Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2024–25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1. Διανύσματα

1. Εάν
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$
είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ με $a_1 > b_1 > 0$, και $b_2 > a_2 > 0$, εξηγείστε τι περιγράφει καθένα από τα σύνολα

   (α΄) $S_1 = \{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} : \lambda \leq 0 \text{ και } \mu \leq 0\}$.

   (β΄) $S_2 = \{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \geq 0\}$.

   (γ΄) $S_3 = \{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \in \mathbb{R}\}$.

   (δ΄) $S_4 = \{\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} : \mu \in \mathbb{R}\}$.

   (ε΄) $S_5 = \{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} : \lambda \in [0,1], \mu \in \mathbb{R}\}$.

2. Να βρεθούν σταθερές c_1, c_2, c_3 ώστε
$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, c_3 ώστε
$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. **Ορισμός.** *Εάν* $\mathbf{a}$ *και* $\mathbf{b}$ *είναι διανύσματα στο* $\mathbb{R}^n$ *ο ιδιαίτερος γραμμικός συνδυασμός*
$$(1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \qquad 0 \leq t \leq 1$$
λέγεται **κυρτός συνδυασμός** *των* $\mathbf{a}$ *και* $\mathbf{b}$.

   (α΄) Θεωρείστε τον κυρτό συνδυσμό
$$\mathbf{v}(t) = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$
   Δείξτε ότι καθώς το t διαγράφει το διάστημα $[0,1]$ το διάνυσμα $\mathbf{v}(t)$ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(0,2)$ και $(1,1)$[1].

[1] Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε διάστημα $[a,b]$ της ευθείας ισχύει
$$[a,b] = \{x : x = (1-t)a + tb \text{ για κάποιο } t \in [0,1]\}.$$
Τι θα λέγατε να το αποδεικνύατε. Το ανάλογο ισχύει και για τα διαστήματα $[a,b)$, ή $(a,b]$, ή (a,b).

(β΄) Ελευθερώνοντας το t ώστε να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή δικαιολογήστε γιατί το $\mathbf{v}(t)$ παριστάνει την εξίσωση της ευθείας του επιπέδου η οποία περιέχει τα σημεία $(0, 2)$ και $(1, 1)$.

(γ΄) Γράφοντας

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

και διαπιστώνοντας ότι η εν λόγω ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, γενικεύστε και δείξτε ότι η ευθεία του επιπέδου η οποία περιέχει το σημείο (a, b) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Βλέπε Άσκηση 1 (δ΄).

5. ♦ **Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$

Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν και μόνο αν τα $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ για κάποια σταθερά λ.

6. Αν $a, b, \theta \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο δείξτε ότι

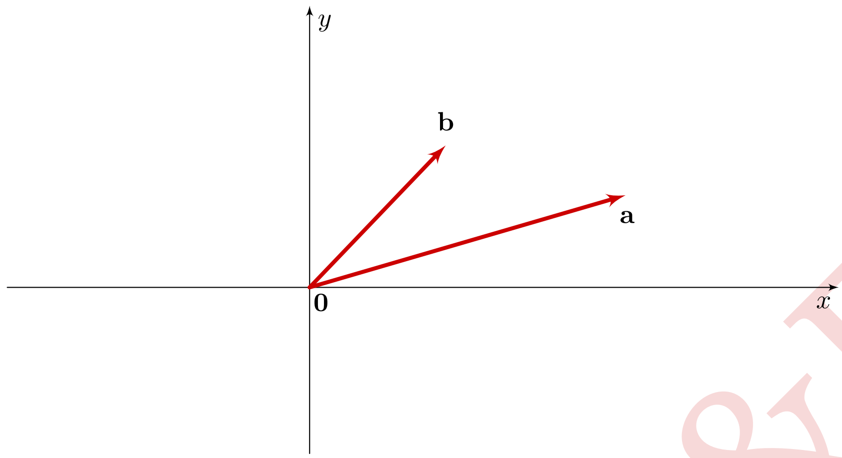
$$(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 \leq a^2 + b^2.$$

7. Εάν $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο δείξτε ότι

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

ΛΥΣΕΙΣ

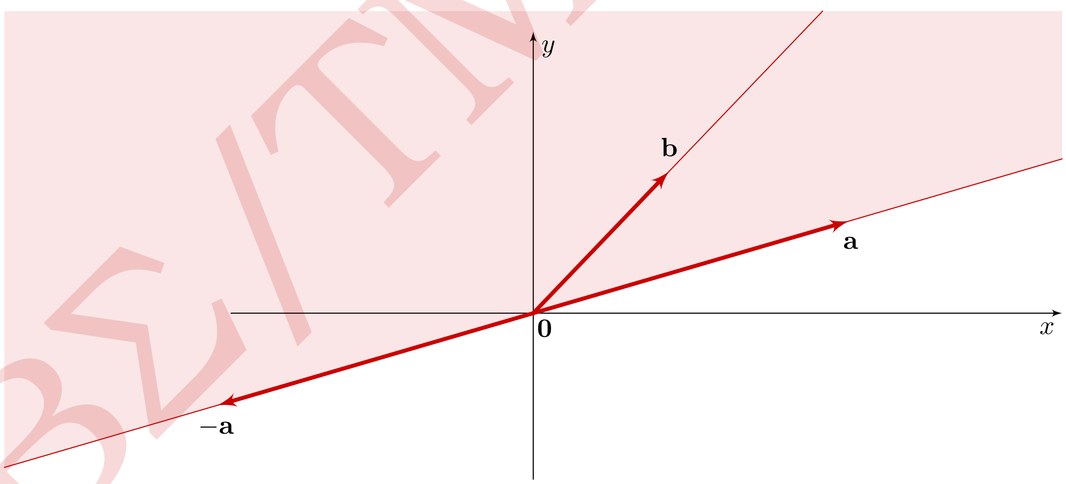
1. Τα διανύσματα είναι όπως στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

(β') $S_2 = \{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} : \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \mu \geq 0\}$.

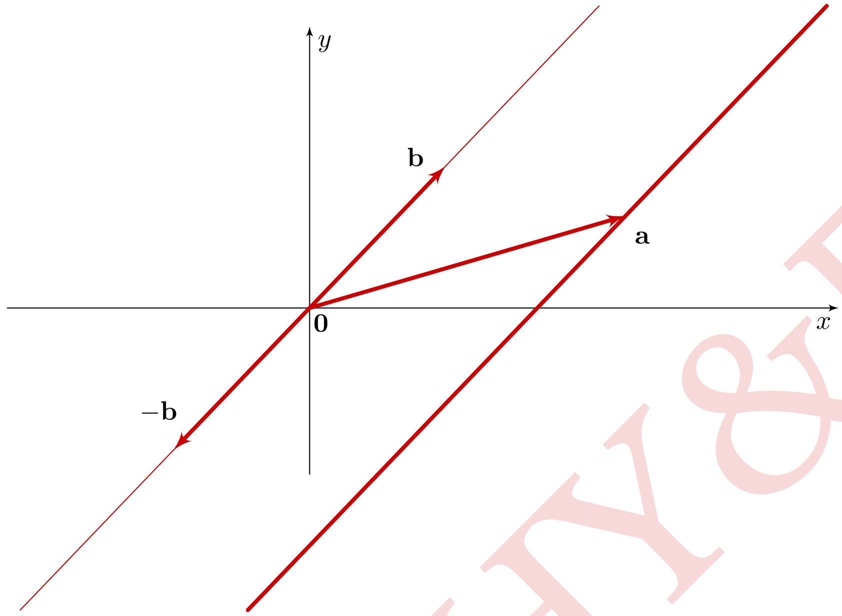
Το τυπικό διάνυσμα του S_2 είναι διαγώνιος παραλληλογράμμου με πλευρές κατά μήκος του διανύσματος $\mathbf{a}$, ή του $-\mathbf{a}$, δηλαδή της ευθείας $\lambda\mathbf{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, και του διανύσματος $\mathbf{b}$, δηλαδή της ημιευθείας $\mu\mathbf{b}$, $\mu \geq 0$. Κατά συνέπεια το S_2 είναι το ημιεπίπεδο που καθορίζει η ευθεία δια του $\mathbf{a}$ το οποίο περιέχει το διάνυσμα $\mathbf{b}$. Είναι το σκιασμένο στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Το σύνολο S_2.

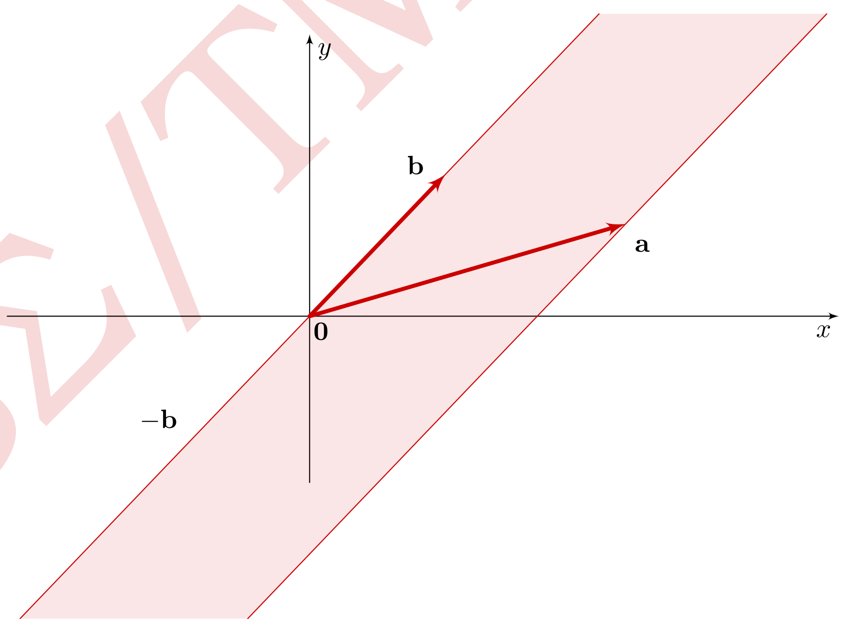
(δ΄) $S_4 = \{\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} : \mu \in \mathbb{R}\}$.

Το τυπικό διάνυσμα του S_4 είναι διαγώνιος παραλληλογράμμου με μία πλευρά το διάνυσμα $\mathbf{a}$, και την άλλη κατά μήκος της ευθείας $\mu\mathbf{b}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια το S_4 είναι η ευθεία δια του $\mathbf{a}$ παράλληλη στην $\mu\mathbf{b}$.



Σχήμα 3: Το S_4.

(ε΄) $S_5 = \{\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} : \lambda \in [0,1], \mu \in \mathbb{R}\}$.



Σχήμα 4: Το S_5.

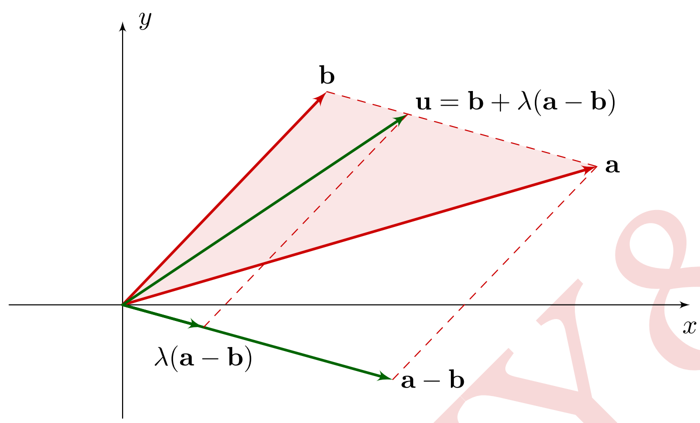
4. Αν $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ είναι δύο διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ τα οποία δεν περιέχονται στην ίδια ευθεία ο **κυρτός συνδυασμός** τους είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{u} = (1-\lambda)\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}, \qquad 0 \le \lambda \le 1.$$

Παρατηρώντας ότι το $\mathbf{u}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{u} = \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b}),$$

βλέπουμε ότι το $\mathbf{u}$ είναι η διαγώνιος παραλληλογράμμου με πλευρές κατά μήκος των $\mathbf{b}$ και $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, βλέπε Σχήμα. Κατά συνέπεια το $\mathbf{u}$ διαγράφει τη βάση του τριγώνου με "πλευρές" τα $\mathbf{b}$ και $\mathbf{a}$, καθώς το λ διαγράφει το διάστημα $[0, 1]$. Για $\lambda = 0$ είναι $\mathbf{u} = \mathbf{b}$, ενώ για $\lambda = 1$ είναι $\mathbf{u} = \mathbf{a}$.



5. **Η ανισότητα Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** Εάν $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta,$$

όπου $0 \leq \theta \leq \pi$ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. Επομένως

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\||\cos\theta| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|, \tag{1}$$

αφού $-1 \leq \cos\theta \leq 1$. Ισότητα ισχύει στην ανισότητα αν $\cos\theta = \pm 1$, ισοδύναμα $\theta = 0$, ή $\theta = \pi$. Και στις δύο περιπτώσεις τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ περιέχονται στην ίδια ευθεία, ισοδύναμα αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ για κάποια σταθερά λ, είναι δηλαδή γραμμικά εξαρτημένα.

6. Αν $a, b, \theta \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned}
(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 &= \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\right]^2 \\
&\leq (a^2 + b^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \qquad \text{(από την 5)} \\
&= a^2 + b^2.
\end{aligned}$$

7. Εάν $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned}
(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 &= \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 \\
&\leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(1 + 1 + \cdots + 1) \\
&= n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).
\end{aligned}$$