

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12. Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση

Επισκόπηση

1. Έστω A ένα τετραγωνικό, $n \times n$, μητρώο. Εάν

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{και} \quad x \neq 0$$

η σταθερά λ λέγεται **ιδιοτιμή** του A και το x το **αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα**.

2. Εάν A είναι ένα τετραγωνικό, $n \times n$, μητρώο, το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A ορίζεται ως το

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

- Ο βαθμός του p είναι n .
- Ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι

$$p(0) = p(-A) = (-1)^n \det A.$$

- Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
- Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $m \leq n$ είναι οι ιδιοτιμές του A , τότε

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$$

Το k_j είναι η **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_j .

3. Αν λ είναι ιδιοτιμή του A ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα (στο λ) είναι ένα στοιχείο του μηδενόχωρου $\text{null}(\lambda I - A)$.

Ο μηδενόχωρος $\text{null}(\lambda I - A)$ λέγεται **ιδιόχωρος** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

- Η διάσταση του $\text{null}(\lambda I - A)$, $\dim \text{null}(\lambda I - A)$ ορίζεται ως **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ .

4. **Θεώρημα Cayley – Hamilton.** Αν $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A , τότε

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = O.$$

5. Τα τετραγωνικά μητρώα A και B λέγονται **όμοια** αν υπάρχει αντιστρέψιμο μητρώο M , ώστε $A = M^{-1}BM$.

6. Το A λέγεται **διαγωνοποιήσιμο** αν είναι όμοιο με κάποιο διαγώνιο μητρώο.

7. **Θεώρημα.** Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν το A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα το A είναι διαγωνοποιήσιμο.

8. **Θεώρημα.** Εάν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής λ είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα τότε το A είναι διαγωνοποιήσιμο. Στην περίπτωση αυτή αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές όπου κάθε ιδιοτιμή επαναλαμβάνεται σύμφωνα με την πολλαπλότητά της, και $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ είναι τα αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε

$$A = X \Lambda X^{-1},$$

$$\text{όπου} \quad X = (\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_n) \quad \text{και} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n).$$

Ασκήσεις

1. Παραλλαγή της Άσκησης 22 §6.2 Strang. Δίνεται το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι του A .
(β) Διαγωνοποιήστε το A .
(γ) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$$

2. Εάν για το τετραγωνικό μητρώο ισχύει $A^2 = A$ και το διάνυσμα $\mathbf{u}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ , τί μπορεί να ειπωθεί για το λ ;
3. Θεωρήστε το **μη αντιστρέψιμο** μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- (α) Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p_A του A , ακριβώς, προσδιορίζοντας δηλαδή, και αριθμητικά όπου εφαρμόζεται, όλους τους συντελεστές.
(β) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A .
4. Άσκηση 15 §6.1 Strang. Κάθε μητρώο μετάθεσης P , ως πούμε 3×3 , αφήνει το $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ αμετάβλητο, κατά συνέπεια το $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή. Να βρεθούν οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του μητρώου μετάθεσης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Άσκηση 16 §6.1 Strang. Αποδείξτε ότι η ορίζουσα μητρώου A ισούται με το γινόμενο των ιδιοτιμών του A .
6. Άσκηση 17 §6.1 Strang. Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων (το ίχνος) μητρώου ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών.
7. Να βρεθεί ένα ορθογώνιο μητρώο Q το οποίο διαγωνοποιεί το

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Ένα 3×3 μητρώο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (α) ■ $\text{trace } A =$
(β) Το μητρώο A είναι αντιστρέψιμο. Σ Λ
(γ) ■ $\det A =$
(δ) Το μητρώο A είναι διαγωνοποιήσιμο. Σ Λ
(ε) ■ $A =$