Πανεπιστημιο Πατρων – Πολυτεχνικη Σχολη
Τμημα Μηχανικων Η/Υ & Πληροφορικης

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

2023–24

ΑΣΚΗΣΕΙΣ, 13η σειρά: Γραμμικοί μετασχηματισμοί

1. Τα διανύσματα

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

αποτελούν μια βάση για το $\mathbb{R}^3$. Αν για ένα γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ισχύει

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \qquad T(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad T(\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},$$

να βρεθεί ο τύπος του μετασχηματισμού.

Λύση 1

Θέλουμε μια έκφραση της μορφής

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1x + b_1y + c_1z\\a_2x + b_2y + c_2z\end{pmatrix}.$$

Επειδή

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

όπου τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ αποτελούν τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$, από γραμμικότητα του μετασχηματισμού έχουμε

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = T(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = xT(\mathbf{e}_1) + yT(\mathbf{e}_2) + zT(\mathbf{e}_3), \tag{1}$$

κατά συνέπεια θέλουμε να εκφράσουμε τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ μέσω των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Έτσι

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{e}_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\\ \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_3\end{cases}$$

οπότε από την (1) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= xT(\mathbf{u}_3) + yT(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) + zT(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\\ &= zT(\mathbf{u}_1) + (y - z)T(\mathbf{u}_2) + (x - y)T(\mathbf{u}_3)\\ &= z\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + (y - z)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (x - y)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \qquad (2)\\ &= \begin{pmatrix}3x - 2y + z\\2x - y + 2z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Λύση 2

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα για τη σύνθεση γραμμικών μετασχηματισμών.

Αν $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι ο μετασχηματισμός που απεικονίζει την συνήθη βάση $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ στην $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, εκφράζει δηλαδή κάθε $\mathbf{e}_i$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{u}_j$, τότε όπως είδαμε

$$S(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}_3, \qquad S(\mathbf{e}_2) = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \qquad S(\mathbf{e}_3) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$

κατά συνέπεια το μητρώο αναπαράστασής του είναι το

$$A_S = \begin{pmatrix} S(\mathbf{e}_1) & S(\mathbf{e}_2) & S(\mathbf{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Όμοια το μητρώο αναπαράστασης του T, όπως δίνεται είναι το

$$A_T = \begin{pmatrix} T(\mathbf{u}_1) & T(\mathbf{u}_2) & T(\mathbf{u}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

επομένως το μητρώο του μετασχηματισμού ως προς τις συνήθεις βάσεις του $\mathbb{R}^3$ και του $\mathbb{R}^2$ είναι

$$A_T A_S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Επομένως

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ 2x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση: Επειδή

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

από την (2) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - y) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x - y) \left[-\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= (-x + y + z) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (5x - 4y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

κατά συνέπεια

$$\operatorname{image} T = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ να είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^3$ επί του επιπέδου W με εξίσωση $x + y + z = 0$. Να βρεθεί ο τύπος του T.

Λύση 1

Δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του επιπέδου είναι τα

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{και} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

έτσι αν $A = \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\end{pmatrix}$ το μητρώο προβολής επί του επιπέδου είναι το $P = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$. Έχουμε λοιπόν

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{\mathrm{T}}A)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

οπότε

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Λύση 2

Αν $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του W, τότε

$$T(\mathbf{x}) = \operatorname{proj}_W \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1\rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_2\rangle \mathbf{u}_2.$$

Παίρνουμε

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. **Θεώρημα αναπαράστασης.** Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Δείξτε ότι υπάρχει διάνυσμα $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ ώστε
$$T(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle$$
για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.
Υπόδειξη. Αν $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ είναι μια βάση στο $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$.

   Έχει λυθεί στην τελευταία διάλεξη.

4. Έστω $X = \mathcal{C}[0,1]$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0,1]$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό $I : X \to X$, όπου $I(f) = F$ με
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad 0 \le x \le 1.$$
   (αʹ) Δείξτε ότι ο I είναι γραμμικός μετασχηματισμός.
   (βʹ) Περιγράψτε την εικόνα $\operatorname{image} I$, του I.
   (γʹ) Δείξτε ότι ο I είναι ένα-προς-ένα. **Υπόδειξη:** $I(f)(0) = 0$ για κάθε $f \in X$.
   (δʹ) Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός I^{-1}.

5. Έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με
$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -5x + 13y \\ -7x + 16y \end{pmatrix}.$$
   Να βρεθεί το μητρώο του T ως προς τις βάσεις
$$\mathcal{B} = \left\{\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{και} \qquad \mathcal{B}' = \left\{\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

6. Έστω $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$. Επιβεβαιώστε ότι το μητρώο $P = (I - \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}})$ είναι το μητρώο προβολής επί του επιπέδου με εξίσωση $ax + by + cz = 0$. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται ως $T(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$.

   (α΄) Να βρεθεί ο τύπος του T.

   (β΄) Να βρεθεί η εικόνα $\operatorname{image} T$ του T.

   (γ΄) Να βρεθεί ο πυρήνας $\operatorname{kernel} T$ του μετασχηματισμού.

7. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους των πολυωνύμων $\mathbb{P}_2$ και $\mathbb{P}_3$ και τον μετασχηματισμό ολοκλήρωμα $J : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ όπου για $p \in \mathbb{P}_3$ είναι $J(p) = P$ με

$$P(x) = \int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (α΄) Να βρεθεί η εικόνα $\operatorname{image} J$ του J.

   (β΄) Εξετάστε αν ο μετασχηματισμός ένα-προς-ένα.

   (γ΄) Να βρεθεί το μητρώο που παριστάνει τον J.