Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2024–25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3. Μητρώα (συνέχεια)

Οι ασκήσεις (1.-6.) που ακολουθούν αποσκοπούν στον έλεγχο κατανόησης των βασικών εννοιών και στοιχειωδών πράξεων σχετικών με μητρώα. Είναι της μορφής Σωστό/Λάθος (Σ Λ). Απαντάτε κυκλώνοντας κατάλληλα. Μην απαντάτε στην τύχη, σκεφτείτε και επεξεργαστείτε τα δεδομένα πριν απαντήσετε.

1. (Σ Λ) Εάν A, B είναι μητρώα του ιδίου μεγέθους και r είναι μια σταθερά, τότε
$$(rA + B)^{\mathrm{T}} = rA^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}.$$

2. (Σ Λ) Εάν A, B είναι αντιστρέψιμα μητρώα του ιδίου μεγέθους, τότε και το $A + B$ είναι αντιστρέψιμο.

3. (Σ Λ) Εάν το A είναι ένα αντιστρέψιμο μητρώο, τότε και το A^{T} είναι αντιστρέψιμο.

4. (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B το $A + B^{\mathrm{T}}$ ορίζεται, τότε τα A και B είναι του ιδίου μεγέθους.

5. (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B το B είναι αντιστρέψιμο και το $A + B^{-1}$ ορίζεται, τότε τα A και B είναι του ιδίου μεγέθους.

6. (Σ Λ) Εάν για τα τετραγωνικά μητρώα A και B ισχύει $AB = O$, τότε $A = O$ ή $B = O$.

7. Αν
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{με} \quad ad - bc \neq 0,$$
τότε
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

8. Έστω ότι το τετραγωνικό μητρώο A ικανοποιεί τη σχέση $A^2 - 4A + I = O$, όπου O είναι το μηδενικό μητρώο. Δείξτε το A αντιστρέφεται και ότι $A^{-1} = 4I - A$.

9. Εάν το A είναι τετραγωνικό μητρώο ώστε $A^{k+1} = O$, για κάποιο θετικό ακέραιο k, δείξτε ότι
$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^k.$$

10. Εάν A και B είναι τετραγωνικά μητρώα ώστε $AB = O$ και το A είναι αντιστρέψιμο, δείξτε ότι $B = O$.

11. Έστω ότι το A είναι ένα τετραγωνικό μητρώο. Αν $A^2 = O$, δείξτε ότι το A δεν αντιστρέφεται.

12. Θεωρούμε το διαγώνιο μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

με $a_i \neq 0$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Δείξτε ότι το A είναι αντιστρέψιμο και βρείτε το A^{-1}.

13. Για τα 3×3 μητρώα μετάθεσης δείξτε ότι

(α΄) $M_k^{-1} = M_k^{\mathrm{T}}$, για $k = 0, 1, \ldots, 5$.

(β΄) Εφοδιασμένα με την πράξη του πολλαπλασιασμού αποτελούν ομάδα.

14. Εάν

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ορίζουμε $N = C - I$. Δείξτε ότι $N^3 = O$. Δείξτε επίσης ότι το C αντιστρέφεται και ότι

$$C^{-1} = I - N + N^2.$$

Υπόδειξη: $C = I + N$.

15. Έστω J_n το $n \times n$ μητρώο του οποίου όλα τα στοιχεία είναι 1. Δείξτε ότι

(α΄) $J_n^2 = nJ_n$

(β΄) $(I - J_n)^{-1} = I - \dfrac{1}{n-1} J_n$.

ΛΥΣΕΙΣ

1. Σ Λ Εάν A, B είναι μητρώα του ιδίου μεγέθους και r είναι μια σταθερά, τότε

$$(rA + B)^{\mathrm{T}} = rA^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}.$$

Έπεται από τις ιδιότητες της αναστροφής $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$ και $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$.

2. Σ Λ Εάν A, B είναι αντιστρέψιμα μητρώα του ιδίου μεγέθους, τότε και το $A + B$ είναι αντιστρέψιμο.

Αν το A είναι αντιστρέψιμο, τότε το $B = -A$ είναι αντιστρέψιμο και

$$B^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$$

από την ιδιότητα, αλλά $A + B = O$ δεν είναι αντιστρέψιμο.

3. Σ Λ Εάν το A είναι ένα αντιστρέψιμο μητρώο, τότε και το A^{T} είναι αντιστρέψιμο.

Το A^{-1} υπάρχει και από τις ιδιότητες της αναστροφής υπολογίζουμε

$$A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = I^{\mathrm{T}} = I$$
$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (AA^{-1})^{\mathrm{T}} = I^{\mathrm{T}} = I$$

κατά συνέπεια το A^{T} αντιστρέφεται και $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

4. Σ Λ Εάν για τα μητρώα A και B το $A + B^{\mathrm{T}}$ ορίζεται, τότε τα A και B είναι του ιδίου μεγέθους.

   Αν το A είναι $n \times m$, με $n \neq m$, το B^{T} είναι $n \times m$, οπότε το B είναι $m \times n$ διαφορετικού μεγέθους από το A.

5. Σ Λ Εάν για τα μητρώα A και B το B είναι αντιστρέψιμο και το $A + B^{-1}$ ορίζεται, τότε τα A και B είναι του ιδίου μεγέθους.

   Αφού το B αντιστρέφεται είναι $n \times n$, όπως και το B, άρα και το A αφού το $A + B^{-1}$ ορίζεται.

6. Σ Λ Εάν για τα τετραγωνικά μητρώα A και B ισχύει $AB = O$, τότε $A = O$ ή $B = O$.

   Αν $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ και $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, τότε $A \neq O$, $B \neq O$, αλλά $AB = O$.

7. Αν

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{με} \quad ad - bc \neq 0,$$

   τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

   Θέτουμε $\lambda = ad - bc \neq 0$ και δείχνουμε ότι

$$A \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Πράγματι

$$A \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} \\ \frac{-c}{\lambda} & \frac{a}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{\lambda} & \frac{-ab+ab}{\lambda} \\ \frac{cd-cd}{\lambda} & \frac{ad-bc}{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   από τον ορισμό του λ. Όμοια υπολογίζουμε και το άλλο γινόμενο.

8. Έστω ότι το τετραγωνικό μητρώο A ικανοποιεί τη σχέση $A^2 - 4A + I = O$, όπου O είναι το μηδενικό μητρώο. Δείξτε το A αντιστρέφεται και ότι $A^{-1} = 4I - A$.

$$A^2 - 4A + I = O \Rightarrow 4A - A^2 = I \Rightarrow \begin{cases} A(4I - A) = I, \\ (4I - A)A = I. \end{cases}$$

   Στη πρώτη περίπτωση βγάλαμε το A κοινό παράγοντα από τα αριστερά και στη δεύτερη από τα δεξιά. Το μητρώο λοιπόν $4I - A$ πολλαπλασιάζοντας το A είτε από τα δεξιά είτε από τα αριστερά δίνει ως γινόμενο το ταυτοτικό μητρώο I, επομένως το A αντιστρέφεται και από τη μοναδικότητα του αντίστροφου μητρώου έπεται ότι $A^{-1} = 4I - A$.

   ΠΡΟΣΟΧΗ: Βγάζοντας κοινό παράγοντα στην παρένθεση έχουμε $4I - A$ και όχι $4 - A$ που δεν ορίζεται.

9. Εάν το A είναι τετραγωνικό μητρώο ώστε $A^{k+1} = O$, για κάποιο θετικό ακέραιο k, δείξτε ότι

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^k.$$

Αν $B = I + A + A^2 + \cdots + A^k$, αρκεί να δείξουμε ότι $(I - A)B = B(I - A) = I$. Πράγματι, από την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k) &= I + A + A^2 + \cdots + A^k - A - A^2 + \cdots - A^k - A^{k+1} \\
&= I - O \\
&= I \\
(I + A + A^2 + \cdots + A^k)(I - A) &= I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \cdots + A^k - A^{k+1} \\
&= I - O \\
&= I
\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

10. Το A^{-1} υπάρχει, οπότε

$$AB = O \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}O \Rightarrow (A^{-1}A)B = O \Rightarrow IB = O \Rightarrow B = O.$$

11. Ας υποθέσουμε ότι A^{-1} υπάρχει, τότε (όπως στην προηγούμενη Άσκηση με A στη θέση του B)

$$A^2 = O \Rightarrow A^{-1}(AA) = A^{-1}O \Rightarrow (A^{-1}A)A = O \Rightarrow IA = O \Rightarrow A = O.$$

Με την υπόθεση ότι το A αντιστρέφεται καταλήξαμε στο ότι $A = O$, αυτό όμως είναι άτοπο (γιατί το O δεν έχει αντίστροφο), υπομένως η υπόθεση είναι ψευδής, άρα το A δεν έχει αντίστροφο.

12. **Λήμμα.** *Το γινόμενο διαγωνίων μητρώων είναι διαγώνιο και τα στοιχεία της διαγωνίου του γινομένου είναι τα γινόμενα των αντίστοιχων στοιχείων των μητρώων.*

Απόδειξη. Έστω ότι τα $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ είναι διαγώνια μητρώα (τετραγωνικά) του ιδίου μεγέθους, έστω $n \times n$. Αν $\mathbf{a}^i$ είναι οι γραμμές του A, $i = 1, 2, \ldots, n$, το $\mathbf{a}^i$ έχει a_{ii} στην i-στήλη και μηδέν στις υπόλοιπες, και αν $\mathbf{b}^j$ είναι οι στήλες του B, $j = 1, 2, \ldots, n$, το $\mathbf{b}_j$ έχει b_{jj} στην j-γραμμή και μηδέν στις υπόλοιπες. Αν $C = AB = (c_{ij})$ είναι το γινόμενο, τότε

$$c_{ij} = \mathbf{a}^i \mathbf{b}_j = (\mathbf{a}^i)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b}_j = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

κατά συνέπεια το C είναι διαγώνιο και $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$. □

Αν για το διαγώνιο μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

με $a_i \neq 0$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ πάρουμε

$$A' = \begin{pmatrix} 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_n \end{pmatrix}$$

τότε, σύμφωνα με το Λήμμα, έχουμε $AA' = A'A = I$, άρα $A^{-1} = A'$.

13. Αν

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και M είναι ένα 3×3 μητρώο μετάθεσης, τότε

$$M = (\mathbf{e}_i \;\; \mathbf{e}_j \;\; \mathbf{e}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\ell^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}_m^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

όπου $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $\ell, m, n \in \{1, 2, 3\}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους.

(α΄) Επομένως

$$\begin{aligned} M^{\mathrm{T}}M = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}_k^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\mathbf{e}_i \;\; \mathbf{e}_j \;\; \mathbf{e}_k) &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \\ \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \\ \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

όμοια

$$\begin{aligned} MM^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\ell^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}_m^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\mathbf{e}_\ell \;\; \mathbf{e}_m \;\; \mathbf{e}_n) &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_\ell \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_\ell & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

κατά συνέπεια $M^{-1} = M^{\mathrm{T}}$.

(β΄) Έστω $\mathcal{M}_3$ το σύνολο των 3×3 μητρώων μετάθεσης. Ο πολλαπλασιασμός $M_k A$ ενός μητρώου A με μητρώο μετάθεσης M_k, μεταθέτει εκείνες τις γραμμές του A που μετατέθηκαν στο I για να προκύψει το M_k, έτσι αν το A είναι μητρώο μετάθεσης το $M_k A$ είναι μια μετάθεση γραμμών του I, άρα μητρώο μετάθεσης, ισοδύναμα το γινόμενο στοιχείων του $\mathcal{M}_3$ είναι στοιχείο του $\mathcal{M}_3$. Επιπλέον

i. Ο πολλαπλασιασμός στο $\mathcal{M}_3$ είναι ο γνωστός πολλαπλασιασμός, άρα είναι προσεταιριστικός.

ii. Το ταυτοτικό μητρώο είναι μητρώο μετάθεσης, άρα υπάρχει στο $\mathcal{M}_3$ το ουδέτερο στοιχείο της πράξης.

iii. Κάθε στοιχείο M του $\mathcal{M}_3$ έχει αντίστροφο, το M^{T}, όπως δείξαμε στο (α΄).

Επομένως το $\mathcal{M}_3$ με την πράξη του πολλαπλασιασμού είναι ομάδα.

14. Είναι

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = C - I.$$

(αʹ) $N^3 = O$. Βλέπε Ασκήσεις 2 #1.

(βʹ) $C^{-1} = I - N + N^2$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$C(I - N + N^2) = (I - N + N^2)C = I$$

ισοδύναμα, από τον ορισμό του N,

$$(N + I)(I - N + N^2) = (I - N + N^2)(N + I) = I.$$

Δείχνουμε τη μία από τις δύο ισότητες, η άλλη είναι παρόμοια. Πράγματι

$$\begin{aligned}(N + I)(I - N + N^2) &= N - N^2 + N^3 + I - N + N^2 \\ &= O + I && \text{(από το (αʹ))} \\ &= I.\end{aligned}$$

15. (αʹ) Έστω $J_n = (a_{ij})$ όπου $a_{ij} = 1$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ και $j = 1, 2, \ldots, n$. Αν $\mathbf{a}^i$ είναι η i-γραμμή (ως μητρώο) του J_n και $\mathbf{a}_j$ είναι η j-στήλη του J_n, τότε

$$(\mathbf{a}^i)^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}_j, \qquad \text{για όλα τα } i \text{ και όλα τα } j$$

έτσι το στοιχείο στην i-γραμμή και j-στήλη του J_n είναι το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = n$, οπότε βγάζοντας το n κοινό παράγοντα έχουμε ότι $J_n^2 = nJ_n$.

(βʹ) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(I - J_n)\left(I - \frac{1}{n-1}J_n\right) = \left(I - \frac{1}{n-1}J_n\right)(I - J_n) = I.$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}(I - J_n)\left(I - \frac{1}{n-1}J_n\right) &= I - \frac{1}{n-1}J_n - J_n + \frac{1}{n-1}J_n^2 \\ &= I - \frac{n}{n-1}J_n + \frac{n}{n-1}J_n, && \text{(από το (αʹ))} \\ &= I.\end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο δείχνεται και η άλλη ισότητα.