Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη

Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2024–25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2. Μητρώα

Παρατήρηση: Μυστικά του πολλαπλασιασμού

Πέρα από τον μηχανιστικό τρόπο εκτέλεσης του πολλαπλασιασμού μητρώων μέσω της (12) (διαφάνεια 10, Διάλεξη 2), η κατανόηση της δομής του γινομένου επιτρέπει την εξαγωγή ιδιαίτερα χρήσιμων συμπερασμάτων για το γινόμενο. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Παριστώντας τις στήλες μητρώου ως μητρώα με μία στήλη, και τις γραμμές ως μητρώα με μία γραμμή, επειδή

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bw + cy & av + bx + cz \\ du + ew + fy & dv + ex + fz \end{pmatrix},$$

βλέπουμε ότι αφενός

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} y & \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} z \end{pmatrix} \tag{1}$$

απ' όπου έπεται ότι *οι στήλες του γινομένου είναι γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του πρώτου μητρώου*, και αφετέρου

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} w & x \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix} c \\ \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} w & x \end{pmatrix} e + \begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix} f \end{pmatrix} \tag{2}$$

απ' όπου έπεται ότι *οι γραμμές του γινομένου είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του δεύτερου μητρώου*. Για γενικά μητρώα ας επεκτείνουμε τον γνωστό συμβολισμό ως εξής: Για το $n \times m$ μητρώο Q γράφουμε, όπως πριν, $\mathbf{q}_j$ για την j-στήλη του Q και $\mathbf{q}^i$ για την i-γραμμή του Q, ως $1 \times m$ μητρώο, ώστε

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{q}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^n \end{pmatrix}.$$

Αν $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}$ είναι ένα $n \times m$ μητρώο και $B = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}$ είναι ένα $m \times k$ μητρώο, μια προσεκτική ανάγνωση των (3.7), (3.8), (3.9) αποκαλύπτει για το γινόμενο $C = AB$ τα εξής:

(1) Κάθε στήλη του AB είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A με συντελεστές τα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης του B, με άλλα λόγια αν

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_k \end{pmatrix} = C$$

τότε

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{a}_1 b_{1j} + \mathbf{a}_2 b_{2j} + \cdots + \mathbf{a}_m b_{mj}, \qquad j = 1, 2, \dots, k \tag{3}$$

(2) Καθε γραμμή του AB είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του B με συντελεστές τα στοιχεία της αντίστοιχης γραμμής του A, με άλλα λόγια αν

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \mathbf{c}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^n \end{pmatrix} = C$$

τότε

$$\mathbf{c}^i = \mathbf{b}^1 a_{i1} + \mathbf{b}^2 a_{i2} + \cdots + \mathbf{b}^m a_{im}, \qquad j = 1, 2, \dots, k \tag{4}$$

(3) Παρατηρήστε ότι

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^1\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}^1\mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}^2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^2\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}^2\mathbf{b}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}^n\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}^n\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}^n\mathbf{b}_k \end{pmatrix}.$$

Ασκήσεις

1. Αν

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δείξτε ότι $A^2 = O$, και $B^3 = O$.

2. Να βρεθούν όλα τα 2×2 μητρώα της μορφής

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad b \neq 0$$

τέτοια ώστε $M^2 = I$.

3. Να βρεθούν όλα τα 2×2 πραγματικά μητρώα που ικανοποιούν την εξίσωση $I + A^2 = O$, όπου O είναι τη μηδενικό μητρώο.

4. Οι ερωτήσεις που ακολουθούν αποσκοπούν στον έλεγχο κατανόησης των βασικών εννοιών και στοιχειωδών πράξεων σχετικών με μητρώα. Είναι της μορφής Σωστό/Λάθος (Σ Λ). Απαντάτε κυκλώνοντας κατάλληλα. Εκτιμήστε τη ρήση του Αϊνστάιν "Ο Θεός δεν παίζει ζάρια" και (ως κατ΄ εικόνα και καθ΄ ομοίωσιν πλάσματα) μην απαντάτε στην τύχη. Σκεφτείτε και επεξεργαστείτε τα δεδομένα πριν απαντήσετε. Ακόμα καλύτερα δικαιολογήστε την απάντησή σας.

   (α΄) (Σ Λ) Εάν A και B είναι μητρώα και $AB = BA$ τότε τα μητρώα είναι τετραγωνικά του ιδίου μεγέθους.

   (β΄) (Σ Λ) Εάν A, B, C είναι μητρώα του ιδίου μεγέθους και $A - C = B - C$, τότε $A = B$.

   (γ΄) (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B είναι $AB = BA$, τότε $A = B$.

   (δ΄) (Σ Λ) Εάν A, B, C είναι τετραγωνικά μητρώα του ιδίου μεγέθους και $AC = BC$, τότε $A = B$.

   (ε΄) (Σ Λ) Εάν για τα μητρώα A και B το $AB + BA$ ορίζεται, τότε τα μητρώα A, B είναι τετραγωνικά του ιδίου μεγέθους.

(ϛ΄) (Σ Λ) Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το A έχει μια γραμμή με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια γραμμή με μηδέν παντού.

(ζ΄) (Σ Λ) Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το A έχει μια στήλη με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια στήλη με μηδέν παντού.

(η΄) (Σ Λ) Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το B έχει μια γραμμή με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια γραμμή με μηδέν παντού.

(θ΄) (Σ Λ) Έστω ότι για τα μητρώα A και B το AB ορίζεται. Εάν το B έχει μια στήλη με μηδέν παντού, τότε το AB έχει μια στήλη με μηδέν παντού.

(ι΄) (Σ Λ) Εάν A, B είναι τετραγωνικά μητρώα του ιδίου μεγέθους, τότε

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

5. ΚΥΚΛΩΣΤΕ ΑΝΑΛΟΓΑ. Εάν

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

τότε η πράξη μεταξύ των εμπλεκομένων μητρώων ορίζεται. Εκεί όπου ορίζεται εκτελέστε τη.

(α΄) (Σ Λ) $AA^{\mathrm{T}}C$

(β΄) (Σ Λ) ACB

(γ΄) (Σ Λ) CAA^{T}

(δ΄) (Σ Λ) ADB

6. Θεωρώντας τα μητρώα με αντίστοιχα μεγέθη

μητρώο:	A	B	C	D	E
μέγεθος:	3×5	5×2	3×5	3×2	2×3

υπολογίστε το μέγεθος ή γράψτε “δο” (δεν ορίζεται) για κάθε ένα από τα μητρώα

AB	BA	$A-C$	$A^{\mathrm{T}}B$	$A^{\mathrm{T}}C$	$D^{\mathrm{T}}A$	$CB+D$	DE	$DD^{\mathrm{T}}+E^{\mathrm{T}}E$	$(A+C)BE$

7. Η ακολουθία των αριθμών **Fibonacci** ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3,$$

έτσι οι πρώτοι μερικοί όροι της ακολουθίας είναι

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Έστω

$$F = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας $f_0 = 0$, δείξτε ότι για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$ ισχύει

$$F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$