

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9. Τάξη μητρώου, Υπόχωροι παραγόμενοι από μητρώο

Ασκήσεις

1. (Σεπτέμβριος 2019) Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (α) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο στηλών του A .
(β) Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενόχωρο του A .
(γ) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο γραμμών του A .

2. Θεωρούμε το σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$$

με b να είναι μια πραγματική παράμετρος.

- (α) Είναι το μητρώο A αντιστρέψιμο;
(β) Να βρεθούν ο χώρος στηλών, ο χώρος γραμμών και ο μηδενόχωρος του A .
(γ) Για ποιά b το σύστημα έχει λύση ή λύσεις;
3. (Ιούνιος 2018) ΕΠΙΛΕΞΤΕ ΚΑΙ ΚΥΚΛΩΣΤΕ ΑΝΑΛΟΓΑ. Για το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Η τάξη του, $\text{rank } A$, είναι:

1 2 3

4. (Σεπτέμβριος 2018) ΜΑΥΡΙΣΤΕ ΑΝ Η ΕΚΦΡΑΣΗ ΕΙΝΑΙ ΑΛΗΘΗΣ. Για $A \in \mathbb{R}^{n \times 5}$ θεωρούμε το σύστημα $Ax = b$

- ☐ Αν $\text{rank } A = n$, τότε $n < 5$.
☐ Αν $\text{rank } A = 5$, τότε $\text{range } A = \mathbb{R}^n$.
☐ Αν το σύστημα έχει λύση για κάθε b , τότε $5 \geq n$.
☐ Αν για $b = 0$ είναι $x = 0$, τότε $\text{rank } A \geq 5$.

5. (Ιούνιος 2019) Εάν R είναι η **ανηγμένη κλιμακωτή μορφή** για το A , όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (α) Να βρεθεί μια βάση για τον χώρο στηλών του A .

(β) Να βρεθεί μια βάση για τον μηδενόχωρο του A .

(γ) Να βρεθεί η λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

6. Για το μητρώο A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(α) Να βρεθεί μια βάση $\mathcal{B}_C$ για τον χώρο στηλών $\text{range } A$ του A .

(β) Να βρεθεί μια βάση $\mathcal{B}_N$ για τον μηδενόχωρο $\text{null } A$ του A .

(γ) Να βρεθεί μια βάση $\mathcal{B}_R$ για τον χώρο γραμμών $\text{range } A^T$ του A .

(δ) Να βρεθεί η διάσταση του αριστερού μηδενόχωρου $\text{null } A^T$.

(ε) Χρησιμοποιήστε το Θεμελιώδες Θεώρημα για να βρείτε βάσεις για το $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^3$ επεκτείνοντας τις ήδη υπάρχουσες.

(ς) Αν

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.