το σύστημα δεν έχει λύση, αφού $A\mathbf{x} \in \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, ειδικά το $A\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$ δεν έχει λύση. Διαφορετικά, ο χώρος στηλών του A, $C(A) = \operatorname{range} A$ είναι διδιάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, ένα επίπεδο W δηλαδή, έτσι αν $\mathbf{b} \notin W$ το σύστημα δεν έχει λύση, ειδικά για $\mathbf{b} \in W^{\perp}$.

Θ8. Ένα 3×3 μητρώο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(α΄) Το μητρώο A είναι αντιστρέψιμο. Σ Λ

Το $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του A, άρα το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει λύση μόνο τη μηδενική, άρα το A αντιστρέφεται.

(β′) ■ $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1\cdot 2\cdot 2 = 4.$

(γ′) Το μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο. Σ Λ

Τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα το μητρώο A διαγωνοποιείται.

Θ9. Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\|\mathbf{u}+2\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}+2\mathbf{u}\|,$$

όπου $\|\cdot\|$ είναι η επαγόμενη νόρμα

(α′) Τι συμπεραίνετε για τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$; (Με απόδειξη.)

Από την υπόθεση παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+2\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}+2\mathbf{u}\|^2 &\Leftrightarrow \langle \mathbf{u}+2\mathbf{v}, \mathbf{u}+2\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}+2\mathbf{u}, \mathbf{v}+2\mathbf{u}\rangle \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{u}\|^2 + 4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + 4\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + 4\langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + 4\|\mathbf{u}\|^2 \\ &\Leftrightarrow 3\|\mathbf{u}\|^2 = 3\|\mathbf{v}\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|\end{aligned}$$

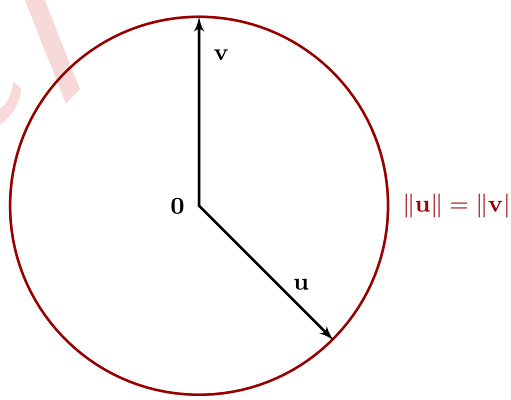
αφού $\|\cdot\| \geq 0$. Τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στη σφαίρα με κέντρο στην αρχή των αξόνων στο $\mathbb{R}^3$ και ακτίνα ρ, όπου $\rho = \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.

(β′) Πότε η $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή; (Με απόδειξη.)

Με $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ αν θ είναι η γωνία μεταξύ των $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}\rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= 2\|\mathbf{u}\|^2(1+\cos\theta)\end{aligned}$$

και το μέγιστο συμβαίνει αν $\cos\theta = 1$, ισοδύναμα αν $\theta = 0$, άρα τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ έχουν την ίδια κατεύθυνση και επειδή έχουν και το ίδιο μήκος τελικά προκύπτει ότι το μέγιστο συμβαίνει όταν $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Σημειώνουμε ότι το ελάχιστο $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = 0$ συμβαίνει όταν τα δύο διανύσματα αποτελούν μια διάμετρο της σφαίρας ($\theta = \pi \Rightarrow \cos\theta = -1$) είναι δηλαδή $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.



Θ10. Αν το A είναι ένα ορθογώνιο μητρώο τότε $\det A = \det(A^{-1})$. Σ Λ

Αν το A είναι ορθογώνιο, τότε $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$, οπότε

$$\det(A^{-1}) = \det(A^{\mathrm{T}}) = \det A.$$