ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2024–25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7. Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ανασκόπηση

- **Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** Εάν X είναι ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και νόρμα που ορίζεται με τη σχέση $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ (**επαγόμενη νόρμα**), τότε

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

για όλα τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ του X. Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

- **Το Πυθαγόρειο Θεώρημα.** Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Εάν $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ είναι διανύσματα του X ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, δηλαδή $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = 0$, αν $i \neq j$, τότε

$$\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_n\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + \cdots \|\mathbf{u}_n\|^2.$$

- **Ο νόμος του παραλληλογράμμου.** Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$. Δείξτε ότι

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\big)$$

για όλα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ στο X.

Ασκήσεις

1. Σε κάθε διανυσματικό χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ισχύουν

   (α΄) Εάν για κάποιο $\mathbf{u} \in X$ είναι $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}\rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$, τότε $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

   (β΄) $\langle \mathbf{0}, \mathbf{u}\rangle = 0$ για κάθε $\mathbf{u} \in X$.

2. Εάν $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$, και A είναι ένα αντιστρέψιμο 3×3 μητρώο δείξτε ότι η σχέση

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = A\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v}$$

ορίζει ένα εσωτρικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^3$. Σημειώνουμε ότι

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = A\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u})^{\mathrm{T}} A\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} A\mathbf{v}.$$

3. Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz. **Υπόδειξη:** Από την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \geq 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - 2t\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + t^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \end{aligned}$$

ισοδύναμα

$$\|\mathbf{v}\|^2 t^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle t + \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Τι μπορεί να ειπωθεί για την διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου;

4. Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$. Αν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι ορθογώνια διανύσματα του X δείξτε ότι

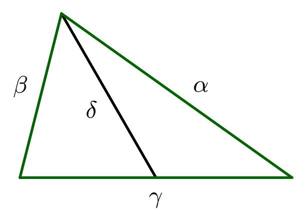
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

5. Αποδείξτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα για τρία διανύσματα. **Υπόδειξη:**

$$\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3\|^2 = \langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \rangle.$$

6. Αποδείξτε το νόμο του παραλληλογράμμου.

7. Για το τρίγωνο του σχήματος χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο αποδείξτε το Θεώρημα του



Απολλωνίου:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2} + 2\delta^2,$$

όπου δ είναι το μήκος της διαμέσου.

8. Εάν σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ τα **μη μηδενικά** διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$, είναι ανά δύο ορθογώνια, δηλαδή $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ για $i \neq j$, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

9. Έστω ότι το $\mathbf{a}$ είναι ένα τυχαίο αλλά σταθερό διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$.

   (α΄) Να δειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1$.

   (β΄) Να δειχθεί ότι $\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_p \leq n^{1/p}\|\mathbf{a}\|_\infty$ για $p = 1, 2$.

10. Σε χώρο X με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και επαγόμενη νόρμα $\| \cdot \|$ δείξτε ότι για $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ ισχύει $\|a\mathbf{u} + b\mathbf{v}\| = \|b\mathbf{u} + a\mathbf{v}\|$ για όλα τα $a, b \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.

11. **Η νόρμα Frobenius.** Εάν A είναι ένα $n \times n$ μητρώο, ορίζουμε το **ίχνος** (trace) του A να είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του A. Το συμβολίζουμε με $\operatorname{trace} A$ έτσι

$$\operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

   (α΄) Δείξτε ότι στον χώρο $\mathbb{M}^{n,m}(\mathbb{R})$ η σχέση

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}} B)$$

   είναι ένα εσωτερικό γινόμενο. Την επαγόμενη νόρμα ονομάζουμε **νόρμα Frobenius**.

   (β΄) Βρείτε μια αναλυτική έκφραση για την νόρμα Frobenius $\| \cdot \|_F$ του μητρώου $A = \big(a_{ij}\big) \in \mathbb{M}^{2,3}$.

12. Αν

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ορίζουμε το μητρώο $Q = 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} - I$.

   (α΄) Δείξτε ότι $Q = Q^{\mathrm{T}}$ και $Q^2 = I$ επομένως $Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}} = Q$.

   (β΄) Οι στήλες του είναι μοναδιαία διανύσματα, κάθετα μεταξύ τους και αποτελούν μια βάση για το $\mathbb{R}^2$.

ΛΥΣΕΙΣ

1. (α΄) Πράγματι για $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ έχουμε
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$$
από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου.

(β΄) Αν $\mathbf{u} \in X$, τότε για $\mathbf{v} \in X$, έχουμε
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{0}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{v} - \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \qquad \text{(από γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Δείχνουμε ότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες που ορίζουν ένα εσωτερικό γινόμενο.

Σημειώνουμε ότι αν $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, τότε
$$A\mathbf{u} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}.$$
Έτσι αν $A\mathbf{u} = \mathbf{x}$ και $A\mathbf{v} = \mathbf{y}$, τότε
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$
και
$$\|A\mathbf{u}\| = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

(i) Για κάθε διάνυσμα $\mathbf{u}$ έχουμε
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{u} = \|A\mathbf{u}\|^2 \geq 0$$
όπου $\| \cdot \|$ είναι το μέτρο διανύσματος του $\mathbb{R}^3$.

(ii) Αν $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$, τότε
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{u} = \|A\mathbf{u}\|^2 = 0 \Leftrightarrow A\mathbf{u} = \mathbf{0}$$
και επειδή το μητρώο A είναι αντιστρέψιμο η μοναδική λύση τουσυστήματος $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ είναι η μηδενική, κατά συνέπεια $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(iii)
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= (A(\mathbf{u} + \mathbf{v})) \cdot A\mathbf{w} \\ &= (A\mathbf{u} + A\mathbf{v}) \cdot A\mathbf{w} \qquad \text{(ιδιότητα γινομένου μητρώων)} \\ &= A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{w} + A\mathbf{v} \cdot A\mathbf{w} \qquad \text{(ιδιότητα του συνήθους εσωτερικού γινομένου)} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \qquad \text{(ορισμός του } \langle \cdot, \cdot \rangle\text{)} \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} \langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= A(\lambda \mathbf{u}) \cdot A\mathbf{v} \\ &= (\lambda A\mathbf{u}) \cdot A\mathbf{v} \\ &= \lambda A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} \qquad (\lambda(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \\ &= \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle &= A\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v}\\ &= A\mathbf{v}\cdot A\mathbf{u} && (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x})\\ &= \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle\end{aligned}$$

3. Από την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου, $\langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \geq 0$ και για κάθε $t\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle \mathbf{u}-t\mathbf{v},\mathbf{u}-t\mathbf{v}\rangle\\ &= \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle - 2t\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + t^2\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle\end{aligned}$$

ισοδύναμα

$$\|\mathbf{v}\|^2 t^2 - 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle t + \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$, κατά συνέπεια το τριώνυμο ή δεν έχει ρίζες, ή έχει διπλή ρίζα, ισοδύναμα η διακρίνουσά του είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός, ισοδύναμα

$$4\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle^2 - 4\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{u}\|^2 \Leftrightarrow |\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \tag{1}$$

που είναι το ζητούμενο. Ισότητα στην (1) συμβαίνει αν και μόνο εάν το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα, ισοδύναμα υπάρχει $t_0\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\langle \mathbf{u}-t_0\mathbf{v},\mathbf{u}-t_0\mathbf{v}\rangle = 0,$$

τότε όμως από ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου ($\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}$), έπεται ότι $\mathbf{u}-t_0\mathbf{v}=\mathbf{0}$, ισοδύναμα $\mathbf{u}=t_0\mathbf{v}$, ισοδύναμα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

4.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\pm\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}\pm\mathbf{v},\mathbf{u}\pm\mathbf{v}\rangle\\ &= \langle \mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \pm \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \pm \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle\\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \pm 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2\\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 && (\text{αφού } \langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0)\end{aligned}$$

Ο όρος που καθορίζεται από το πρόσημο είναι το μικτό εσωτερικό γινόμενο το οποίο είναι ίσο με μηδέν από ορθογωνιότητα. Έτσι

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Η τελευταία σχέση είναι το πυθαγόρειο θεώρημα.

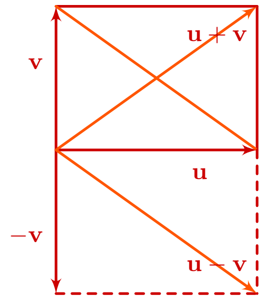
Γεωμετρικά στον $\mathbb{R}^n$: Τα δύο κάθετα διανύσματα παράγουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, του οποίου οι δύο διαγώνιοι είναι ίσες, βλέπε Σχήμα 1. Η μία, από το $\mathbf{0}$, είναι το άθροισμα $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ και η άλλη έχει μήκος $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$, επομένως

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|.$$

Τόσο απλά.

5. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3\|^2 &= \langle \mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3\rangle\\ &= \sum_{i,j=1}^{3}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j\rangle\\ &= \langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1\rangle + \langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2\rangle + \langle \mathbf{u}_3,\mathbf{u}_3\rangle && (\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j\rangle = 0 \quad \text{αν } i\neq j)\\ &= \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{u}_3\|^2.\end{aligned}$$



Σχήμα 1: Άσκηση 4.

6. Στην λύση της Άσκησης 4 δείξαμε ότι

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + 2\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - 2\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$

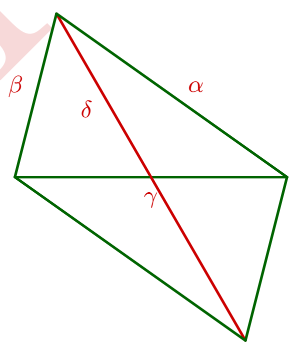
Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\big).$$

Σημειώνουμε ότι οι ποσότητες $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$ και $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ είναι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμου που ορίζουν τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Ο νόμος του παραλληλογράμμου λέει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων πλευρών.

7. Προεκτείνοντας τη διάμεσο κατά δ και στη συνέχεια κατασκευάζοντας το σχετικό τετράπλευρο, βλέπε Σχήμα 2, παρατηρούμε ότι οι διαγώνιοί του διχοτομούνται άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο με πλευρές α, β και διαγωνίους γ, δ. Έτσι από το νόμο του παραλληλογράμμου (Άσκηση 6) έχουμε

$$(2\delta)^2 + \gamma^2 = 2(\alpha^2+\beta^2) \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = \frac{\gamma^2}{2} + 2\delta^2.$$



Σχήμα 2: Άσκηση 7.

8. Έστω ότι $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$, δείχνουμε ότι $c_1 = c_2 = \cdots = 0$. Για $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ από την υπόθεση έχουμε

$$\langle c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_k\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{u}_k\rangle = 0,$$

από την Άσκηση 1 (β'), οπότε από την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου βρίσκουμε

$$\begin{aligned} c_1\langle \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_k\rangle + c_2\langle \mathbf{u}_2,\mathbf{u}_k\rangle + \cdots + c_n\langle \mathbf{u}_n,\mathbf{u}_k\rangle &= \mathbf{0} \\ c_k\langle \mathbf{u}_k,\mathbf{u}_k\rangle &= \mathbf{0} \qquad (\langle \mathbf{u}_j,\mathbf{u}_k\rangle = 0 \quad j\neq k) \\ c_k\|\mathbf{u}_k\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

οπότε $c_k = 0$ αφού $\mathbf{u}_k \neq 0$. Το k είναι τυχαίο, επομένως το αποτέλεσμα ισχύει για όλα τα $k = 1, 2, \ldots, n$.

9. Έστω $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$. Θυμίζουμε ότι για μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς r, s έχουμε $\sqrt{r+s} \leq \sqrt{r} + \sqrt{s}$, έτσι

   (α΄)

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} &\leq \sqrt{a_1^2} + \sqrt{a_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2} \\
&= |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \\
&= \|\mathbf{a}\|_1
\end{aligned}
$$

   (β΄) Έστω $\max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\} = |a_k|$, για κάποιο $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, τότε

   i. $(p = 1)$ Αφενός

$$\|\mathbf{a}\|_\infty = |a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = \|a\|_1$$

   και αφετέρου

$$\|a\|_1 = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq |a_k| + |a_k| + \cdots + |a_k| = n\|a\|_\infty$$

   έτσι συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες βρίσκουμε

$$\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_1 \leq n\|\mathbf{a}\|_\infty.$$

   ii. $(p = 2)$ Αφενός

$$\|\mathbf{a}\|_\infty = |a_k| = \sqrt{|a_k|^2} \leq \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2} = \|\mathbf{a}\|_2$$

   και αφετέρου

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2} &\leq \sqrt{|a_k|^2 + |a_k|^2 + \cdots + |a_k|^2} \\
&= \sqrt{n|a_k|^2} \\
&= \sqrt{n}\|a\|_\infty
\end{aligned}
$$

   οπότε από τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι

$$\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_2 \leq \sqrt{n}\|a\|_\infty$$

   που είναι το ζητούμενο.

10. Από την υπόθεση έχουμε

$$
\begin{aligned}
\|a\mathbf{u} + b\mathbf{v}\|^2 = \|b\mathbf{u} + a\mathbf{v}\|^2 &\Leftrightarrow \langle a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, a\mathbf{u} + b\mathbf{v}\rangle = \langle b\mathbf{u} + a\mathbf{v}, b\mathbf{u} + a\mathbf{v}\rangle \\
&\Leftrightarrow a^2\|\mathbf{u}\|^2 + 2ab\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + b^2\|\mathbf{v}\|^2 = b^2\|\mathbf{u}\|^2 + 2ab\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + a^2\|\mathbf{v}\|^2 \\
&\Leftrightarrow (a^2 - b^2)\|\mathbf{u}\|^2 = (a^2 - b^2)\|\mathbf{v}\|^2 \\
&\Leftrightarrow \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|
\end{aligned}
$$

   παίρνοντας $a^2 \neq b^2$.

11. Αν $A, B \in \mathbb{M}^{n,m}(\mathbb{R})$, τότε το μητρώο $A^{\mathrm{T}}B$ είναι $m \times m$. Αν $\mathbf{a}_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ είναι οι στήλες του μητρώου A, τότε

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \end{pmatrix}$$

   με $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, όπου "$\cdot$" είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$. Έτσι

(i)

$$\langle A, A\rangle = \operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_m = \|\mathbf{a}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{a}_m\|^2 \geq 0$$

όπου $\|\mathbf{a}_j\|$ είναι το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \ldots, m$ και

$$\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow \|\mathbf{a}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{a}_m\|^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \cdots = \mathbf{a}_m = \mathbf{0} \Leftrightarrow A = O,$$

όπου O είναι το μηδενικό $m \times m$ μητρώο.

(ii)

$$\begin{aligned}\langle A + B, C\rangle &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1)^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_1 + \cdots + (\mathbf{a}_m + \mathbf{b}_m)^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_m \\ &= (\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} + \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}})\mathbf{c}_1 + \cdots + (\mathbf{a}_m^{\mathrm{T}} + \mathbf{b}_m^{\mathrm{T}})\mathbf{c}_m \\ &= \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_1 + \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_1 + \cdots + \mathbf{a}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_m + \mathbf{b}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{c}_m \\ &= \operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}}B) + \operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}}C) \\ &= \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\langle \lambda A, B\rangle &= (\lambda\mathbf{a}_1)^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_1 + \cdots + (\lambda\mathbf{a}_m)^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_m \\ &= (\lambda\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}})\mathbf{b}_1 + \cdots + (\lambda\mathbf{a}_m^{\mathrm{T}})\mathbf{b}_m \\ &= \lambda\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_1 + \cdots + \lambda\mathbf{a}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_m \\ &= \lambda \operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}}B) \\ &= \lambda\langle A, B\rangle.\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1\rangle + \cdots + \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m\rangle \\ &= \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1\rangle + \cdots + \langle \mathbf{b}_m, \mathbf{a}_m\rangle \\ &= \langle A, B\rangle\end{aligned}$$

αφού το "·" είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Επομένως η σχέση $\langle A, B\rangle = \operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}}B)$ είνι εσωτερικό γινόμενο στο χώρο των πραγματικών $n \times m$ μητρώων.

Αν

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

τότε από το (i) έχουμε

$$\begin{aligned}\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{trace}(A^{\mathrm{T}}A)} &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2} \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

12. Σημειώνουμε ότι $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{q} = 1$ αφού το $\mathbf{q}$ είναι μοναδιαίο.

(α΄) Υπολογίζουμε

$$Q^{\mathrm{T}} = (2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} - I)^{\mathrm{T}} = (2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} - I^{\mathrm{T}} = 2(\mathbf{q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} - I = 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} - I = Q$$
$$Q^2 = (2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} - I)(2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} - I) = 4\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} + I^2 = 4\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} - 4\mathbf{q}\mathbf{q}^{\mathrm{T}} + I = I$$

Από τις δύο σχέσεις έπεται ότι

$$Q^2 = QQ^{\mathrm{T}} = I \Rightarrow Q = Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1}$$

από μοναδικότητα του αντίστροφου μητρώου.

(β′) Αν $Q = \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\end{pmatrix}$, τότε, βλέπε Άσκηση 11, έχουμε

$$Q^{\mathrm{T}}Q = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

απ′ όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\|\mathbf{a}_1\| = \|\mathbf{a}_2\| = 1, \qquad \text{και} \qquad \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle = 0.$$

Επομένως τα διανύσματα $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, βλέπε Άσκηση 8, κατά συνέπεια αποτελούν μια βάση στον $\mathbb{R}^2$, είναι μοναδιαία και ορθογώνια μεταξύ τους. Μια τέτοια βάση λέγεται **ορθοκανονική** βάση. Ένα μητρώο του οποίου οι στήλες είναι μοναδιαία διανύσματα ανά δύο ορθογώνια λέγεται **ορθογώνιο** μητρώο. Θα συζητούσουμε αναλυτικά τις έννοιες αυτές σε επόμενο κεφάλαιο.